



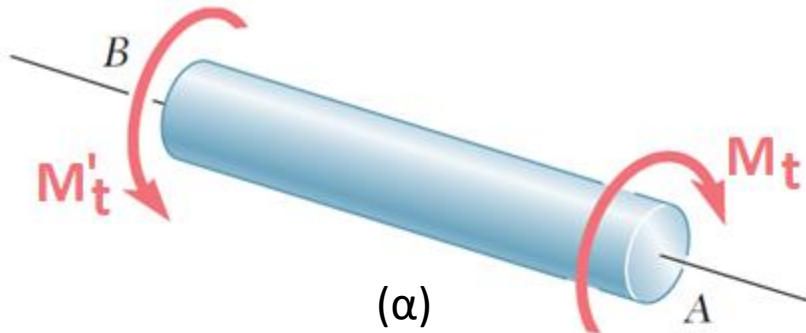
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

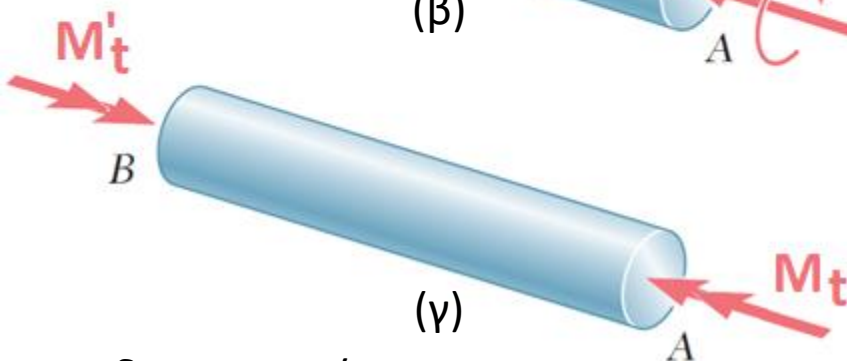
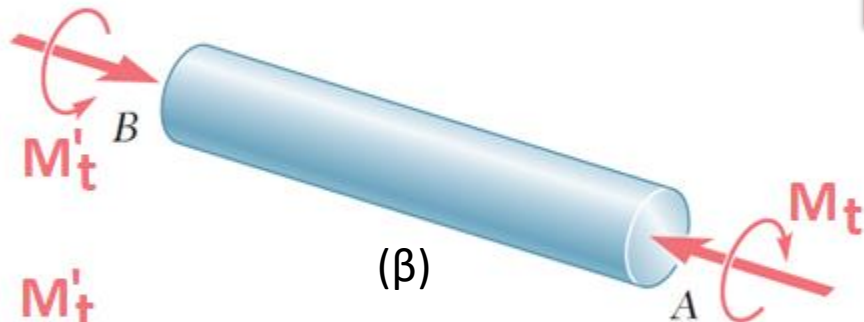
Στρέψη

Δρ. Δημήτριος ΣΑΒΒΑΣ

Ορισμός στρέψης



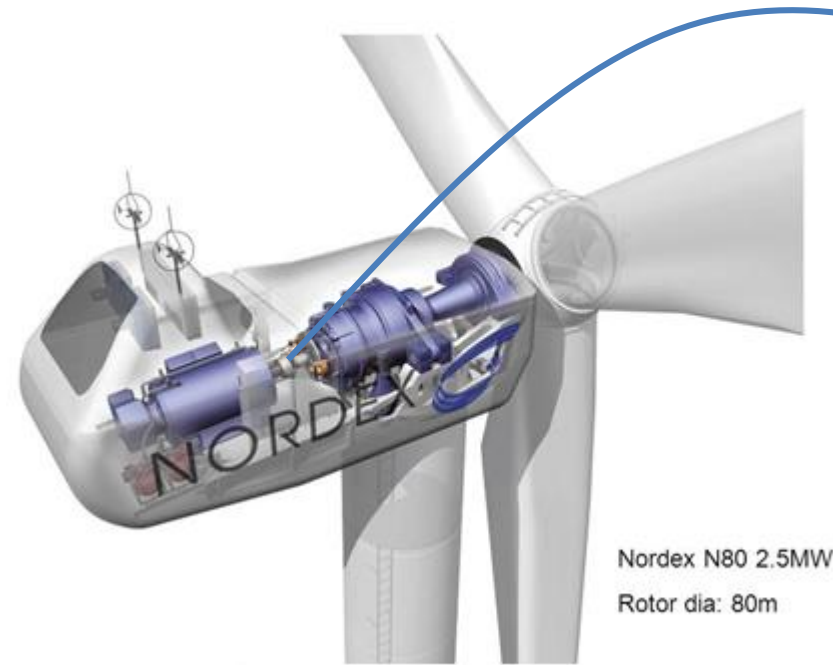
Μια άτρακτος κυκλικής διατομής υπόκειται σε στρέψη όταν καταπονείται από ζεύγος ροπών στρέψης M_t και M'_t στα άκρα της.



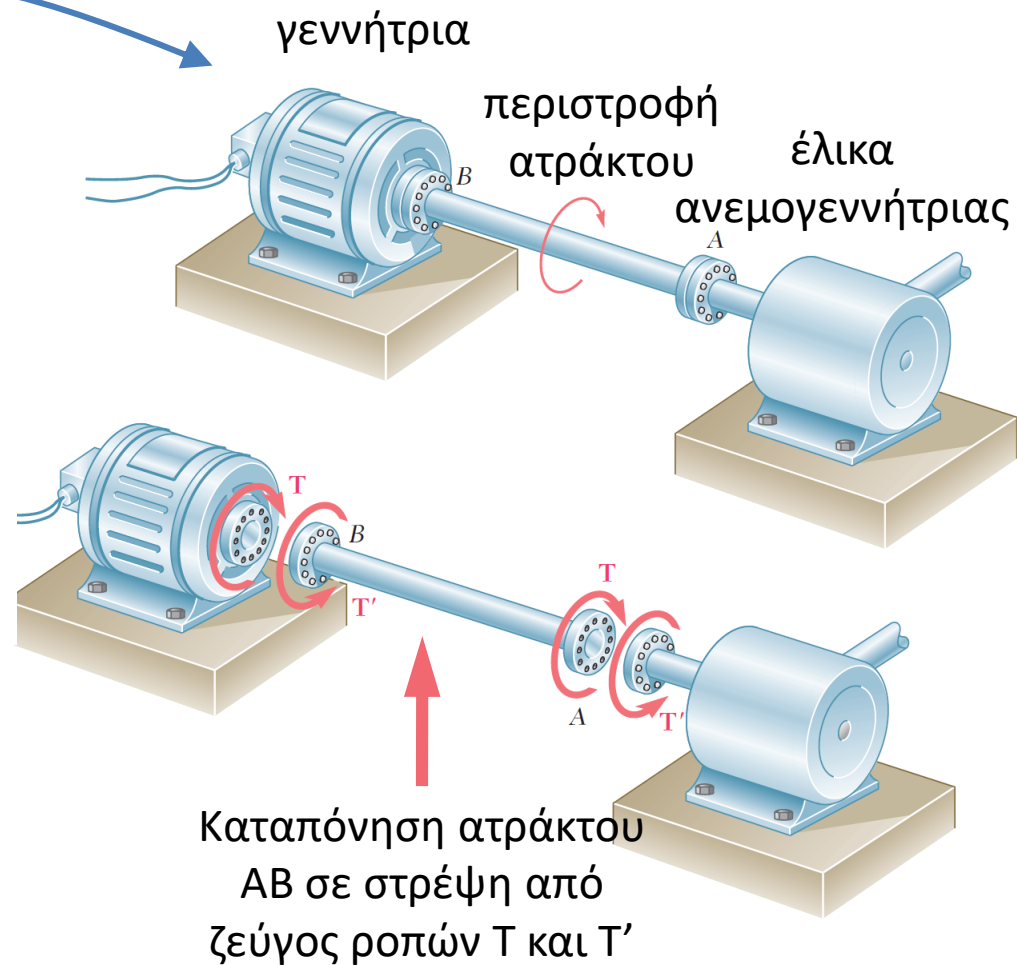
*Όταν μια κυκλική άτρακτος υπόκειται σε στρέψη, κάθε εγκάρσια διατομή παραμένει επίπεδη και απαραμόρφωτη.

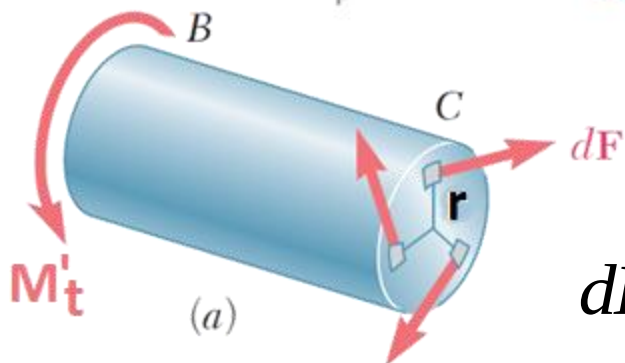
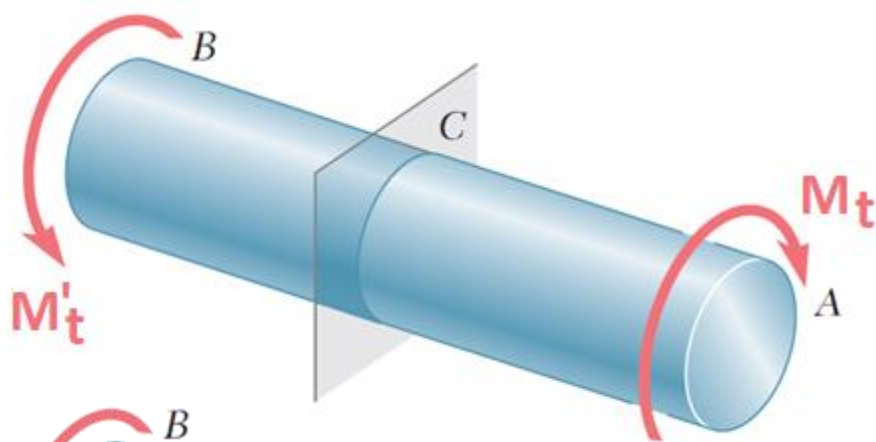
Ισοδυναμοί τρόποι απεικόνισης
της ροπής στρέψης

Παράδειγμα στρέψης ατράκτου



Ανεμογεννήτρια
Ισχύς 2.5MW
80 m διάμετρος έλικας



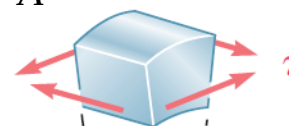
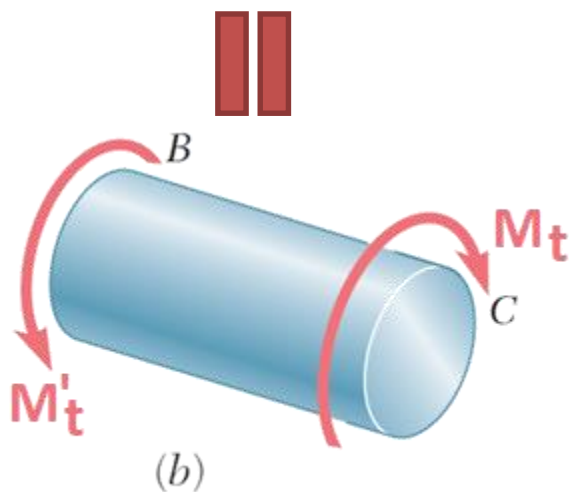


$$dF = \tau dA$$

$$0 \leq r \leq R$$

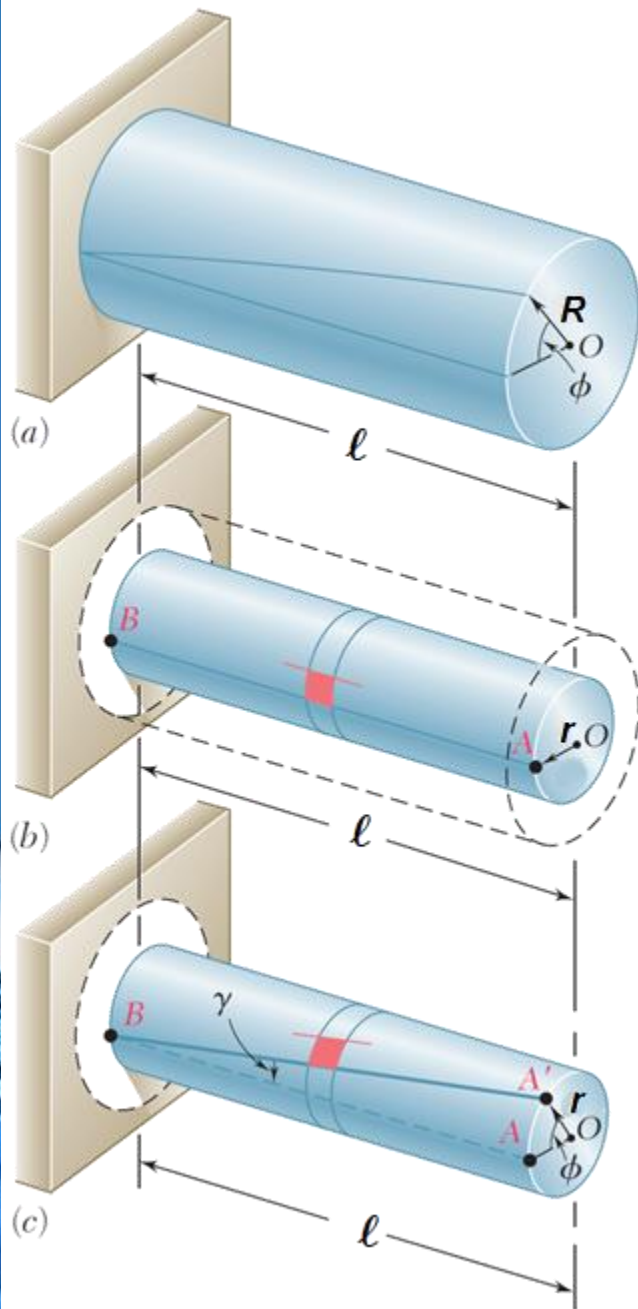
$$\int_A r dF = M_t$$

$$\Rightarrow \int_A r (\tau dA) = M_t$$

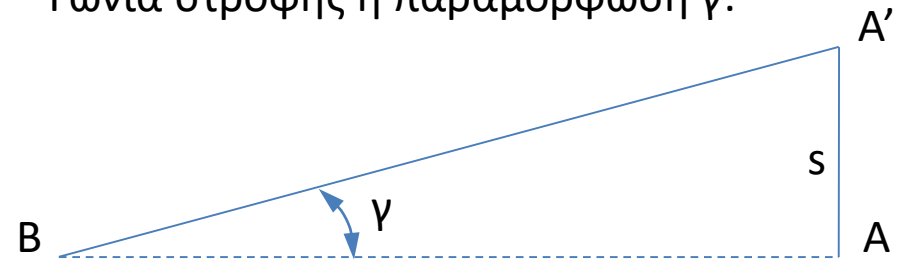


Άξονας της ατράκτου

Διατμητικές τάσεις σε στοιχειώδες κομμάτι της ατράκτου

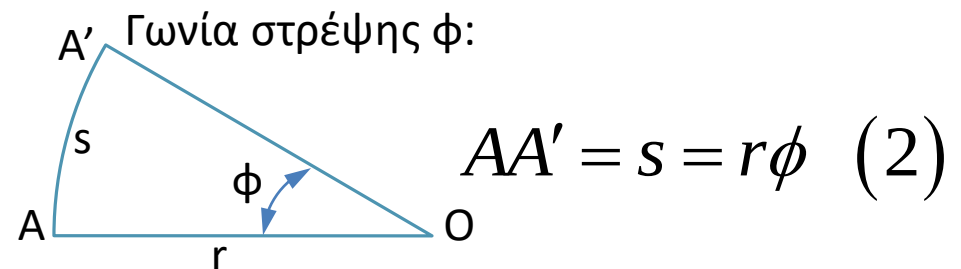


Γωνία στροφής ή παραμόρφωση γ :



$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{AA'}{AB} = \frac{s}{l} \quad (1)$$

Γωνία στρέψης ϕ :



$$AA' = s = r\phi \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \gamma = \frac{\phi}{l} r \quad (3)$$

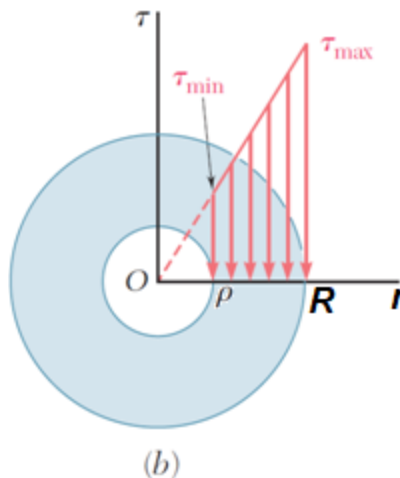
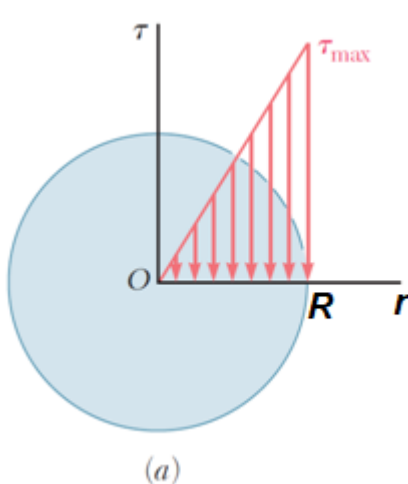
$$\gamma_{\max} = \frac{\phi}{l} R \Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_{\max}}{R} r \quad (4)$$

Τάσεις στην ελαστική περιοχή

Νόμος του **Hooke** για τη διατμητική τάση και τη διατμητική τροπή:

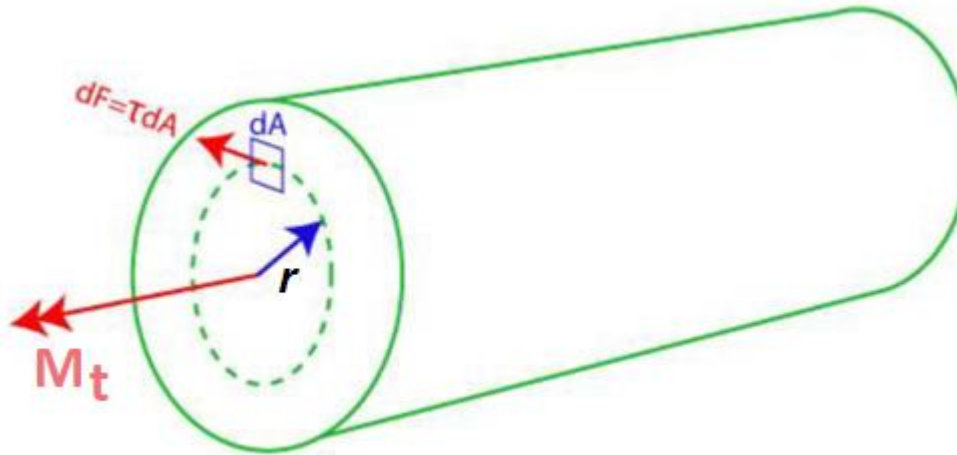
$$\boxed{\tau = G\gamma} \quad , \quad G \text{ το μέτρο διάτμησης ή ολίσθησης} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$(4) \Rightarrow \tau = \frac{r}{R} G \gamma_{\max} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{r}{R} \tau_{\max}} \quad (5)$$



$$\tau_{\min} = \frac{\rho}{R} \tau_{\max}$$

Τύποι της ελαστικής στρέψης



$$M_t = \int r dF = \int r \tau dA \stackrel{(5)}{=} \frac{\tau_{\max}}{R} \int r^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{R} I_p, \quad I_p \text{ η πολική ροπή αδράνειας}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_t R}{I_p} \quad (6)$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} \tau = \frac{r}{R} \tau_{\max} \Rightarrow \tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad (7)$$

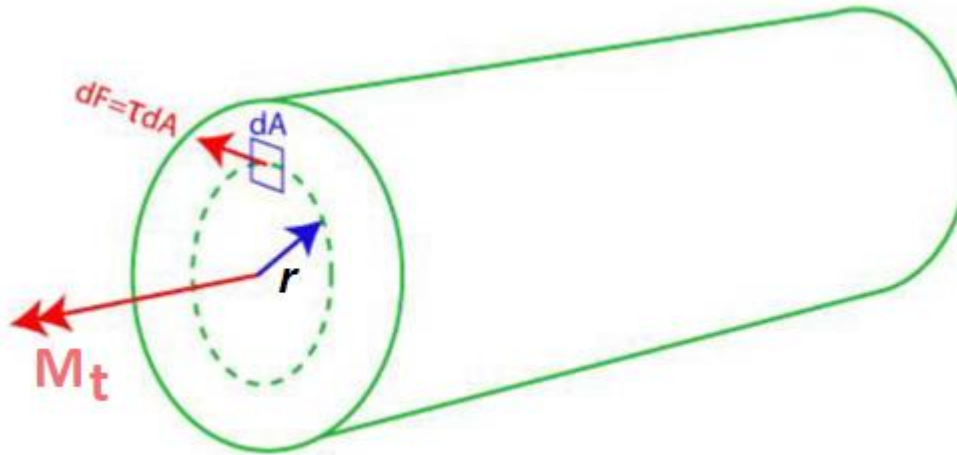
Για συμπαγή κυκλική διατομή:

$$I_p = \frac{1}{2} \pi R^4$$

Για κοίλη κυκλική διατομή:

$$I_p = \frac{1}{2} \pi R^4 - \frac{1}{2} \pi \rho^4 = \frac{1}{2} \pi (R^4 - \rho^4)$$

Τύποι της ελαστικής στρέψης



Διατμητική τάση τ και παραμόρφωση γ σε ράβδο κυκλικής διατομής
σε τυχαία ακτίνα r

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad , \quad \gamma = \frac{\phi}{l} r \quad , \quad 0 \leq r \leq R$$

Τύποι της ελαστικής στρέψης

Σχετική γωνία στροφής ϕ για δύο διαδοχικά σημεία A, B που απέχουν απόσταση λ

$$\phi = \frac{M_t l}{GI_p} \quad \text{ή} \quad \frac{\phi_B - \phi_A}{x_B - x_A} = \frac{M_t}{GI_p}$$

Ανηγμένη γωνία στροφής θ (σε rad/m)

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi}{l} = \frac{M_t}{GI_p}$$

Τύποι της ελαστικής στρέψης

Μέγιστη διατμητική τάση που παρατηρείται στην περιφέρεια της κυκλικής διατομής

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}$$

$$W_p = \frac{I_p}{R}$$

πολική ροπή αντίστασης

Για συμπαγή κυκλική διατομή:

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi R^3} = \frac{16M_t}{\pi D^3}, \quad \gamma_{\max} = \frac{\phi}{l} R$$

Διατμητική τάση τ σε τυχαία ακτίνα r :

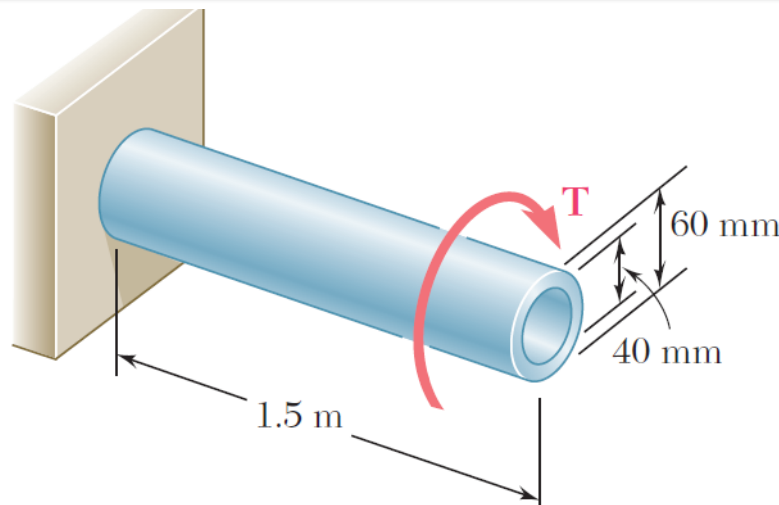
$$\tau = G\theta r, \quad \gamma = \theta r$$

όπου θ η ανηγμένη γωνία στροφή σε rad/m

Εφαρμογή 3.1

Μια κοίλη κυλινδρική άτρακτος από χάλυβα έχει μήκος 1.5 m και εσωτερική και εξωτερική διάμετρο 40 και 60 mm, αντίστοιχα.

- α) Ποιά είναι η μέγιστη ροπή στρέψης που μπορεί να εφαρμοστεί στην άτρακτο αν η διατμητική τάση δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 120 MPa;
- β) Ποιά είναι η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή της διατμητικής τάσης στην άτρακτο;



Εφαρμογή 3.1

α) Μέγιστη επιτρεπόμενη ροπή στρέψης:

$$(6) \Rightarrow T = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

$$\tau_{\max} = 120 \text{ MPa}, c_1 = \frac{40}{2} \times 10^{-3} \text{ m} = 0.02 \text{ m}, c_2 = \frac{60}{2} \times 10^{-3} \text{ m} = 0.03 \text{ m}$$

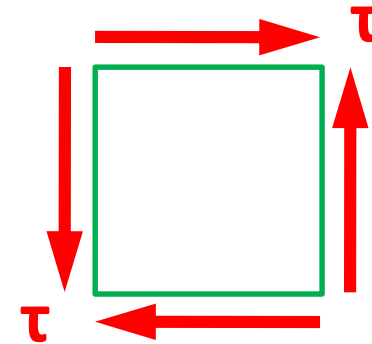
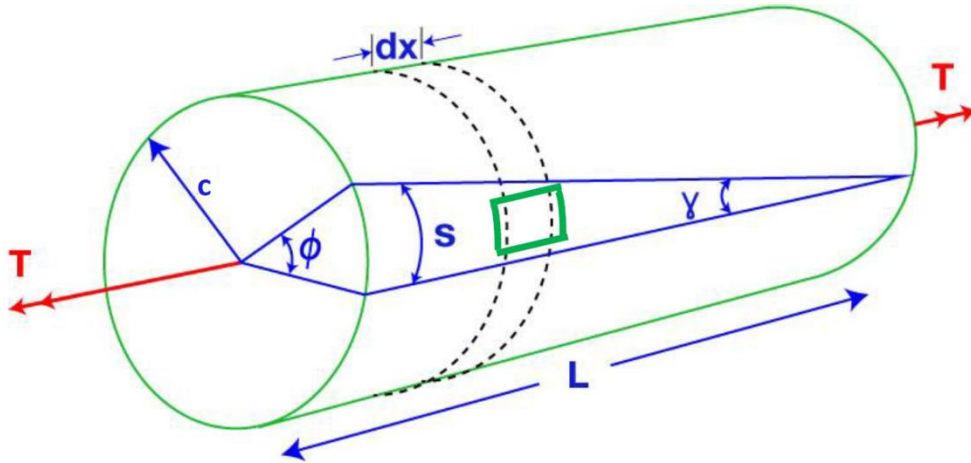
$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2} \pi (0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$T_{\varepsilon\pi} = \frac{\tau_{\max}}{c_2} J = \frac{(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}} (1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4) = 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

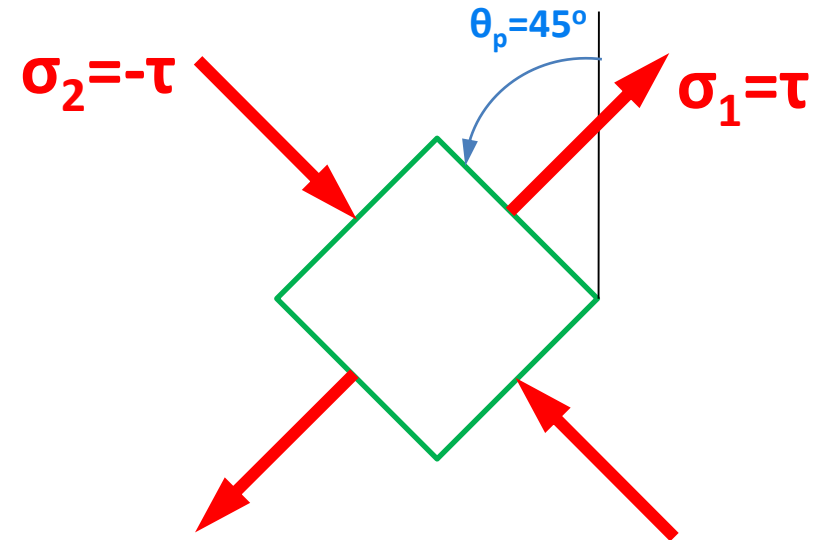
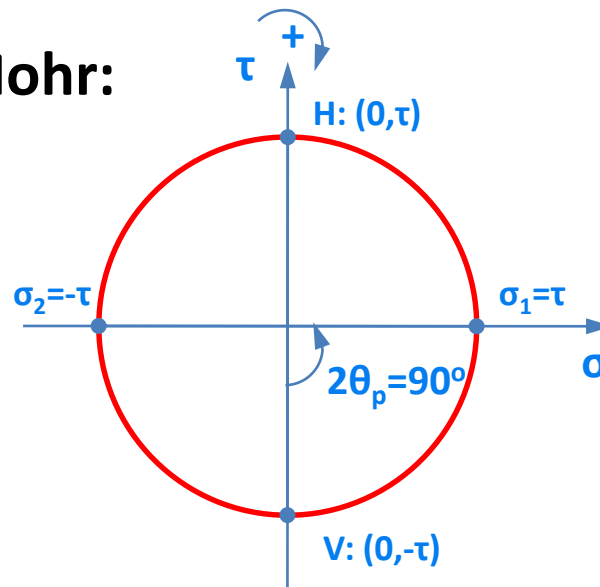
β) Ελάχιστη διατμητική τάση:

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}} 120 \text{ MPa} = 80 \text{ MPa}, \text{ στην εσωτερική επιφάνεια της ατράκτου}$$

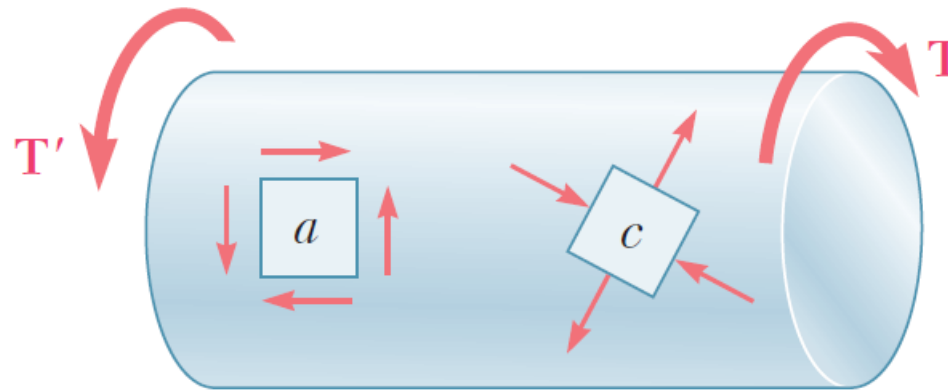
Εντατική κατάσταση στη στρέψη



Κύκλος του Mohr:

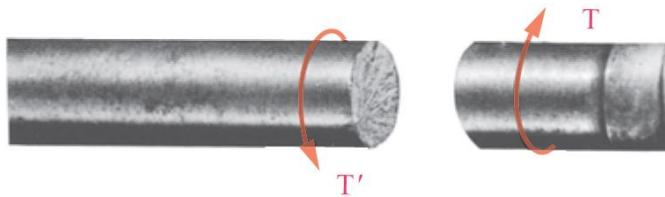


Θραύση υλικών λόγω στρέψης

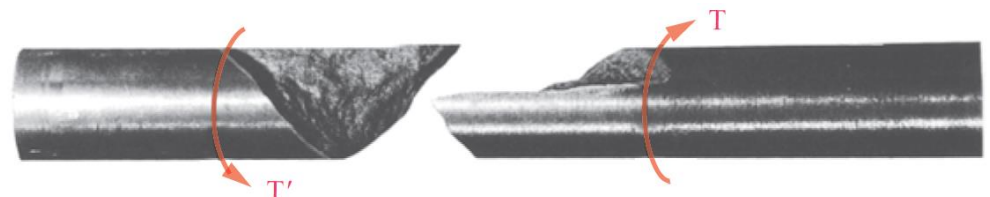


$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$

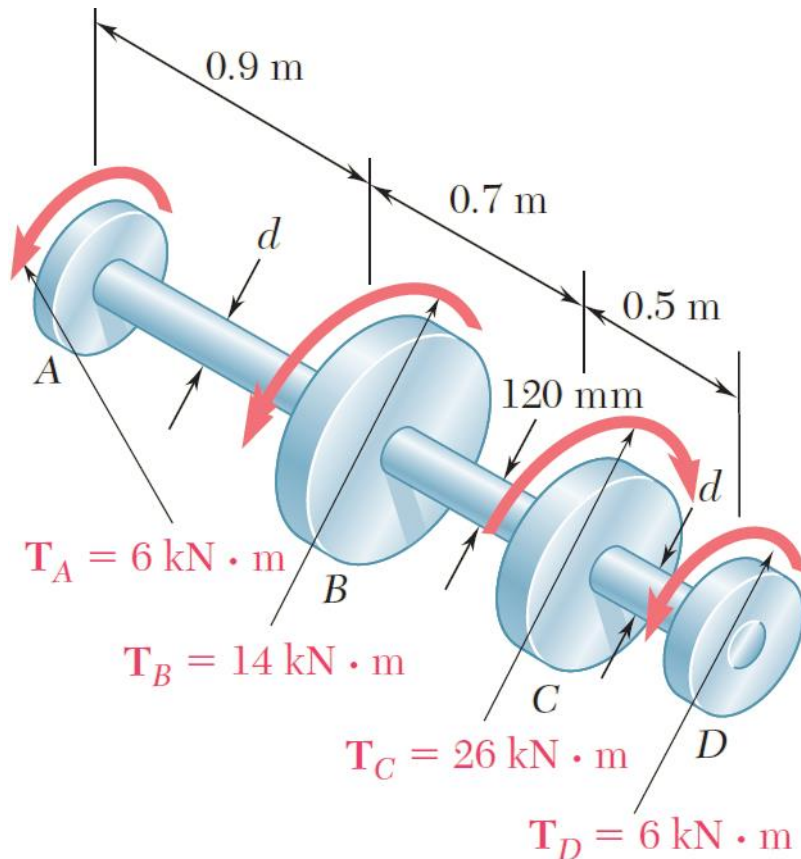


(α) όλκιμο υλικό
(θραύση λόγω διατμητικών τάσεων)



(β) ψαθυρό υλικό
(θραύση λόγω ορθών εφελκυστικών τάσεων)

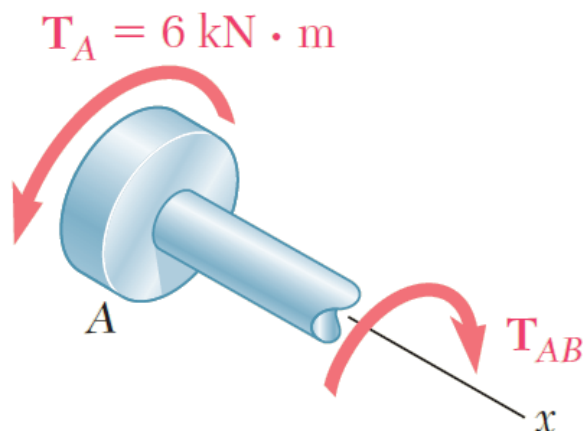
Εφαρμογή 3.2



Η άτρακτος BC είναι κοίλη με εσωτερική και εξωτερική διάμετρο 90 και 120 mm, αντίστοιχα. Οι άτρακτοι AB και CD είναι συμπαγείς με διάμετρο d . Για την εικονιζόμενη φόρτιση προσδιορίστε:

- τη μέγιστη και ελάχιστη διατμητική τάση στην άτρακτο BC,
- την απαιτούμενη διάμετρο d των ατράκτων AB και CD αν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση σε αυτές είναι 65 MPa.

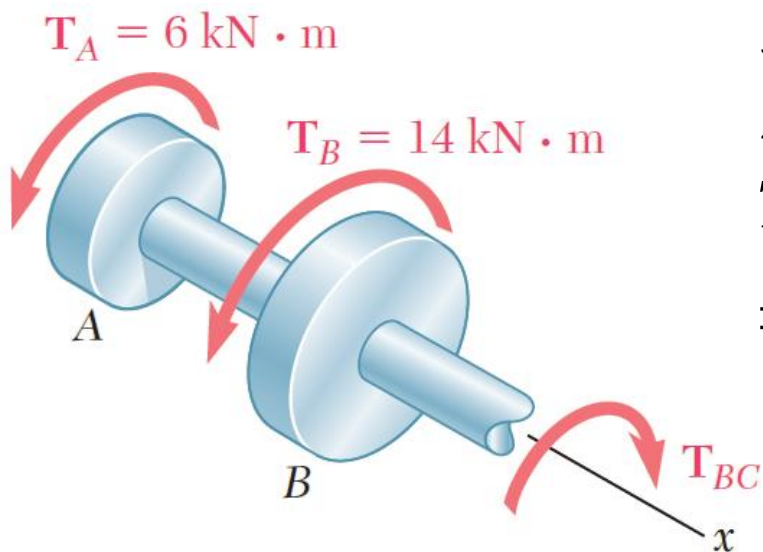
Εφαρμογή 3.2



$$\sum M_x = 0 : T_A - T_{AB} = 0$$

$$\Rightarrow T_{AB} = T_A$$

$$\Rightarrow T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



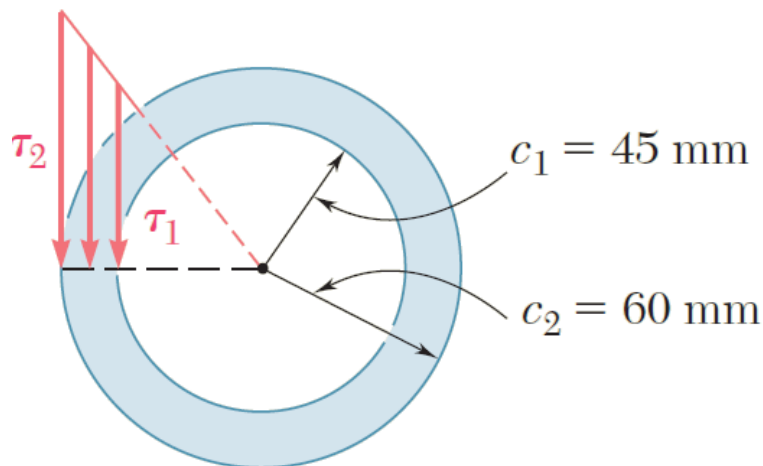
$$\sum M_x = 0 : T_A + T_B - T_{BC} = 0 \Rightarrow$$

$$T_{BC} = T_A + T_B = 6 \text{ kN} \cdot \text{m} + 14 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Εφαρμογή 3.2

α) Άτρακτος BC:



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} \pi (0.06^4 - 0.045^4)$$

$$\Rightarrow J = 13.92 \times 10^{-6} m^4$$

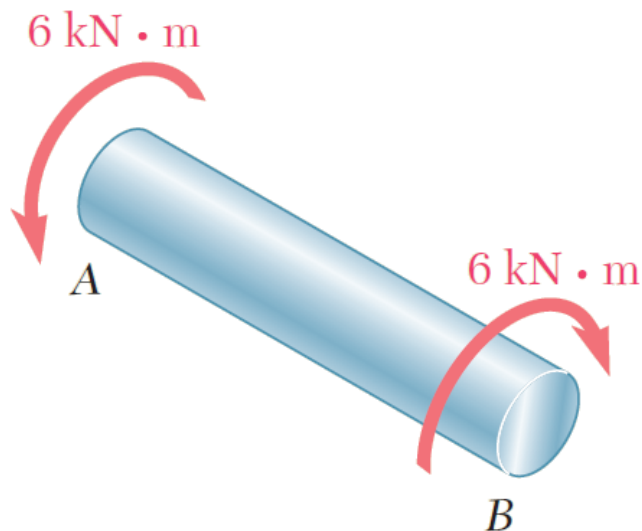
Μέγιστη και ελάχιστη διατμητική τάση:

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 kNm)(0.06 m)}{13.92 \times 10^{-6} m^4} = 86.2 MPa$$

$$\tau_{\min} = \tau_1 = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max} = \frac{0.045 m}{0.06 m} 86.2 MPa = 64.7 MPa$$

Εφαρμογή 3.2

β) Άτρακτοι AB και CD:



$$\tau_{all} = 65 \text{ MPa}$$

$$T_{AB} = T_{CD} = T = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$d_{AB} = d_{CD} = d = 2c$$

$$J_{AB} = J_{CD} = J = \frac{1}{2} \pi c^4$$

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kNm})c}{\frac{1}{2} \pi c^4} \Rightarrow c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

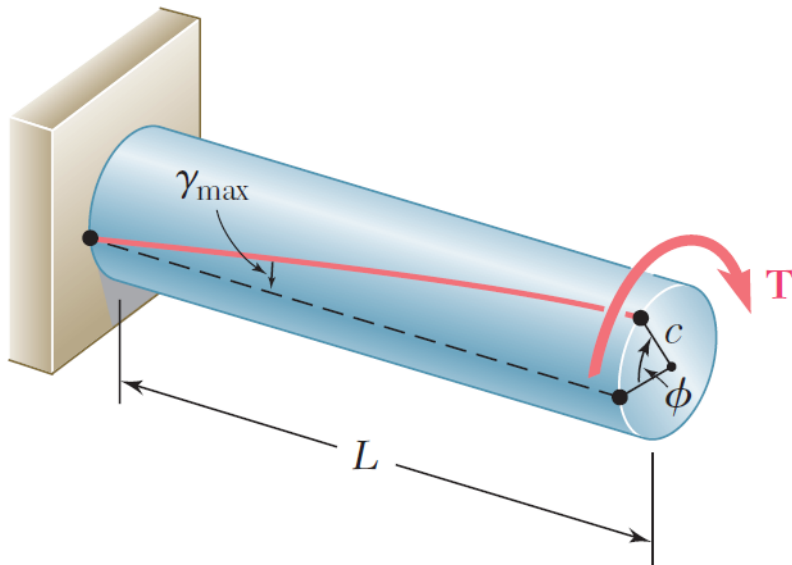
$$\Rightarrow c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow d = 77.8 \text{ mm}$$

Γωνία στρέψης στην ελαστική περιοχή

Γεωμετρική σχέση: $\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$ (α)

Νόμος Hooke : $\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$ (β)

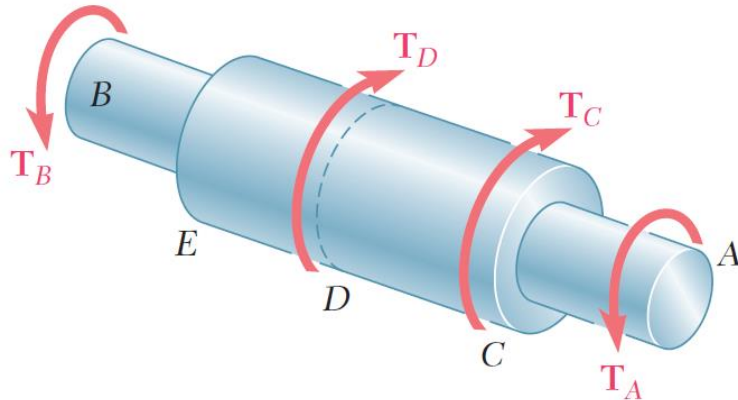
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$



**Η γωνία στρέψης ϕ είναι ανάλογη της ροπής στρέψης T που εφαρμόζεται στην άτρακτο.*

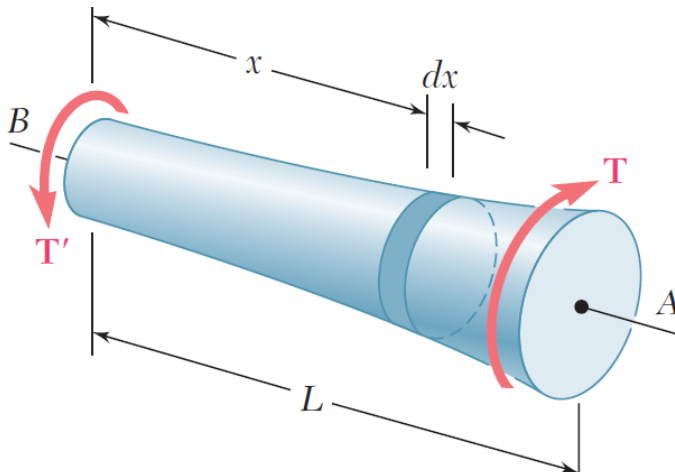
Ομογενής άτρακτος (G =σταθερό), με ομοιόμορφη εγκάρσια κυκλική διατομή σε στρέψη.

Γωνία στρέψης στην ελαστική περιοχή



$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

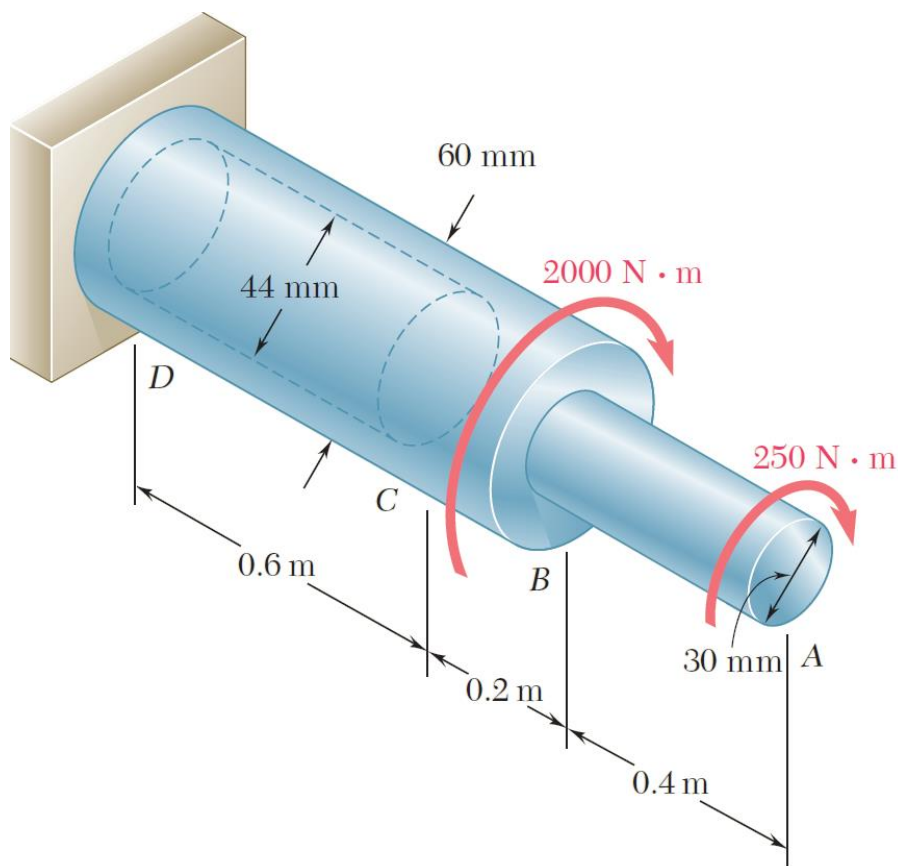
Μη ομογενής άτρακτος, με πολλαπλές διαστάσεις εγκάρσιων κυκλικών διατομών και πολλαπλά φορτία.



$$d\phi = \frac{Tdx}{JG} \Rightarrow \phi = \int_0^L \frac{Tdx}{JG}$$

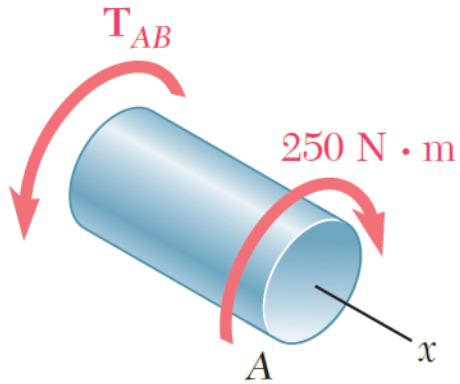
Άτρακτος με μεταβλητή εγκάρσια κυκλική διατομή υπό ροπή στρέψης.

Εφαρμογή 3.3



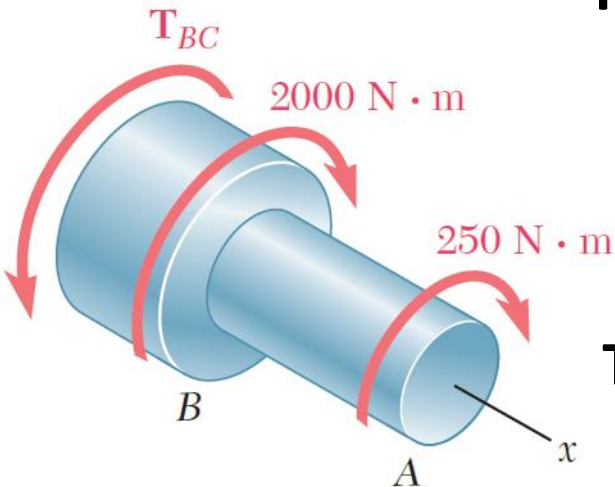
Η πακτωμένη άτρακτος AD του σχήματος υπόκειται στις εικονιζόμενες ροπές στρέψης. Το τμήμα CD της ατράκτου είναι κοίλο με εσωτερική διάμετρο 44 mm. Γνωρίζοντας ότι ολόκληρη η άτρακτος είναι από χάλυβα με $G=77 \text{ GPa}$, να προσδιορίσετε τη γωνία στρέψης στο άκρο A.

Εφαρμογή 3.3



Τομή μεταξύ τμήματος AB της ατράκτου:

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0: T_{AB} - 250 \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \\ \Rightarrow T_{AB} &= 250 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$



Τομή μεταξύ τμήματος BC της ατράκτου:

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0: T_{BC} - 2000 \text{ Nm} - 250 \text{ Nm} = 0 \\ \Rightarrow T_{BC} &= 2250 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

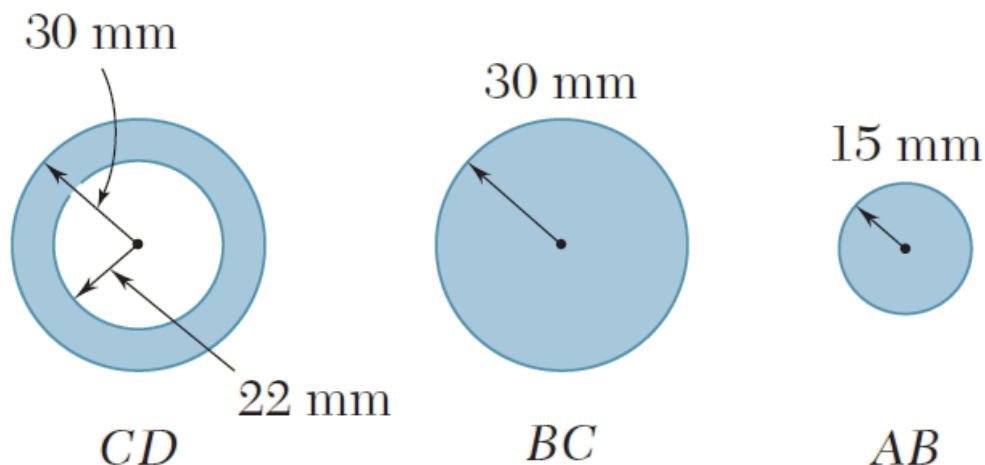
Τομή μεταξύ τμήματος CD της ατράκτου:

Μεταξύ των τομών στα σημεία C και D της ατράκτου δεν ασκείται καμία εξωτερική ροπή στρέψης, επομένως ισχύει:

$$T_{CD} = T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Εφαρμογή 3.3

Πολικές ροπές αδρανείας:



$$J_{CD} = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2} \pi (0.03^4 - 0.022^4) = 0.904 \times 10^{-6} m^4$$

$$J_{BC} = \frac{1}{2} \pi C^4 = \frac{1}{2} \pi (0.03m)^4 = 1.272 \times 10^{-6} m^4$$

$$J_{AB} = \frac{1}{2} \pi C^4 = \frac{1}{2} \pi (0.015m)^4 = 0.0795 \times 10^{-6} m^4$$

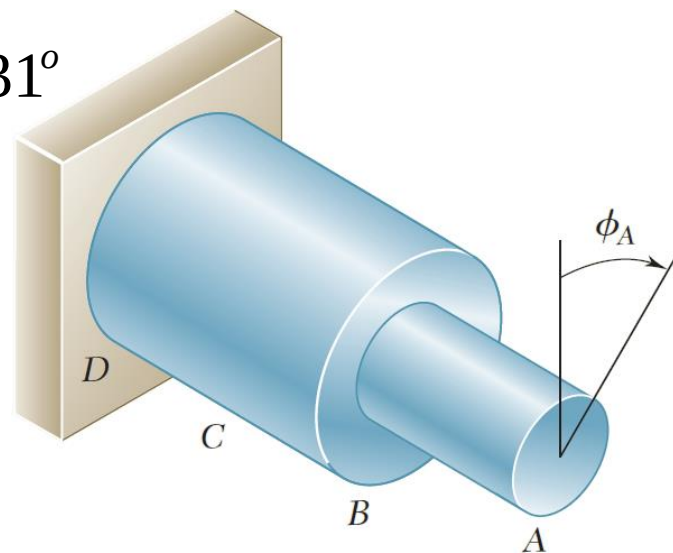
Εφαρμογή 3.3

Γωνία στρέψης:

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} = \frac{1}{G} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right)$$

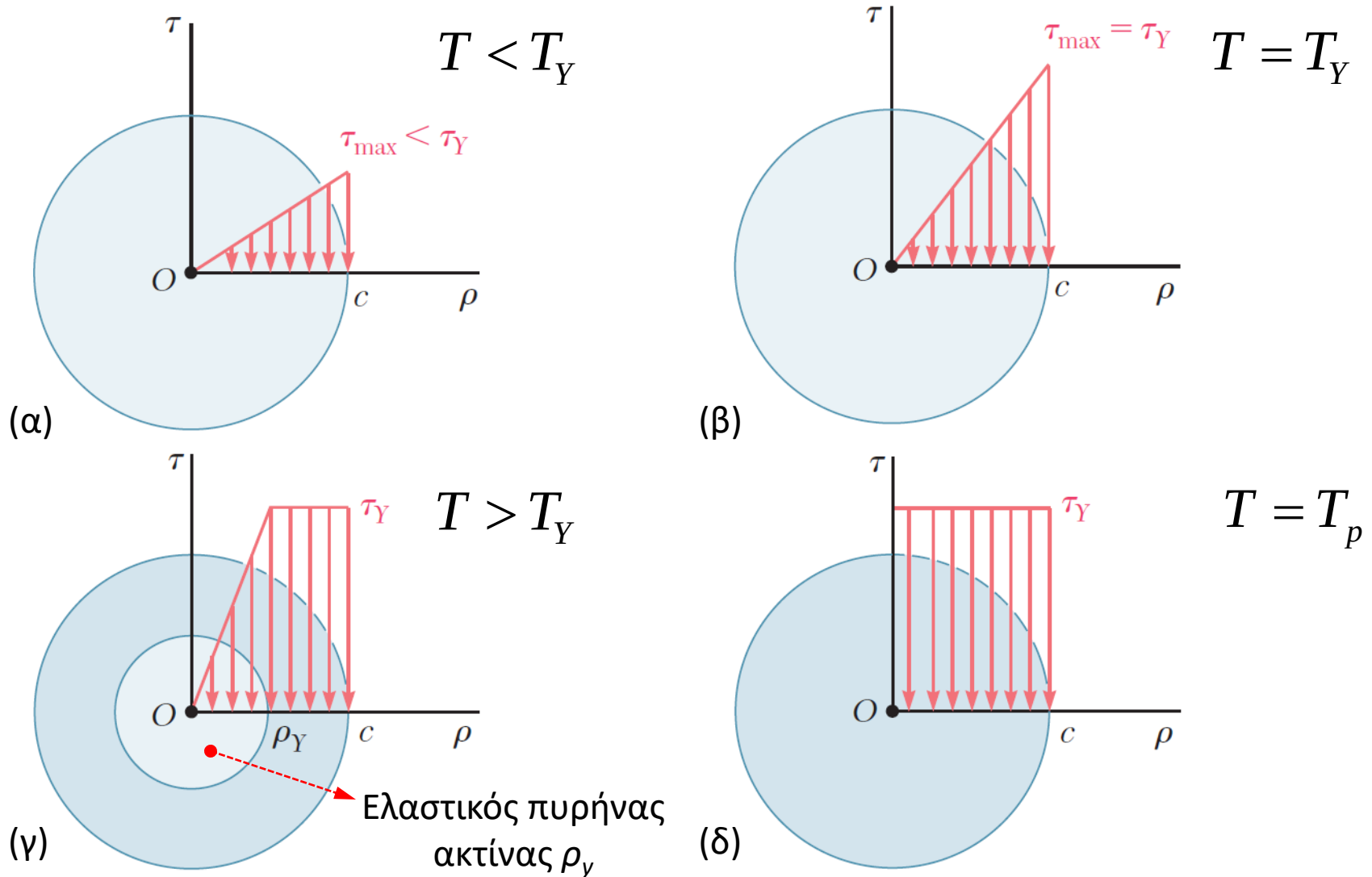
$$\Rightarrow \phi_A = \frac{1}{77} \left(\frac{250 \cdot 0.4}{0.0795 \times 10^{-6}} + \frac{2250 \cdot 0.2}{1.272 \times 10^{-6}} + \frac{2250 \cdot 0.6}{0.904 \times 10^{-6}} \right)$$

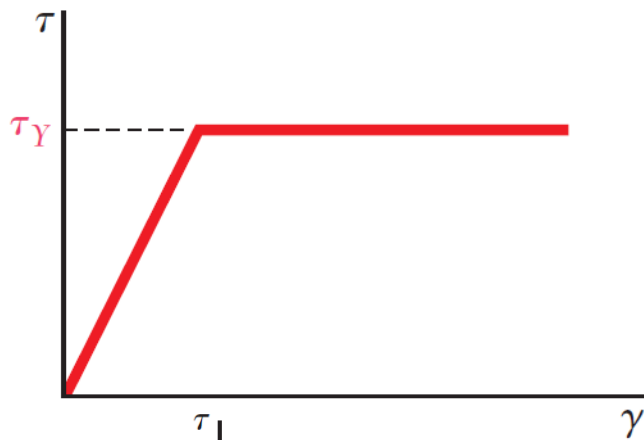
$$\Rightarrow \phi_A = 0.0403 \text{ rad} = 0.0403 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 2.31^\circ$$



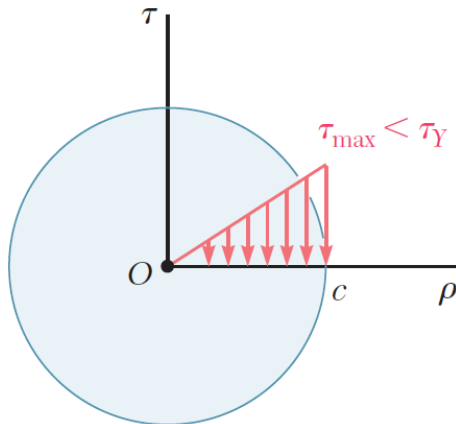


Κατανομές διατμητικής τάσης ανάλογα το μέγεθος της εσωτερικής ροπής στρέψης



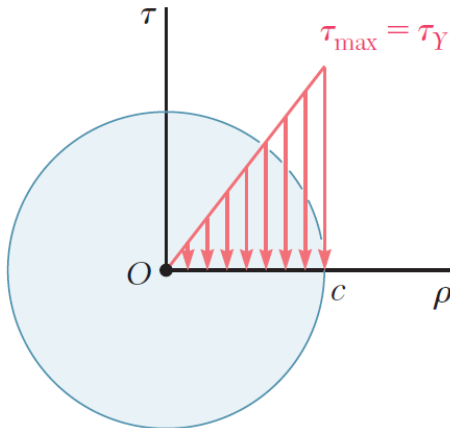


Ιδανικό ελαστοπλαστικό υλικό



Τύποι της ελαστικής στρέψης:

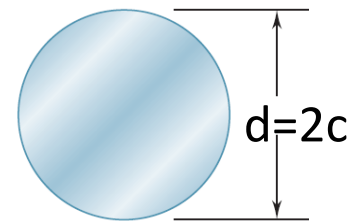
$$T < T_Y \quad \tau = \frac{T\rho}{J}, \quad \tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

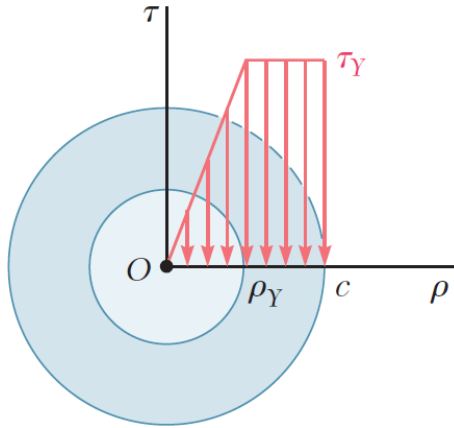


Μέγιστη ελαστική ροπή στρέψης:

$$T = T_Y = \frac{J}{c} \tau_Y, \quad \gamma \leq \gamma_Y$$

$$\text{για } J = \frac{1}{2} \pi c^4 \Rightarrow T_Y = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_Y$$



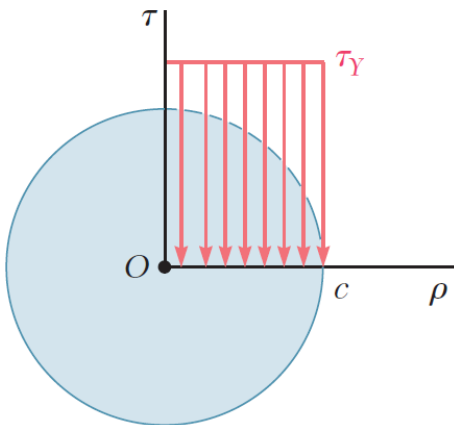


Ελαστικός πυρήνας ακτίνας ρ_Y :

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right) > T_Y,$$

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho, \quad \text{για } 0 \leq \rho \leq \rho_Y \text{ (ελαστικός πυρήνας)}$$

$$\tau = \tau_Y, \quad \text{για } \rho_Y < \rho \leq c \text{ (πλαστική ζώνη)}$$



Πλαστική ροπή στρέψης:

$$T = T_p = \frac{4}{3} T_Y$$