

Ιερώνη:

Συνθήκες αγκύρωσης:

$z_{επ}, \theta_{επ}$

$$z \leq z_{επ}, \theta \leq \theta_{επ}$$

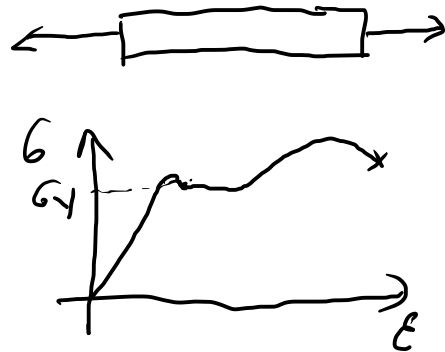
$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \text{ η αλληλεπιδράση για τα ερπώδη}$$

π.χ. χάλυβας $\theta_{επ} \approx 0,25^\circ/m$

$z_{επ} = (0,55 \text{ έως } 0,8) G_{επ}$
για ολκιρά υλικά

$$G_{επ} \sim f^p(k, G_y)$$

↑
ανθεκτική
αγωγιμότητα



• Για δεδομένο υλικό G και για δεδομένη διαστολή I_p
δίνω για z_{EP} , θ_{EP} ως προς M_t

$z_{EP} \leadsto M_t$ (επιλέγω τη μικρότερη από τις δύο M_t)

$\theta_{EP} \leadsto M_{t2}$ πρόβλημα υπολογισμού φορτίκωνόζητας αεράκτου σε
εξέλιξη $\rightarrow$ να δίνει την M_{tmax} που μπορεί να
παραλάβει η αεράκτος με ασφάλεια.

• Πρόβλημα διαστασιολόγησης

γινώσκω z_{EP} , θ_{EP} , $M_t \leadsto$ υπολογίζω τη διάμετρο της αεράκτου
έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες
αυτοχής: $z \leq z_{EP}$ και $\theta \leq \theta_{EP}$

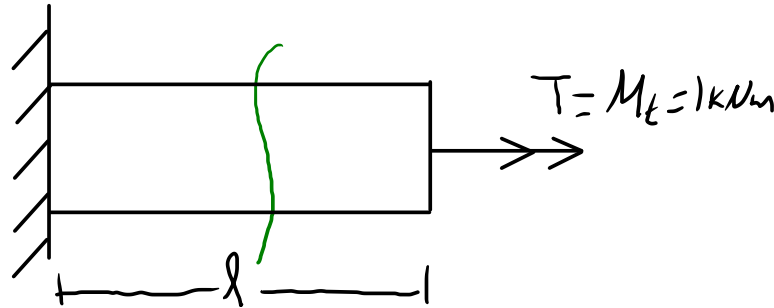
Παράδειγμα 7.1 (Βομβόυνης)

Αξονικός ρόλος $l = 1,5 \text{ m}$ κυκλικής διατομής ακτίνας $R = 50 \text{ mm}$ καταρτίζεται από ροπή στρέψης $M_t = 1 \text{ kNm}$. Ζητούνται:

$$(G = 85 \text{ GPa})$$

- Η μέγιστη διατμητική τάση
- Η βωολική γωνία στρέψης

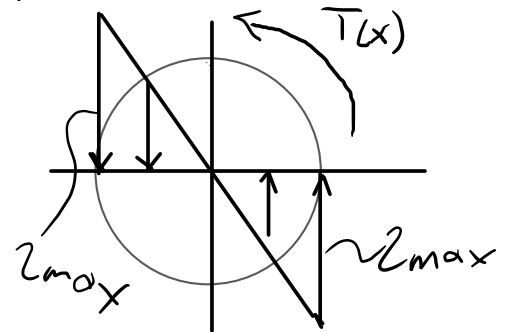
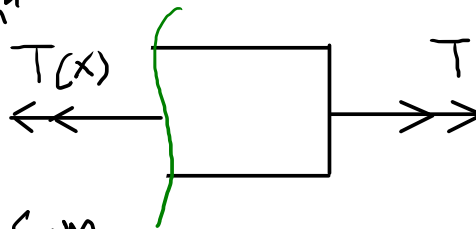
Εξ. ισορ. $-T(x) + T = 0 \Rightarrow T(x) = T = 1 \text{ kNm}$



$$\tau_{\max} = \frac{|T(x)| R}{I_p} = \frac{1 \text{ kNm} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{9,81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$I_p = \frac{1}{2} \pi R^4 = 9,81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

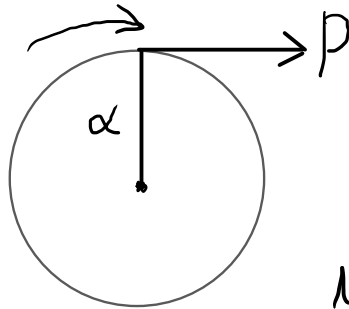
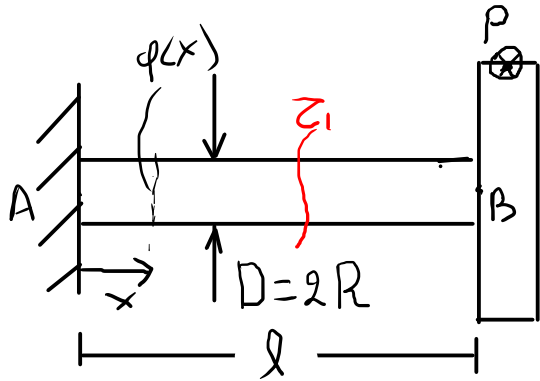
$$\Rightarrow \tau_{\max} = 5 \cdot 10^3 \text{ kPa} = 5 \text{ MPa}$$



$$\phi = \frac{T \cdot l}{G I_p} = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 1,5 \text{ m}}{85 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 9,81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = 0,0018 \text{ rad}$$

Παράδειγμα 7.2 (βιβλ. Βουδούνης)

Στο ελεύθερο άκρο άξονα μήκους $l = 60 \text{ cm}$, είναι συγκολλημένο κυκλικός δίσκος ακτίνας $\alpha = 50 \text{ cm}$ στον οποίο δρα εφαπτομενική δύναμη $P = 2 \text{ kN}$. Ζητούνται: η ελάχιστη διάμετρος του άξονα και το διάγραμμα μεταβολής της γωνίας στρέψης φ . Δίνονται $G = 85 \text{ GPa}$ και $\tau_{\text{επ}} = 18 \text{ MPa}$.



Ροπή στρέψης $M_t = P \cdot \alpha$
 $\Rightarrow M_t = 2 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 1 \text{ kNm}$

Συνθήκη αντοχής: $\tau_{\text{max}} \leq \tau_{\text{επ}}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_t R}{I_p} &\leq \tau_{\text{επ}} \\ I_p &= \frac{1}{2} \pi R^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2 M_t}{\pi R^3} \leq \tau_{\text{επ}}$$

$$\Rightarrow R \geq \sqrt[3]{\frac{2 M_t}{\pi \cdot \tau_{\text{επ}}}}$$

$$R_{\text{min}} = 3,28 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$D_{\text{min}} = 2 R_{\text{min}} = 6,56 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$I_p = \frac{1}{2} \pi 0,0328^4 = 1,818 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

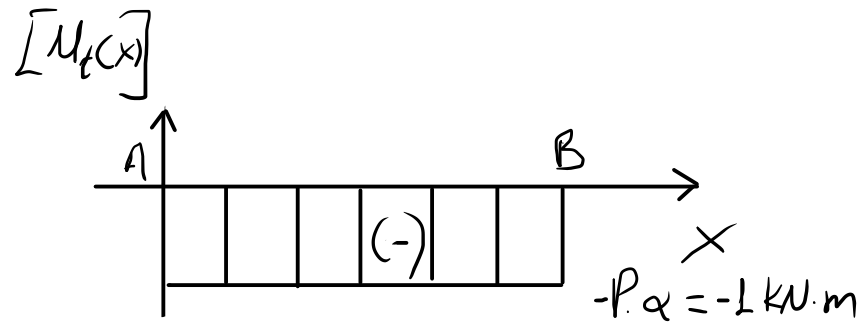
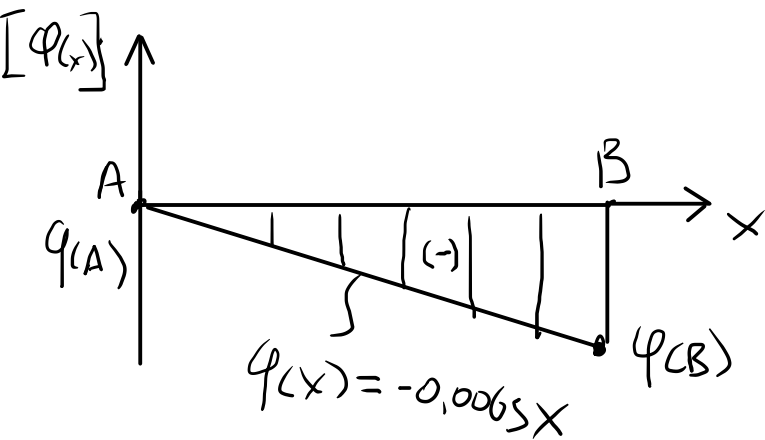
Μεταβολή ροπής: $M_{tA} - M_t = 0 \Rightarrow M_{tA} = M_t = 1 \text{ kNm}$

Μεταβολή ροπής: $M_{tA} + M_t(x) = 0 \Rightarrow M_t(x) = -M_{tA} = -1 \text{ kNm}$

$\Sigma \delta \alpha \pi \acute{o} \tau \alpha \mu \chi \alpha \pi \acute{o} \tau \omega \pi \acute{\alpha} \kappa \tau \omega \mu \alpha \text{ A } \approx \text{ για } \epsilon \rho \omega \phi \acute{\alpha} \varsigma \text{ είναι } \varphi(x)$

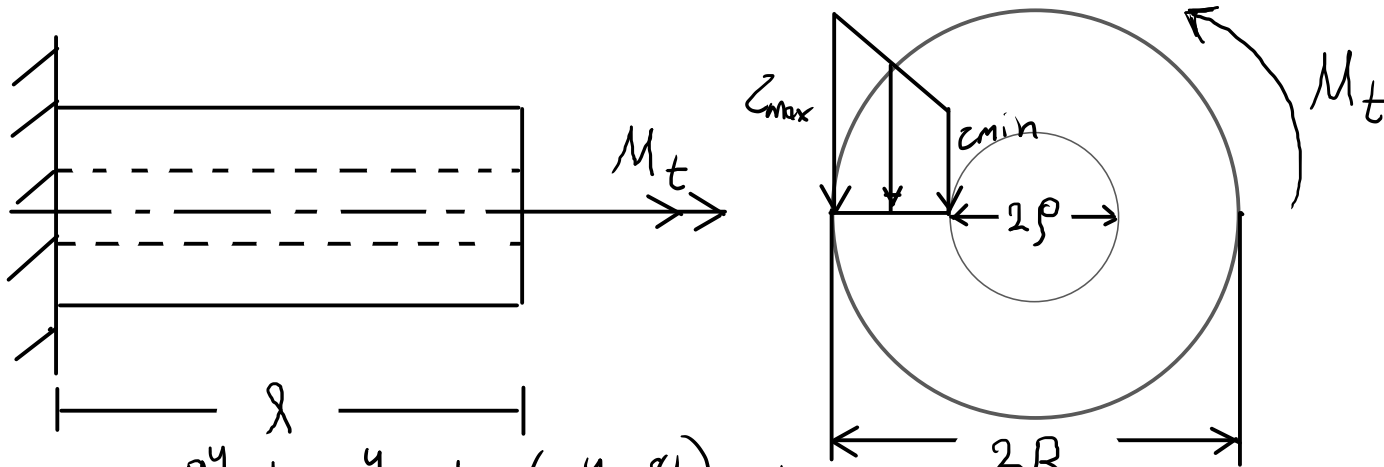
$$\frac{\varphi(x) - \varphi_A}{x - x_A \rightarrow 0} = \frac{M_t(x)}{G I_P} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{M_t(x)}{G I_P} x = \frac{-20^3 \text{ Nm}}{85 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1,818 \text{ m}^4} x = -0,0065 x$$

$$\varphi(x) = -0,0065 x \quad \left| \begin{array}{l} \text{A: } x=0, \varphi(0)=0 \\ \text{B: } x=l=0,6, \varphi(B) = -0,0065 \cdot 0,6 = -0,0039 \end{array} \right.$$



Παράδειγμα 7.3

Ζητείται η εξωτερική ακτίνα R και η εσωτερική ρ ράβδου γωληνοειδούς διατομής, μήκους $l = 2\text{m}$, αν η ροπή στρέψης είναι $M_t = 20\text{ kN}\cdot\text{m}$.
Δίνονται $R = 4\rho$, $G = 85\text{ GPa}$, $\Theta_{\text{επ}} = 0,25^\circ/\text{m}$, $\tau_{\text{επ}} = 50\text{ MPa}$.



$$I_p = \frac{1}{2} \pi R^4 - \frac{1}{2} \pi \rho^4 = \frac{1}{2} \pi (R^4 - \rho^4) = \frac{1}{2} \pi ((4\rho)^4 - \rho^4) = \frac{1}{2} \pi (255\rho^4) \approx 400,6\rho^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t R}{I_p} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{400,6\rho^4} \cdot 4\rho = \frac{20 \cdot 10^3}{100,15} \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\Theta = \frac{M_t}{G I_p} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{85 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 400,6\rho^4 \text{ m}^4} = \frac{10^{-6}}{1702,55\rho^4} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

Συνθήκες αεροχώνης:

$$\left. \begin{aligned} z_{\max} &\leq z_{\varepsilon\pi} = 50 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ \theta &\leq \theta_{\varepsilon\pi} = 0,25^\circ/\text{m} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{20 \cdot 10^3}{100,15} \frac{1}{\rho^3} &\leq 50 \cdot 10^6 \\ \frac{10^{-6}}{1702,55} \frac{1}{\rho^4} &\leq \frac{0,25\pi}{180} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho &\geq 0,016 \text{ m} \\ \rho &\geq 0,036 \text{ m} \end{aligned}$$

$$A = \pi R^2 - \pi \rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi(16\rho^2 - \rho^2) = 15\rho^2$$

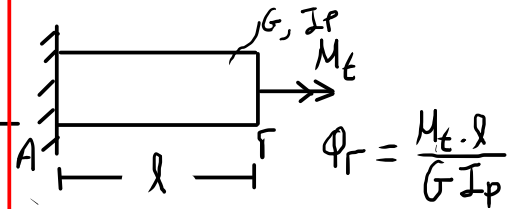
• Εάν $\rho = 0,016 \text{ m}$ τότε $\theta > \theta_{\varepsilon\pi}$ δεν ικανοποιείται η 2^η συνθήκη αεροχώνης

• Εάν $\rho = 0,036 \text{ m}$ τότε ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες αεροχώνης

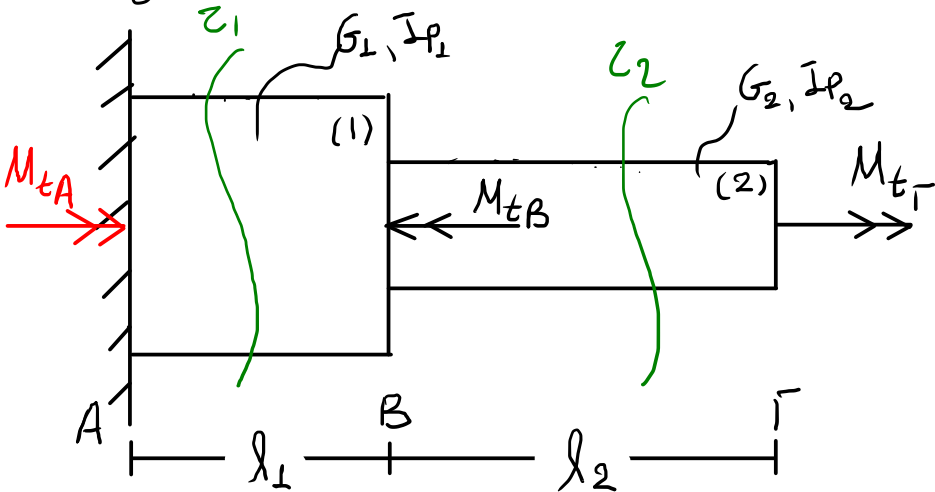
$$\text{Επιλέγω } \rho = 3,6 \text{ cm} \Rightarrow R = 4\rho = 14,4 \text{ cm}$$

Στροφή κυκλικής μεταβλητής διατομής:

ΠΡΟΒΛΕΨΤΙΚΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΕΔΙΟΣ



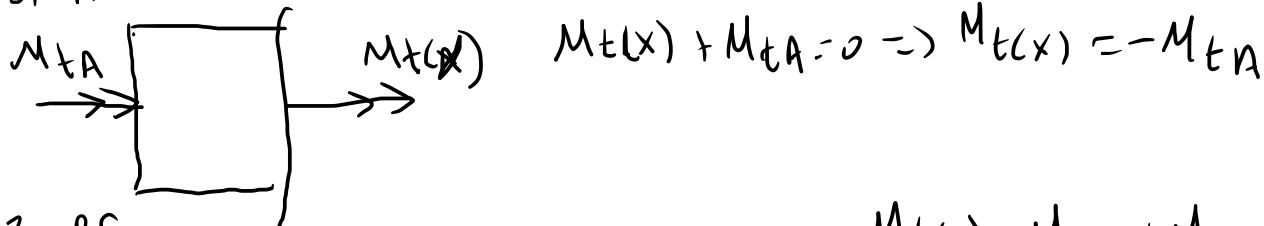
Στροφή σε κατά επιφάνεια βραδεία κυκλική διατομή:



$$M_{tA} - M_{tB} + M_{t\Gamma} = 0$$

$$\Rightarrow M_{tA} = M_{tB} - M_{t\Gamma}$$

$z_1: AB$

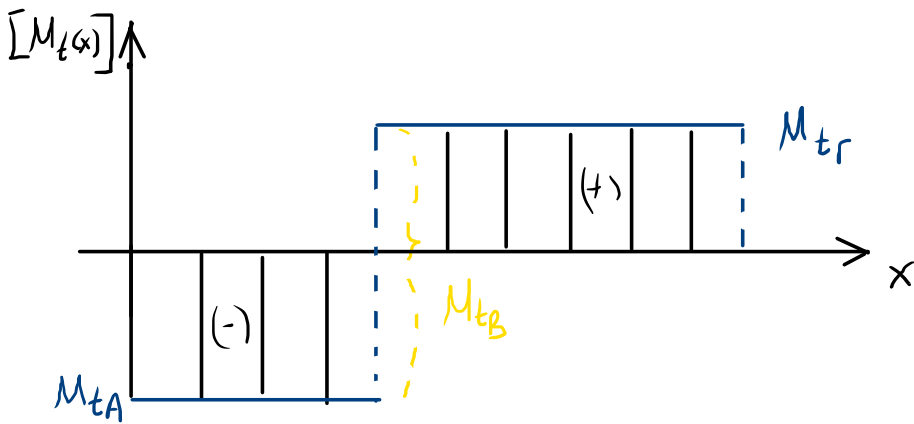


$z_2: B\Gamma$



$$M_t(x) - M_{tB} + M_{tA} = 0$$

$$\Rightarrow M_t(x) = M_{tB} - M_{tA} = M_{t\Gamma}$$



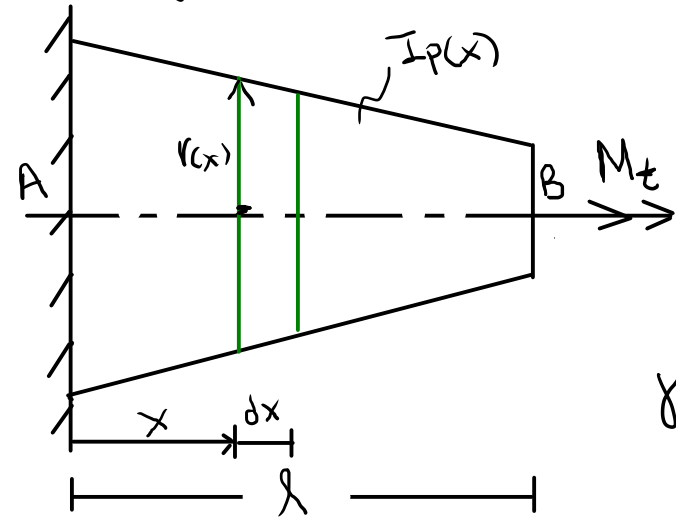
$$\begin{aligned}\phi_r &= \phi_{r/A} = \phi_r - \phi_A^{\nearrow 0} = (\phi_r - \phi_B) + (\phi_B - \phi_A) = \phi_{r/B} + \phi_{B/A} = \\ &= \frac{M_{tBC} \cdot l_{BC}}{G_B \bar{I}_{PB}} + \frac{M_{tAB} \cdot l_{AB}}{G_{AB} \bar{I}_{PAB}}\end{aligned}$$

$$M_{tBC} = M_{tr}, \quad G_{BC} = G_2, \quad \bar{I}_{PBC} = \bar{I}_{P_2}$$

$$M_{tAB} = -M_{tA}, \quad G_{AB} = G_1, \quad \bar{I}_{PAB} = \bar{I}_{P_1}$$

$$\begin{aligned}AB: \quad Z_{\max}^{(1)} &= \frac{M_t^{(1)} R_1}{I_{P_1}} \\ BC: \quad Z_{\max}^{(2)} &= \frac{M_t^{(2)} R_2}{I_{P_2}}\end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max(Z_1, Z_2) \leq Z_{\lim} \\ \text{EaV } \dot{\epsilon} \text{ Xofto} \\ z_0 \text{ idio} \\ v \lambda \text{ ikio} \\ G_1 = G_2 \end{array} \right.$$

Στροφή ράβδου μεταβλητής διατομής:



$$z(x) = \frac{M_t(x) \cdot r(x)}{I_P(x)} = \frac{M_t(x)}{W_P(x)}$$

$$W_P(x) = \frac{I_P(x)}{r(x)} \quad \text{πολική ροπή αντιστάσεως}$$

$$\text{για κυκλική διατομή } I_P(x) = \frac{1}{2} \pi r^4(x)$$

$$\Rightarrow W_P(x) = \frac{1}{2} \pi r^3(x)$$

$$z(x) = \frac{2 M_t(x)}{\pi r^3(x)}$$

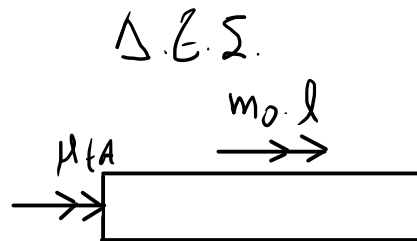
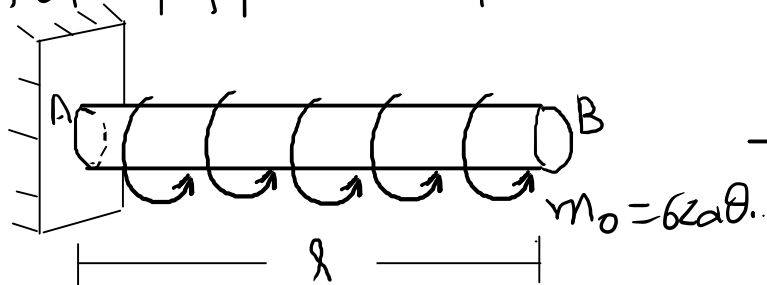
Εάν $M_t(x) = M_t = \text{const}$. τότε $\max(z(x)) \rightarrow r(x)$ μίν. οτιότες στο σημείο B είναι η κριτική διατομή

$$d\varphi = \frac{M_t(x)}{G I_P(x)} dx$$

στο σημείο B: $\varphi_B = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_t}{G I_P(x)} dx$

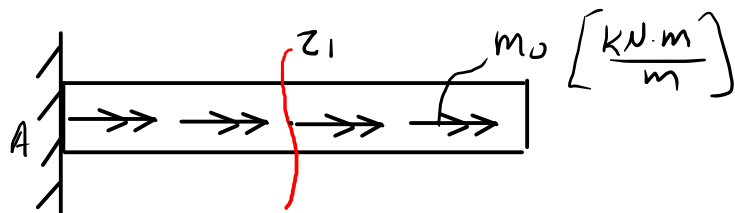
ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΒΡΕΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΙΚΡΟ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ:

1) Ομοιομορφη κατανομή

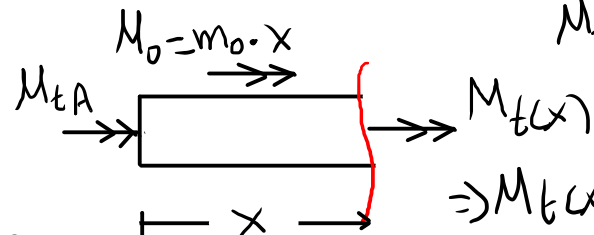


$$M_{tA} + m_0 l = 0$$

$$\Rightarrow M_{tA} = -m_0 l$$



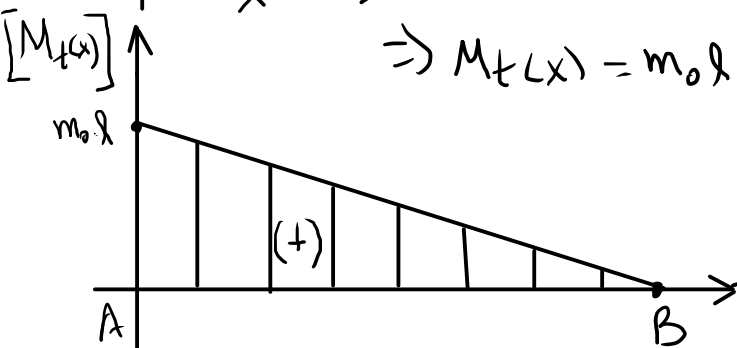
$$M_t(x) + M_{tA} + m_0 x = 0$$



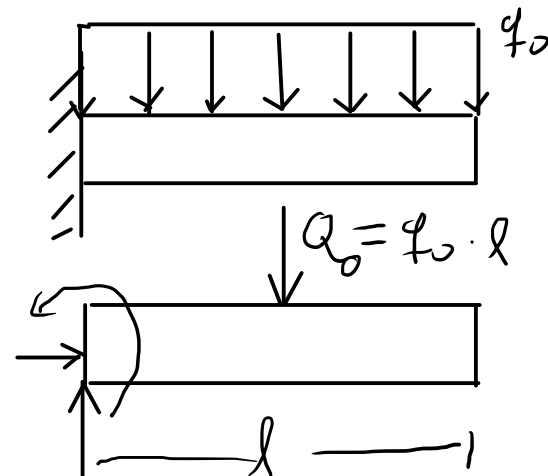
$$\Rightarrow M_t(x) = -M_{tA} - m_0 x$$

$$\Rightarrow M_t(x) = m_0 l - m_0 x$$

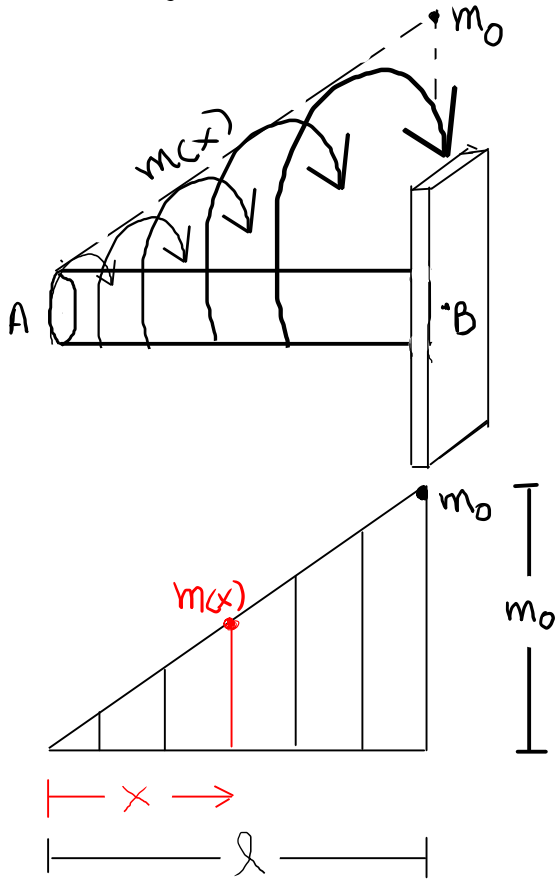
$A: x=0, M_t(0) = m_0 l$
 $B: x=l, M_t(l) = 0$



Σε αναλογία με το
πρόβλημα δοκού υπό
ομοιομορφο εδωρητικό φορτίο



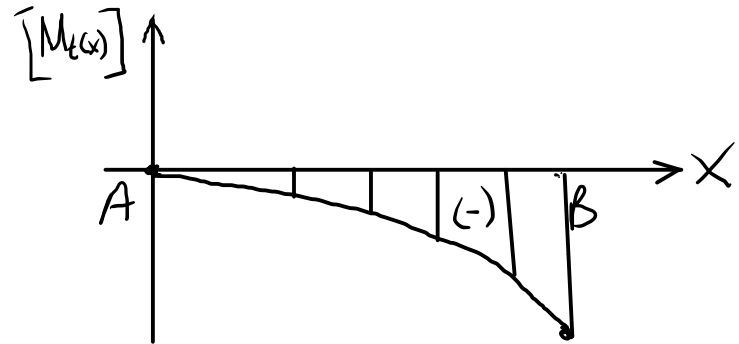
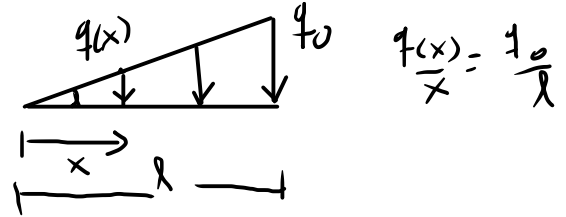
2) Τριγωνική κατανομή $m(x)$



$$\frac{m(x)}{x} = \frac{m_0}{l}$$

$$\Rightarrow m(x) = \frac{m_0}{l} x$$

$$\left(\begin{array}{l} A: x=0 \Rightarrow m(0)=0 \\ B: x=l, m(l)=m_0 \end{array} \right)$$



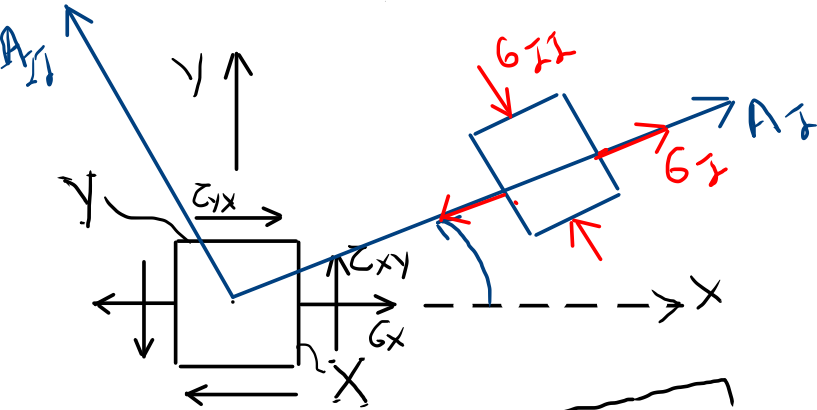
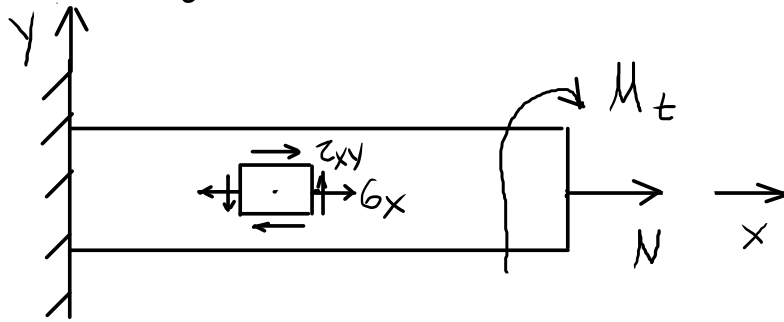
$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{m_0}{l} x = 0 \Rightarrow x=0, \text{ αραξία στο } A$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -\frac{m_0}{l} < 0 \text{ βλεπουμε και λα αυω, πλεον } \text{ οτι } x=0$$

$$M(x) + M_0 = 0 \Rightarrow M(x) = -\frac{1}{2} x m(x)$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{1}{2} \frac{m_0}{l} x^2 \left| \begin{array}{l} A: x=0 \Rightarrow M(0)=0 \\ B: x=l \Rightarrow M(l) = -\frac{1}{2} m_0 l \end{array} \right.$$

Στρέψη και αξονική κασαπίωση:



$$G_I, G_{II} = \bar{G} \pm R, \quad R = \sqrt{\left(\frac{G_x - G_y}{2}\right)^2 + G_{xy}^2}$$

$$\tan(2\theta_0) = \frac{2G_{xy}}{G_x - G_y} \Rightarrow \theta_0 \dots$$

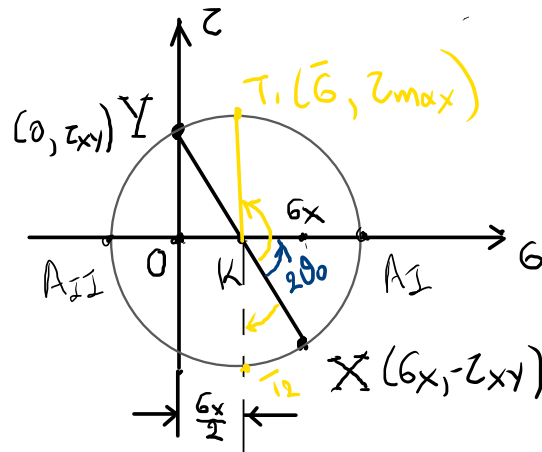
$$z_{max} = R$$

$$\theta_s = \theta_0 \pm 45^\circ$$

Εφαρμογή στο βέλος (δυναμική φόρτιση)
 Εφαρμογή Αρχής της Ελαστικότητας
 (έροτος είναι η ελαστική περιοχή -
 ίσως ο νόμος Hooke)

• Αξονική δύναμη $N(x)$ κεντρική
 $G_x = \frac{N(x)}{A} = \frac{N}{A}$

• Ροπή στρέψης έχουμε τριγωνική διατμητική
 τάση στην περιφέρεια της κυκλικής
 διατομής $G_{xy} = \frac{M_t(x)}{I_p} \cdot R, \quad I_p = \frac{1}{2}\pi R^4$



$$K(\bar{G}, 0)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{2}(G_x + G_y)$$