



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

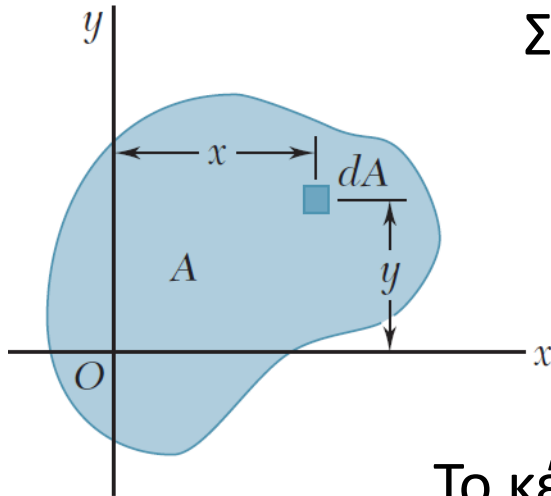
ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

*Εύρεση κέντρου επιφανείας – Ροπών
αδρανείας*

Δρ. Δημήτριος ΣΑΒΒΑΣ

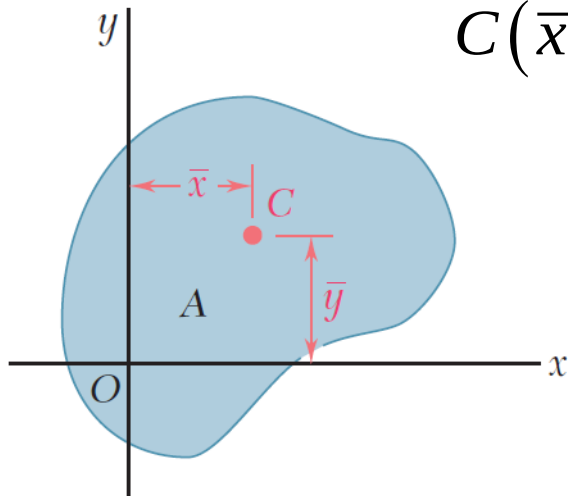
Εύρεση κέντρου επιφανείας

Στατικές ροπές επιφανείας ως προς άξονα x και y:



$$Q_x = \int_A y dA, \quad Q_y = \int_A x dA$$

Το κέντρο της επίπεδης επιφανείας A είναι το σημείο $C(\bar{x}, \bar{y})$ το οποίο ικανοποιεί τις σχέσεις:

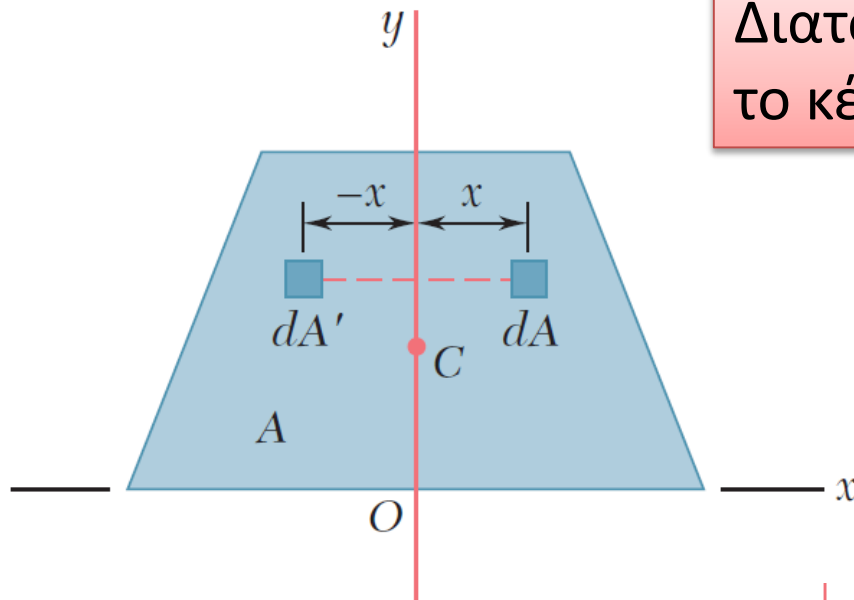


$$\int_A y dA = A\bar{y}, \quad \int_A x dA = A\bar{x}$$

$$Q_x = A\bar{y}, \quad Q_y = A\bar{x}$$

Διατομές με άξονες συμμετρίας

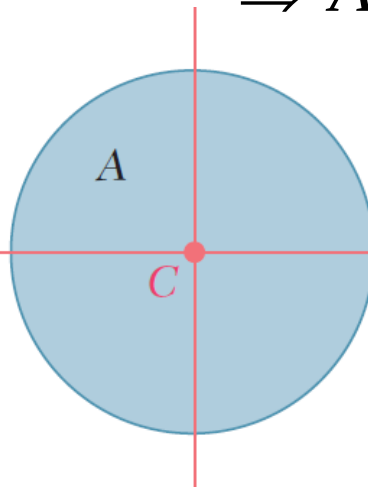
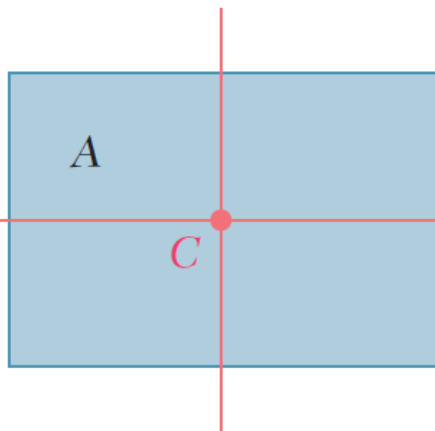
Διατομή με έναν άξονα συμμετρίας έχει το κέντρο της πάνω στον άξονα αυτόν:



$$Q_y = \int_A x dA = Q_y^{left} + Q_y^{right}$$

$$\Rightarrow Q_y = \int_{A'} (-x) dA' + \int_A x dA = 0$$

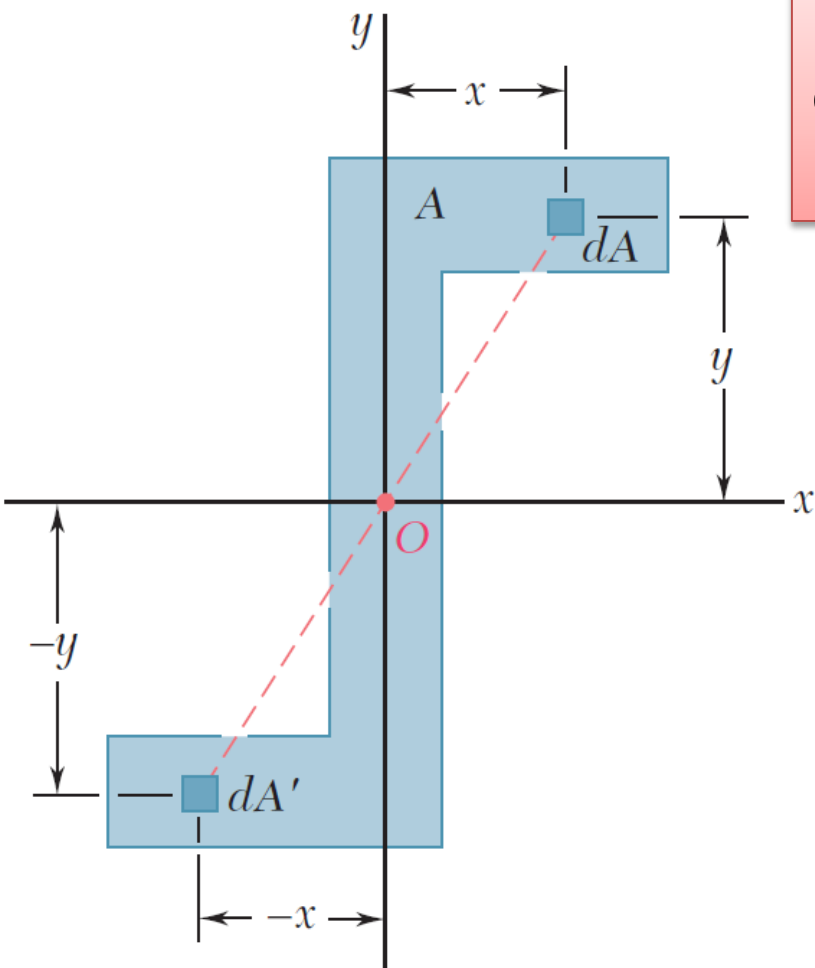
$$\Rightarrow A\bar{x} = 0 \Rightarrow C(\bar{x} = 0, \bar{y})$$



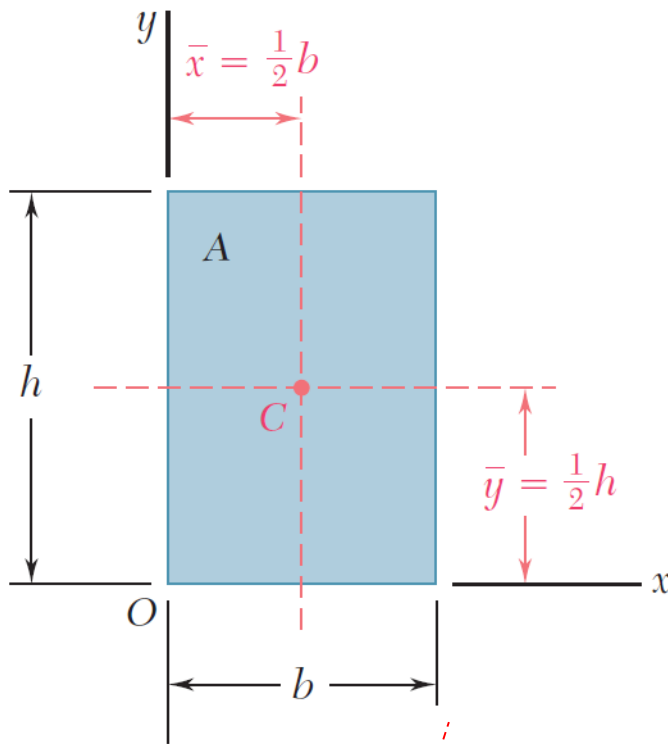
Διατομές με δύο άξονες συμμετρίας έχουν το κέντρο τους στην τομή των αξόνων αυτών

Διατομές με κέντρο συμμετρίας

Η στατική ροπή επιφανείας ως προς οποιονδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο συμμετρίας O είναι μηδέν.



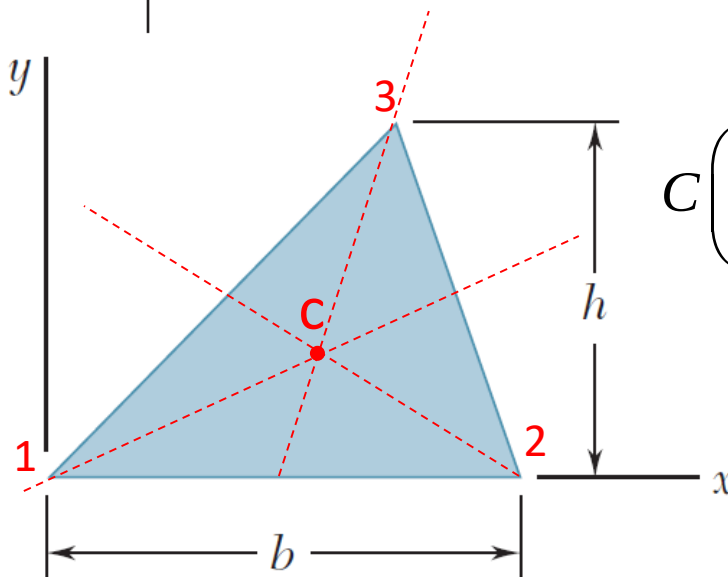
$$Q_x = 0, Q_y = 0$$
$$\Rightarrow C(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0)$$



$$C\left(\bar{x} = \frac{1}{2}b, \bar{y} = \frac{1}{2}h\right)$$

$$Q_x = A\bar{y} = (bh)\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{2}bh^2$$

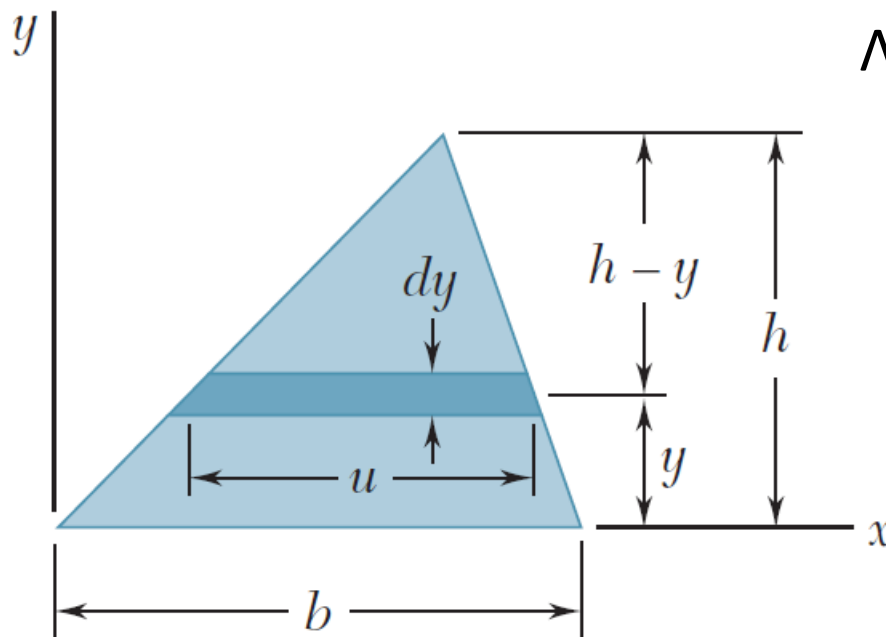
$$Q_y = A\bar{x} = (bh)\left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}b^2h$$



$$C\left(\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{h}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Υπολογισμός κέντρου επιφανείας τριγώνου:



Λόγω ομοιότητας τριγώνων:

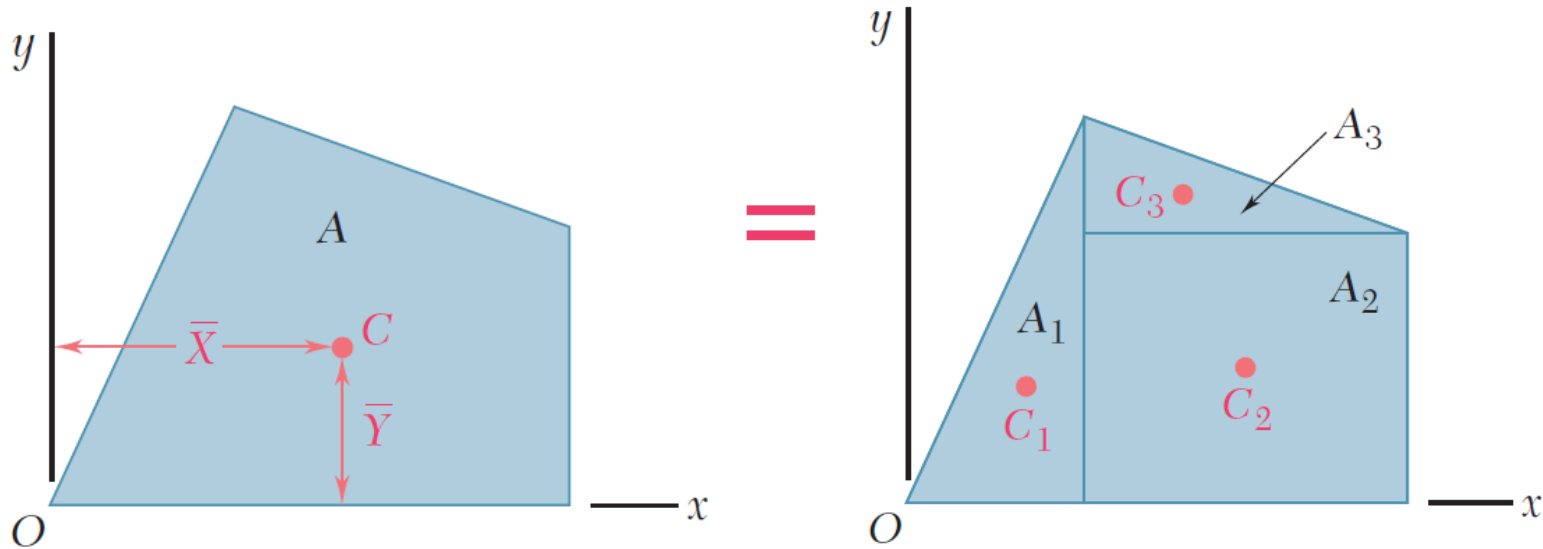
$$\frac{u}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow u = b \frac{h-y}{h}$$

$$dA = u dy = b \frac{h-y}{h} dy$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A y dA = \int_0^h y b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy \\ &= \frac{b}{h} \left[h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h \quad \boxed{Q_x = \frac{1}{6} b h^2} \end{aligned}$$

$$Q_x = A \bar{y} \Rightarrow \frac{1}{6} b h^2 = \left(\frac{1}{2} b h \right) \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{3} h$$

Εύρεση κέντρου σύνθετης επίπεδης επιφανείας

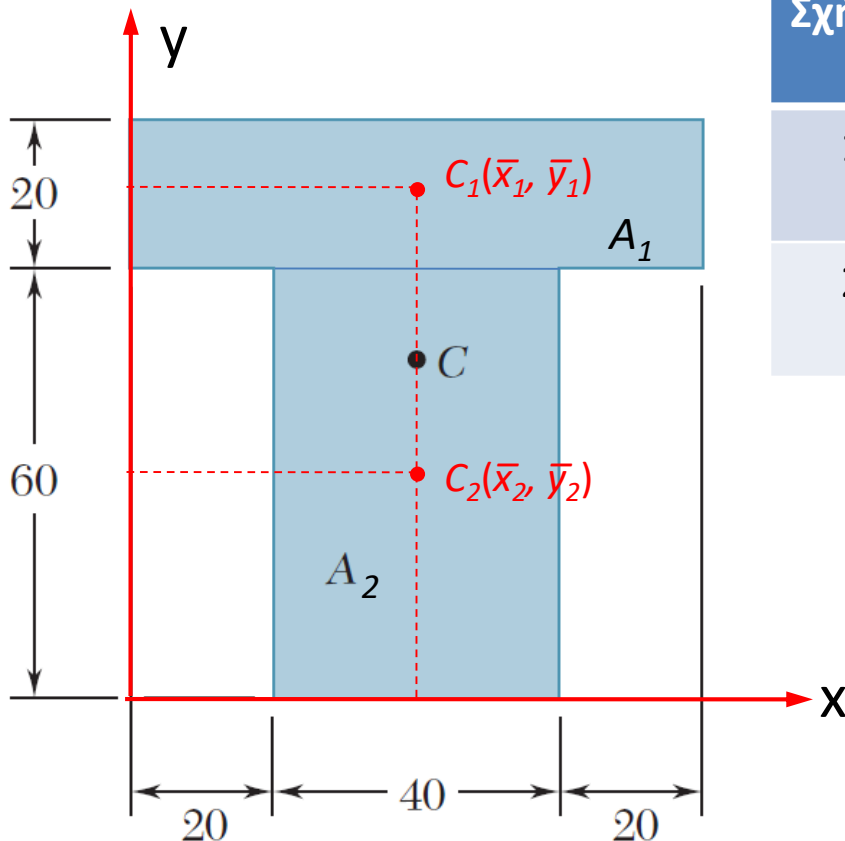


$$Q_x = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA + \int_{A_2} y dA + \int_{A_3} y dA = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum_i A_i \bar{y}_i = A \bar{Y} \\ Q_y &= \sum_i A_i \bar{x}_i = A \bar{X} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί το κέντρο C της επίπεδης επιφανείας του σχήματος.



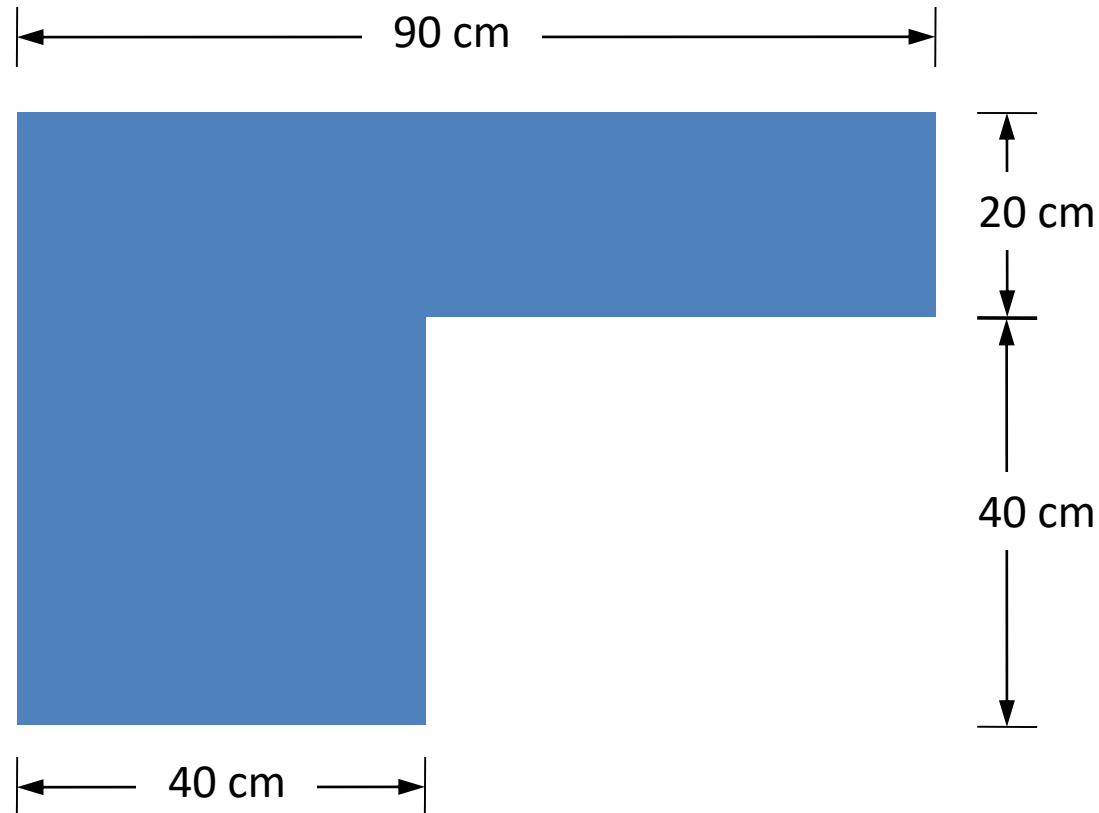
Σχήμα i	Εμβαδόν A_i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$
1	$A_1=80 \times 20$ $=1600$	40	70
2	$A_2=40 \times 60$ $=2400$	40	30

$$\bar{X} = \frac{A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2}{A_1 + A_2} = 40$$

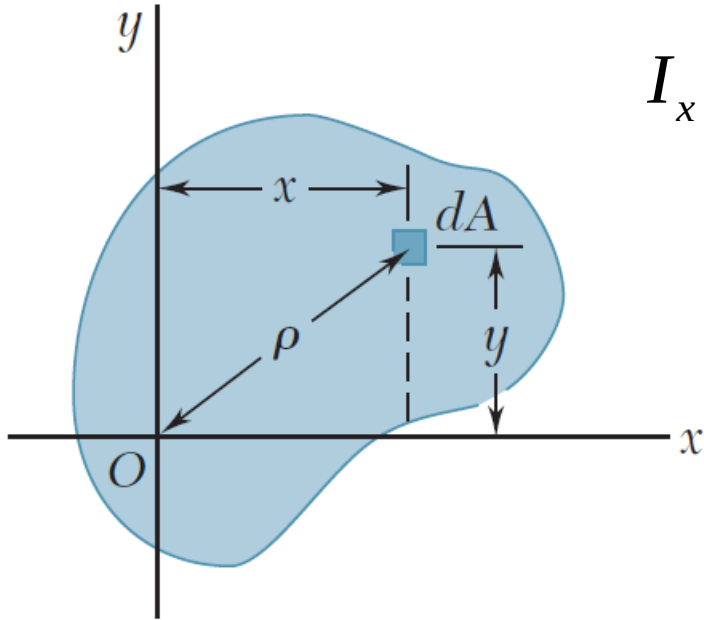
$$\bar{Y} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = 46$$

Άσκηση

Να βρεθεί το κέντρο C της διατομής γωνιακού ελάσματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ροπή αδρανείας επίπεδης επιφάνειας



$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

Πολική ροπή αδρανείας:

$$J_O = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

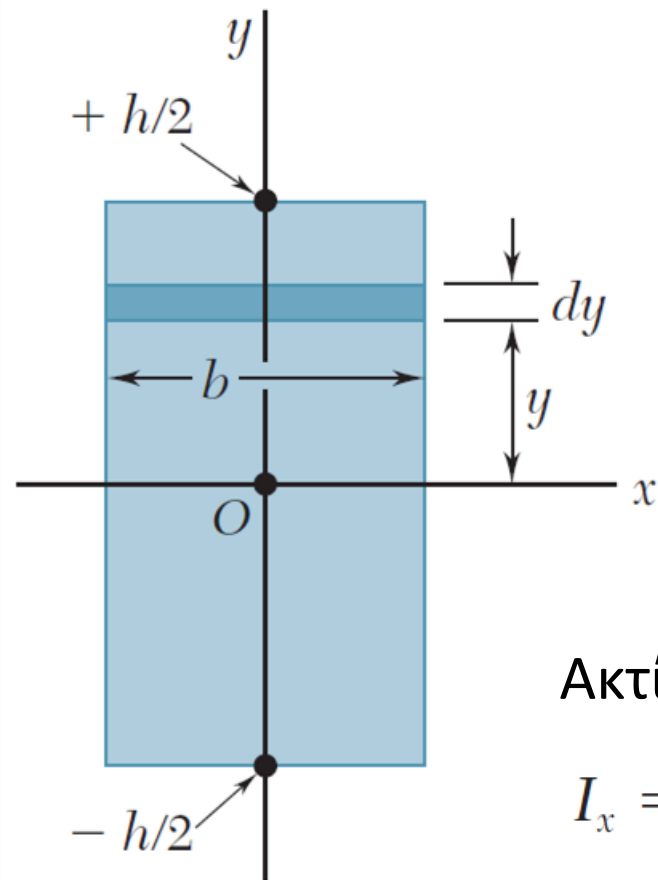
$$J_O = I_x + I_y$$

Ακτίνες αδρανείας ως προς άξονες x και y:

$$I_x = r_x^2 A, \quad I_y = r_y^2 A$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Εφαρμογή – Έυρεση ροπής και ακτίνας αδρανείας



$$dI_x = y^2 dA = y^2(b dy)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2(b dy) = \frac{1}{3}b[y^3]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$I_x = \frac{1}{3}b\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{1}{12}bh^3$$

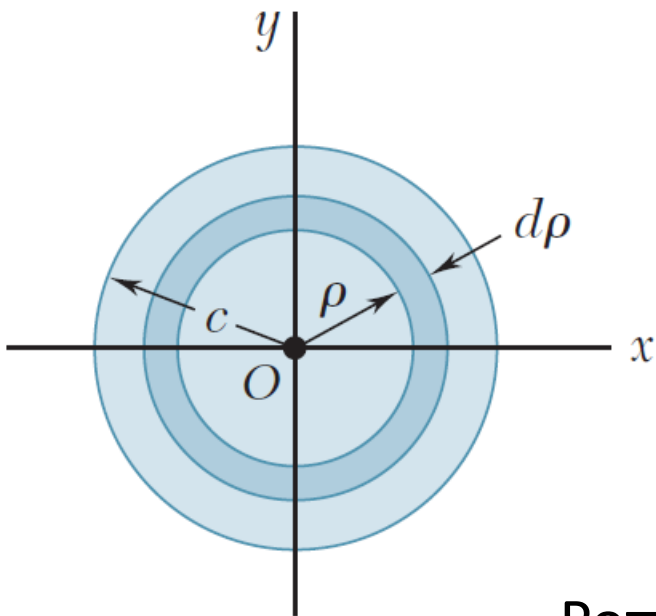
Ακτίνα αδρανείας ως προς άξονα x:

$$I_x = r_x^2 A \quad \frac{1}{12}bh^3 = r_x^2(bh)$$

$$r_x = h/\sqrt{12}$$

Εφαρμογή – Έυρεση ροπής και ακτίνας αδρανείας

Πολική ροπή αδρανείας:



$$dJ_O = \rho^2 dA = \rho^2(2\pi\rho d\rho)$$

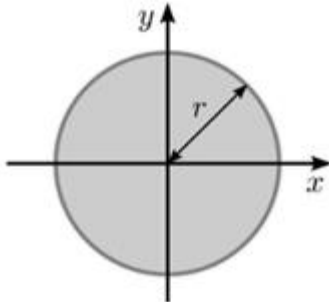
$$J_O = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho$$

$$J_O = \frac{1}{2}\pi c^4$$

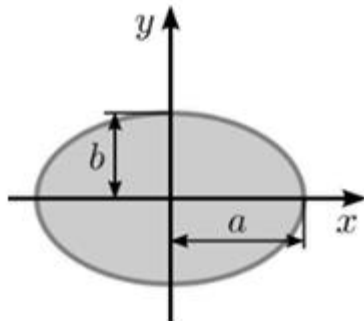
Ροπές αδρανείας ως προς άξονες x και y:

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \quad \frac{1}{2}\pi c^4 = 2I_x$$

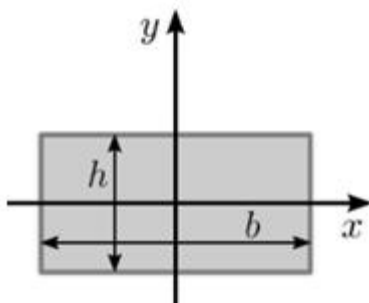
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi c^4$$



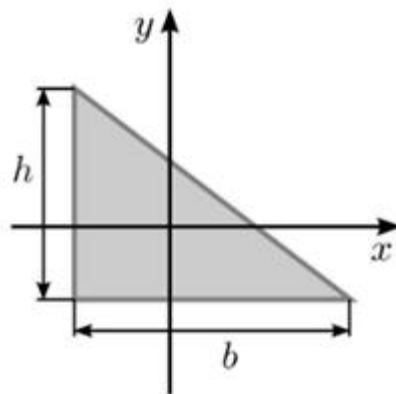
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} r^4$$



$$I_x = \frac{\pi}{4} ab^3, \quad I_y = \frac{\pi}{4} a^3 b$$

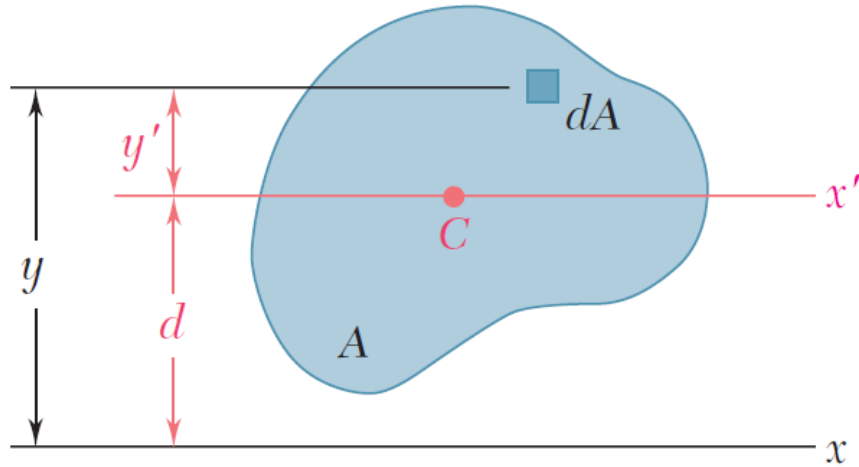


$$I_x = \frac{1}{12} bh^3, \quad I_y = \frac{1}{12} b^3 h$$



$$I_x = \frac{1}{36} bh^3, \quad I_y = \frac{1}{36} b^3 h$$

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων (Steiner)



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d)^2 dA \Rightarrow$$

$$I_x = \int_A y'^2 dA + 2d \int_A y' dA + d^2 \int_A dA$$

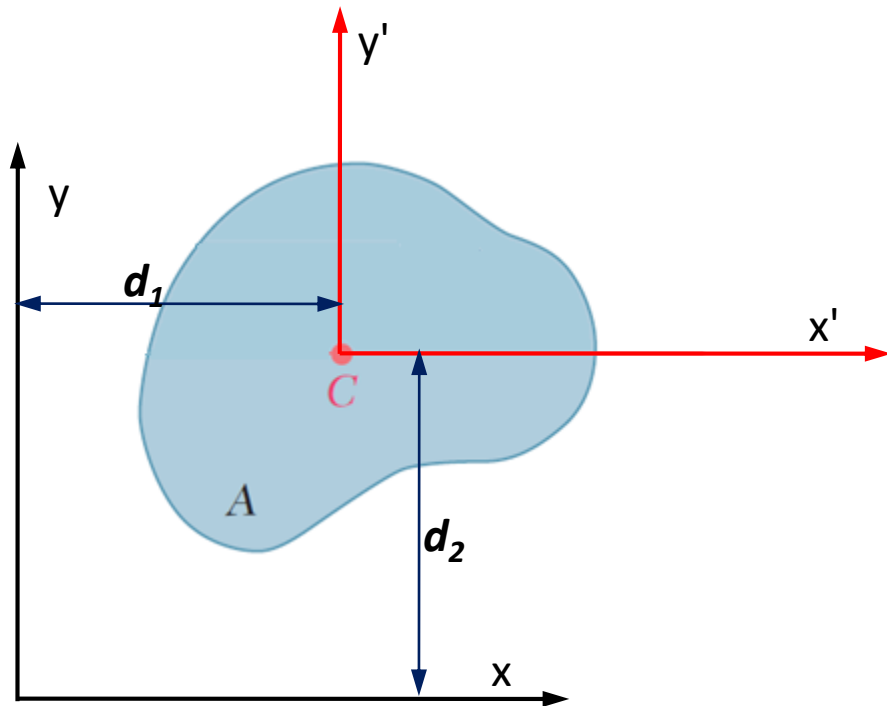
$$I_x = I_{x'} + 2dQ_{x'} + Ad^2$$

Εάν ο x' άξονας είναι κεντρικός άξονας τότε $Q_{x'} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = I_{x'} + Ad^2}$$

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων (Steiner)

Εάν $Cx'y'$ κεντροβαρικό σύστημα κύριων αξόνων τότε:



$$I_x = I_{x'} + Ad_2^2$$

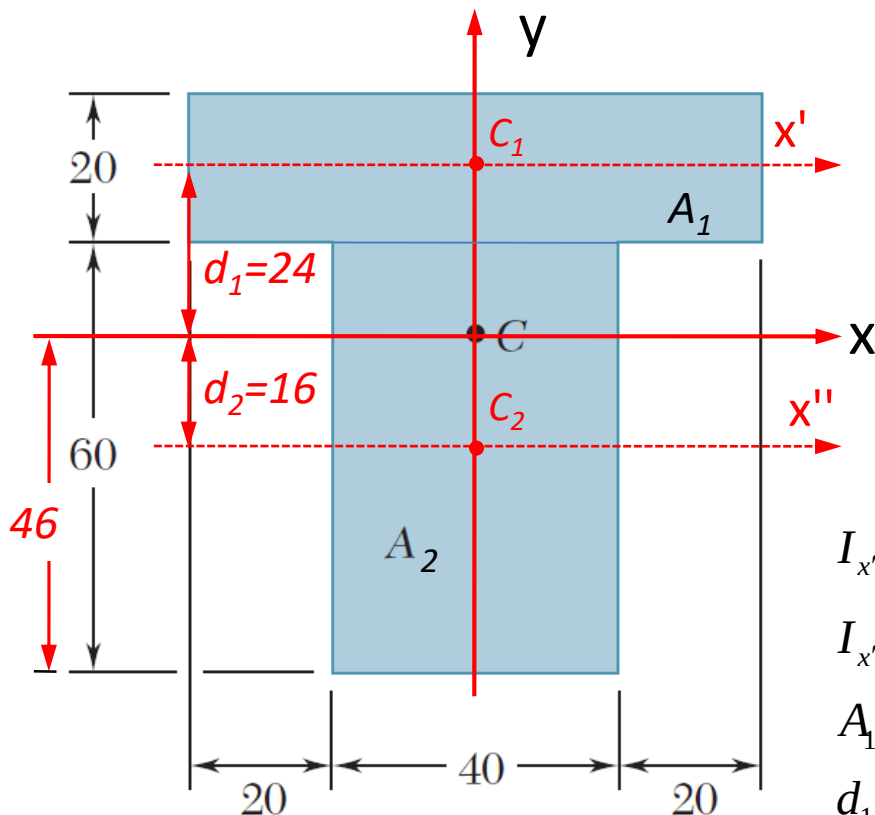
$$I_y = I_{y'} + Ad_1^2$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Ad_1 d_2$$

όπου d_1 και d_2 οι προσημασμένες
αποστάσεις των αξόνων

Εφαρμογή

Να προσδιοριστεί η ροπή αδρανείας I_x της εικονιζόμενης επιφάνειας ως προς τον κεντρικό άξονα x



$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 = 2309 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$(I_x)_1 = I_{x'} + A_1 d_1^2 = 975 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$(I_x)_2 = I_{x''} + A_2 d_2^2 = 1334 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

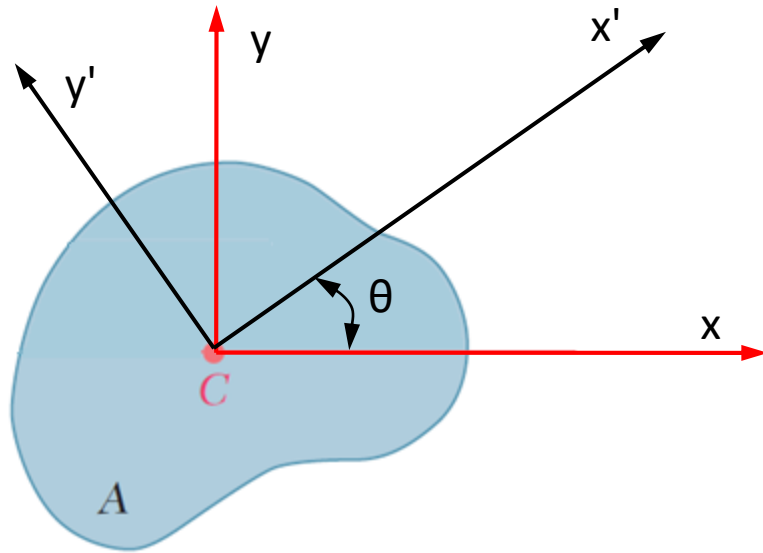
$$I_{x'} = (1/12)(80)(20)^3 = 53.33 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_{x''} = (1/12)(40)(60)^3 = 720 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$A_1 = (80)(20) = 1600 \text{ mm}^2, A_2 = (40)(60) = 2400 \text{ mm}^2$$

$$d_1 = 24 \text{ mm}, d_2 = 16 \text{ mm}$$

Στροφή συστήματος αξόνων



Σχέσεις μετασχηματισμού:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

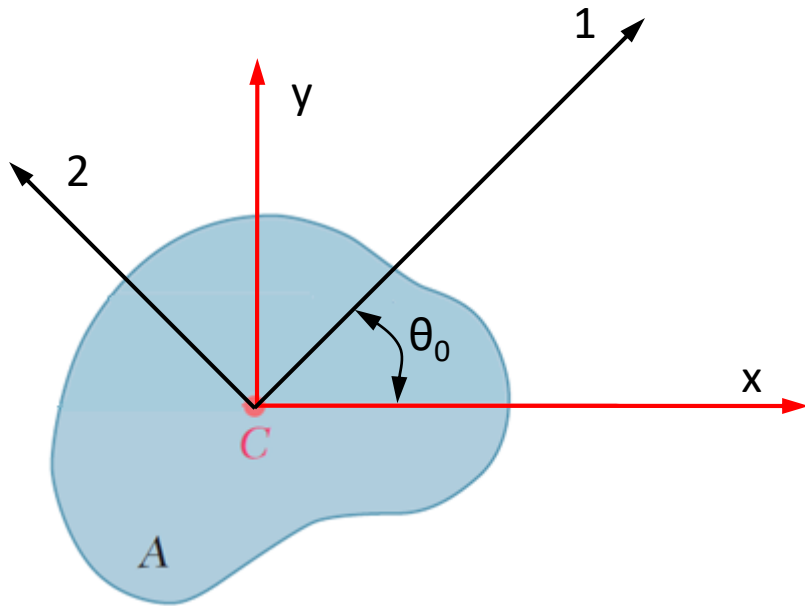
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Δευτεροβάθμιες ροπές ως τανυστής 2^{ης} τάξης:

$$I'_{ij} = r_{ik} r_{jm} I_{km} \quad \text{Γενική σχέση μετασχηματισμού:}$$

$$r_{ik}, r_{jm} \text{ συνημίτονα κατεύθυνσης π.χ. } r_{12} = \cos(Cx', Cy)$$

Στροφή συστήματος αξόνων



Κύριες ροπές:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Άσκηση

Ζητείται να υπολογιστούν οι κεντροβαρικές ροπές αδρανείας της σύνθετης διατομής γωνιακού ελάσματος ως προς το σύστημα Cx και οι κύριες ροπές.

