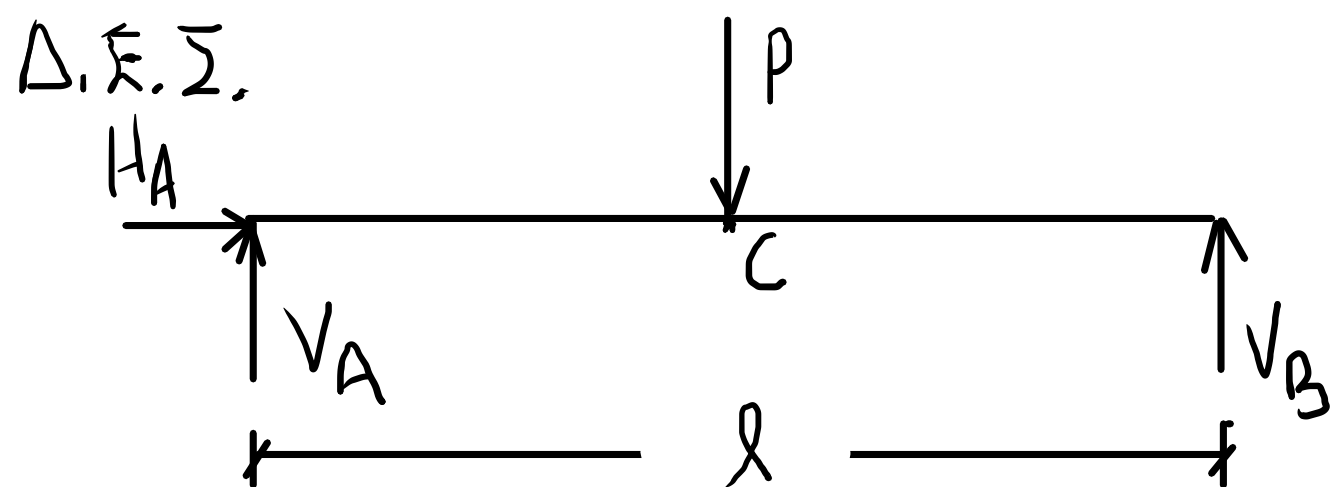
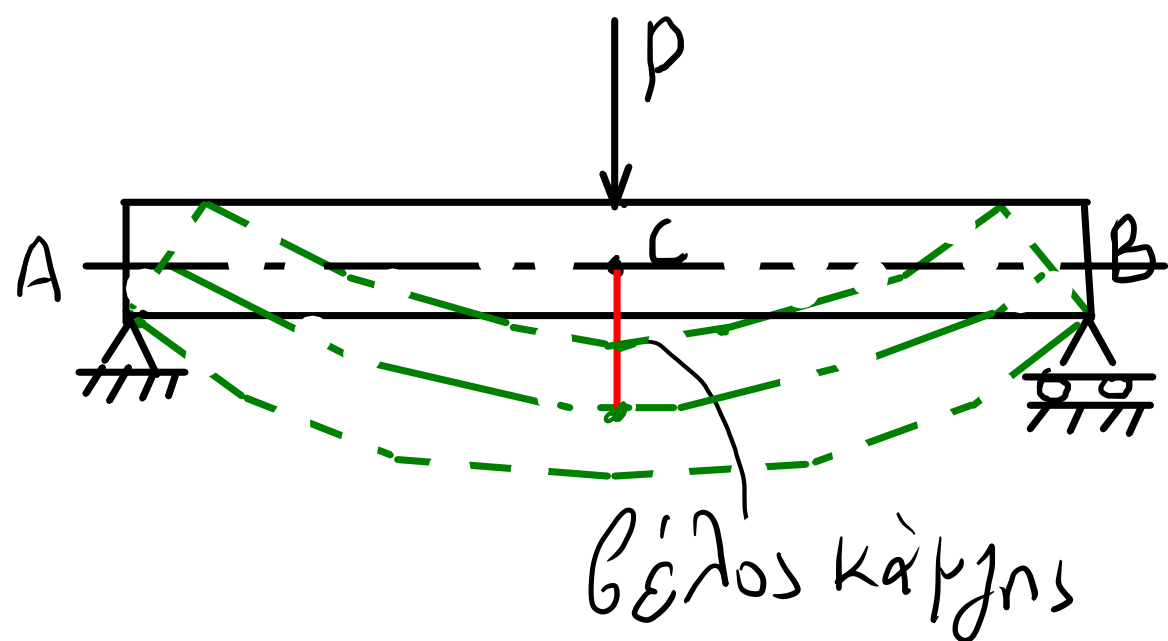


Μηχανική ΙΙ

Κάμψη



Δοκός: Ευθύγραμμος φορέας που παραλαμβάνει πόρα από τα αξονικά και εγκάρσια φορτία και τα μεταβιβάζει ως βελτίξεις. Στις διατομές της αναπτύσσονται τένονες και αξονικές δυνάμεις και καρπτικές ροπές.

Κάμψη: Η ελαστική κατάσταση βελος οποις βρίσκεται μια δοκός που υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση. Παράδειγμα: η αμφιέρεστη δοκός που δέχεται εγκάρσιο φορτίο P στο κέντρο της, παραμορφώνεται κατά τη διεύθυνση του επιβαλλόμενου φορτίου (βέλος κάμψης) και ο άξονας της κάμπτεται. Το αποτέλεσμα της κάμψης είναι η ανάπτυξη καρπτικών ροπών, η παραμόρφωση της δοκού και η ανάπτυξη τάσεων εντός του υλικού της.

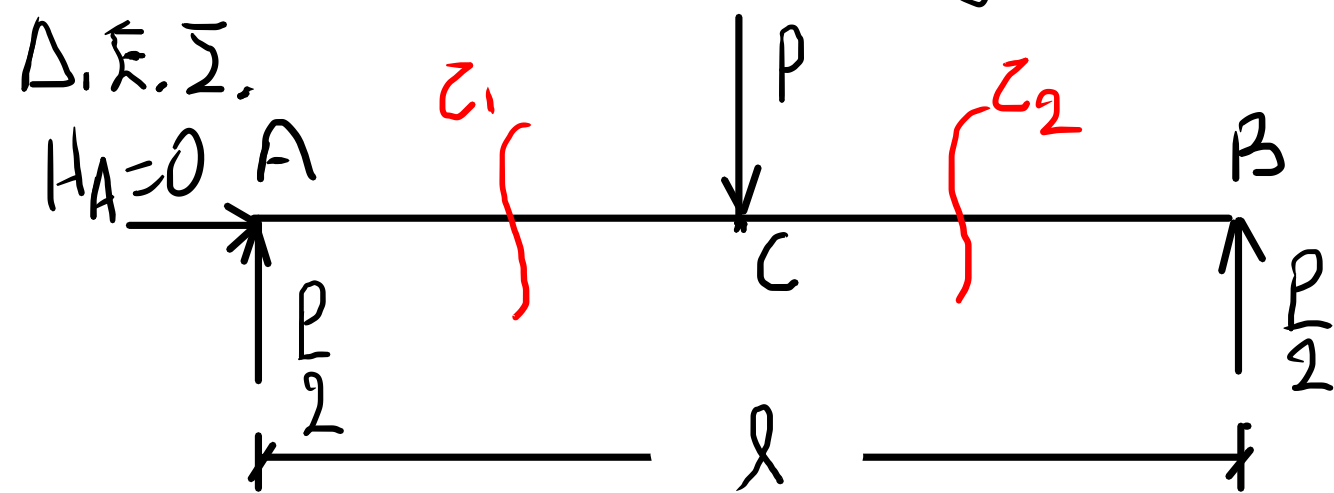
$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad (1)$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = P \quad (2)$$

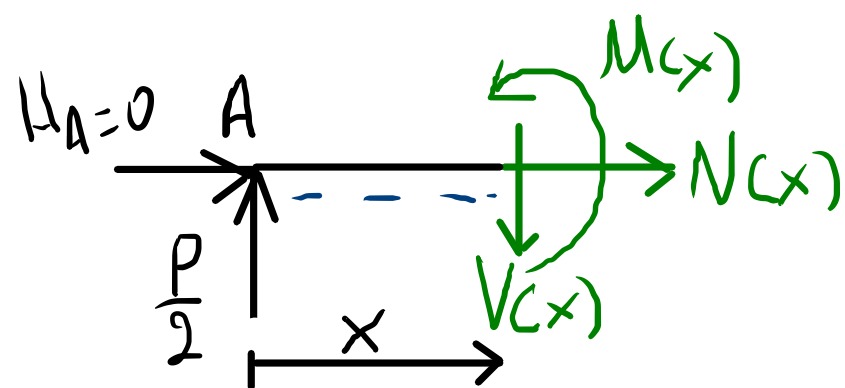
$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -P \cdot \frac{l}{2} + V_B \cdot l = 0 \Rightarrow V_B = \frac{P}{2} \quad (3)$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} V_A = \frac{P}{2}$$

Διαγράμματα ροπών κάμψης:



$$z_1: 0 \leq x < \frac{l}{2}$$



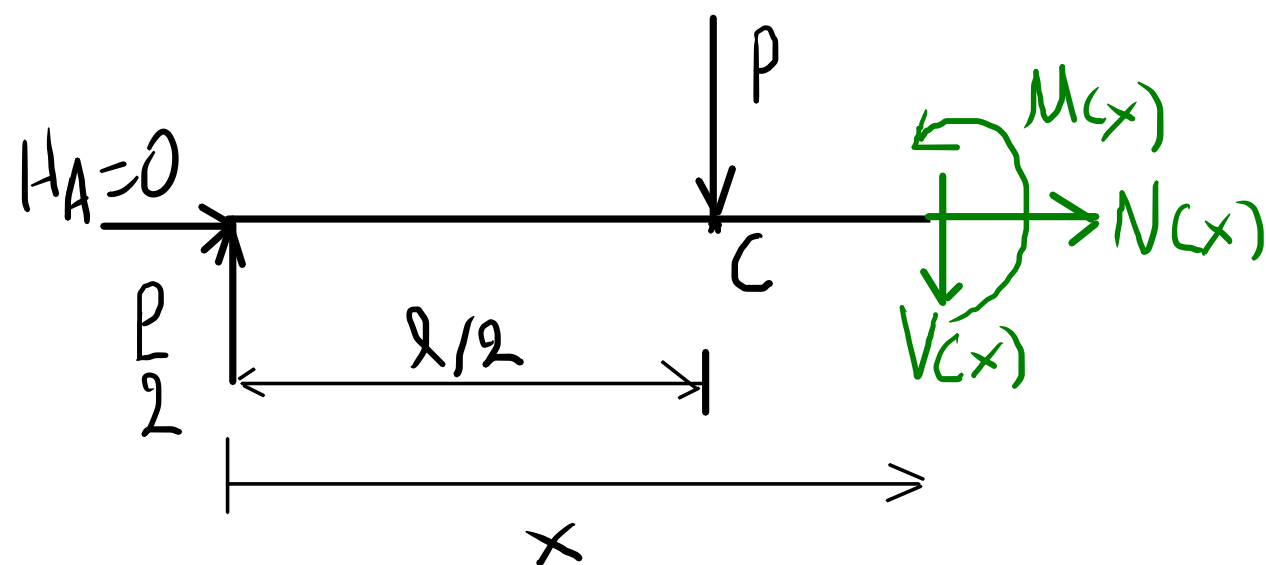
$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) = 0$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{P}{2}$$

$$\curvearrowright \sum M_x = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2} \cdot x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$\left| \begin{array}{l} A: x=0, M(0)=0 \\ C^-: x=\frac{l}{2}, M_{C^-} = \frac{Pl}{4} \end{array} \right.$$

$$z_2: \frac{l}{2} \leq x \leq l$$

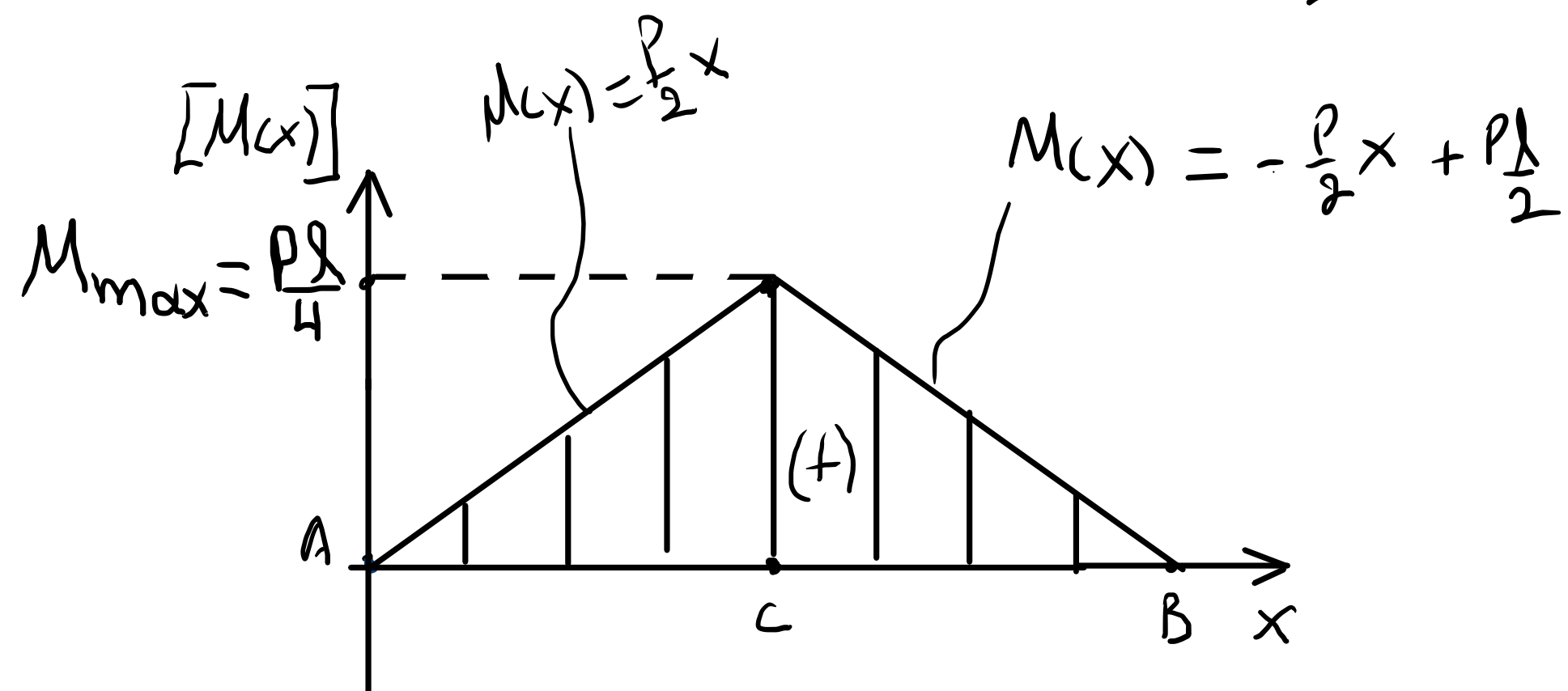
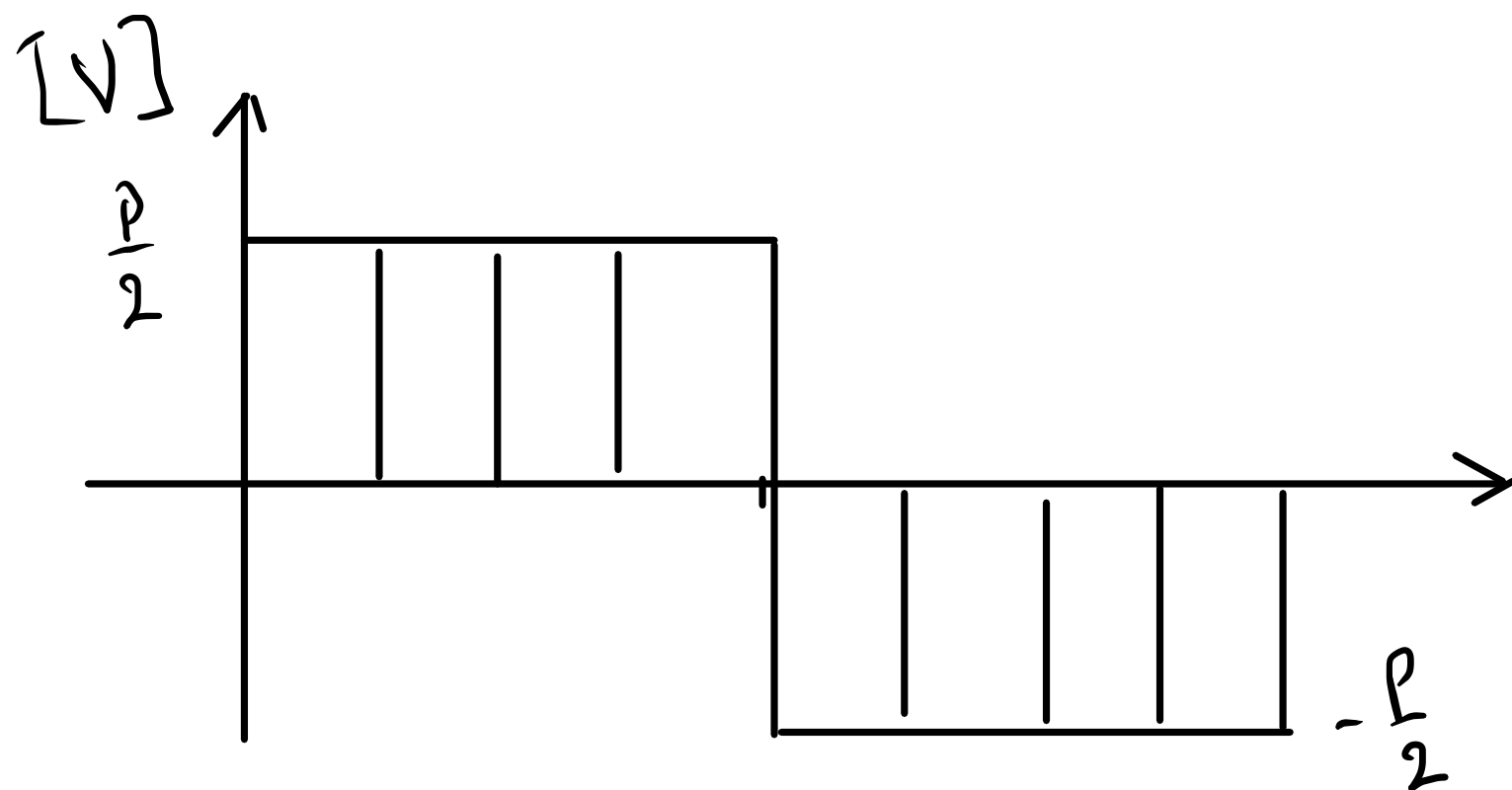


$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) = 0$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -\frac{P}{2}$$

$$\curvearrowright \sum M_x = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2}x + P \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right) + M(x) = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{P}{2}x + \frac{Pl}{2} \quad \left| \begin{array}{l} C^+: x=\frac{l}{2}, M_{C^+} = \frac{Pl}{4} \\ B: x=l, M_B = 0 \end{array} \right.$$



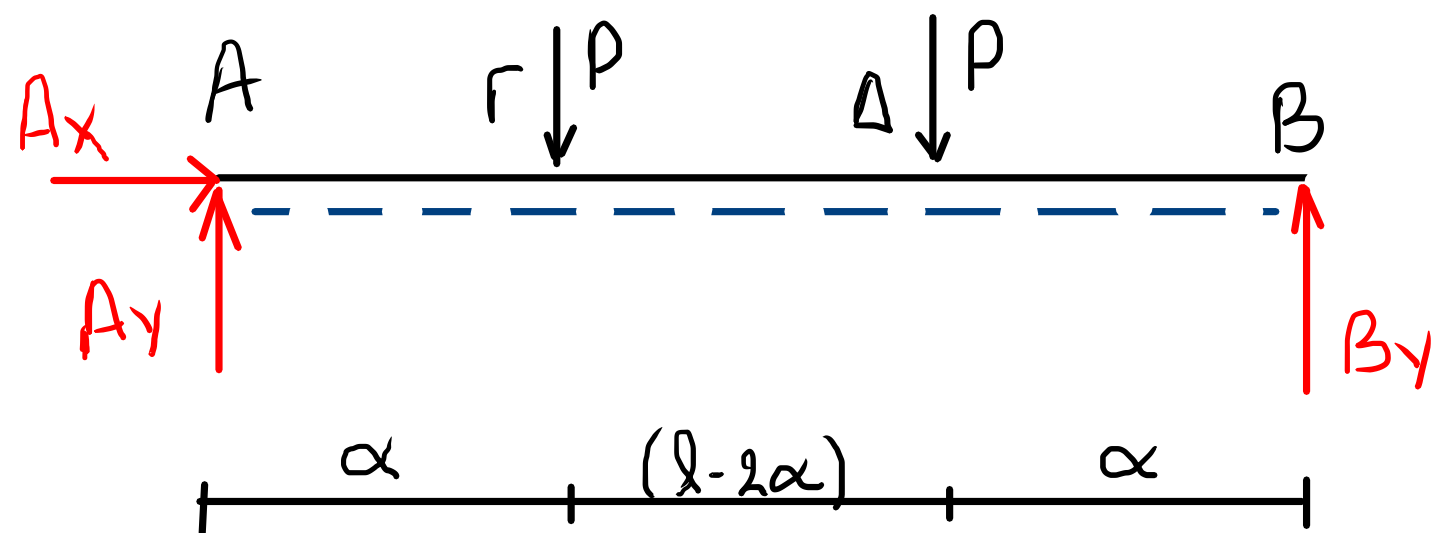
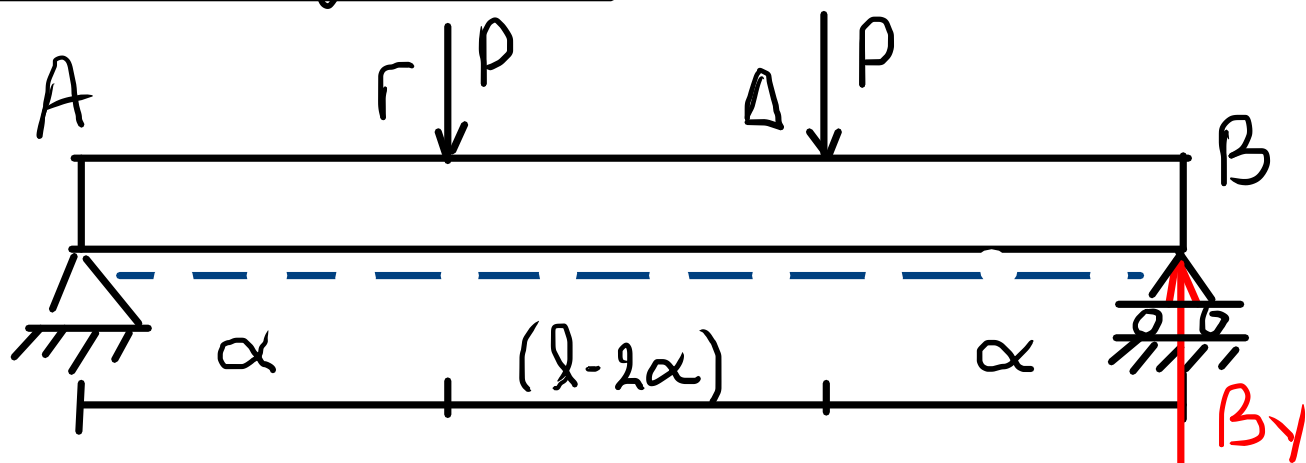
Γενική ανάλυση κάμγης

Δύο είδη κάμγης:

i) Καθαρή κάμψη: στα δοκός ή σε εφάρμο της όταν έχουμε ανάπτυξη μόνο καμπτικής ροπής. ($N = V = M_t = 0$, $M \neq 0$)

ii) Γενική κάμψη: εκτός της καμπτικής ροπής αναπτύσσεται και ξέφνουσα δύναμη ($M \neq 0$, $V \neq 0$)

Παράδειγμα:



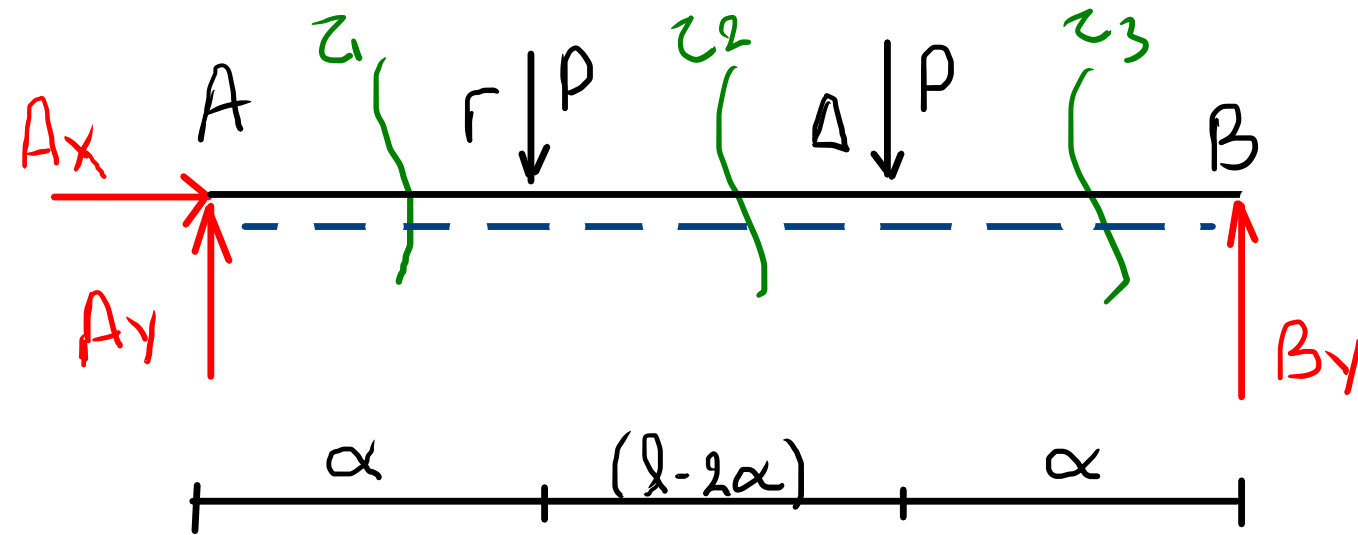
Εξισώσεις ισορ.

$$(1) \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad (1)$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 2P \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_A = 0 &\Rightarrow -P \cdot \alpha - P \cdot (l - \alpha) + B_y \cdot l = 0 \\ &\Rightarrow -Pl + B_y \cdot l = 0 \Rightarrow B_y = P \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} A_y = P$$

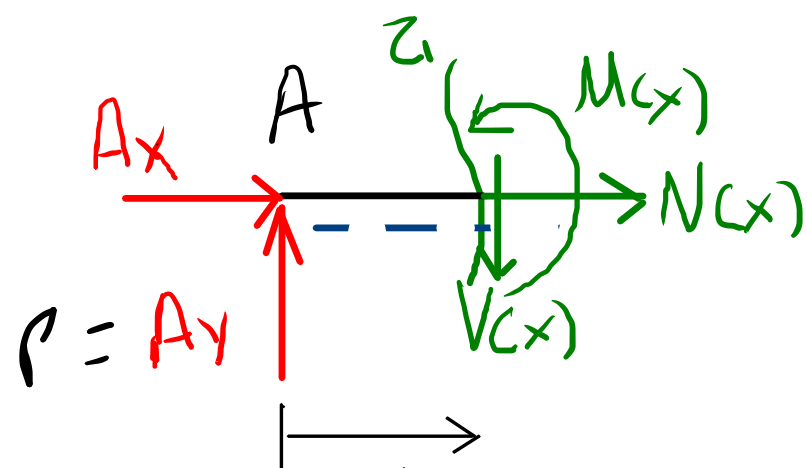


$z_1: A \rightarrow, 0 \leq x < \alpha$

$$N(x) = 0$$

$$A_y - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = P$$

$$-P \cdot x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = P \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} A: x=0, M_A=0 \\ \Gamma: x=\alpha, M_{\Gamma}=P \cdot \alpha \end{array} \right.$$



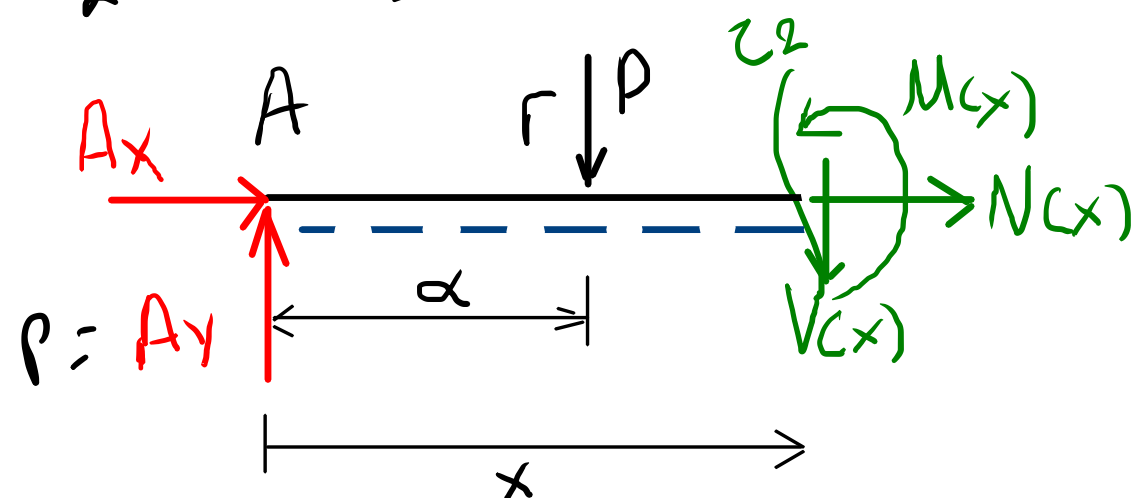
$z_2: \Gamma \rightarrow \Delta: \alpha \leq x < l-\alpha$

$$N(x) = 0$$

$$P - P - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 0$$

$$-P \cdot x + P \cdot (x - \alpha) + M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x) = P \cdot \alpha$$



$z_3: \Delta \rightarrow B: l-\alpha \leq x < l$

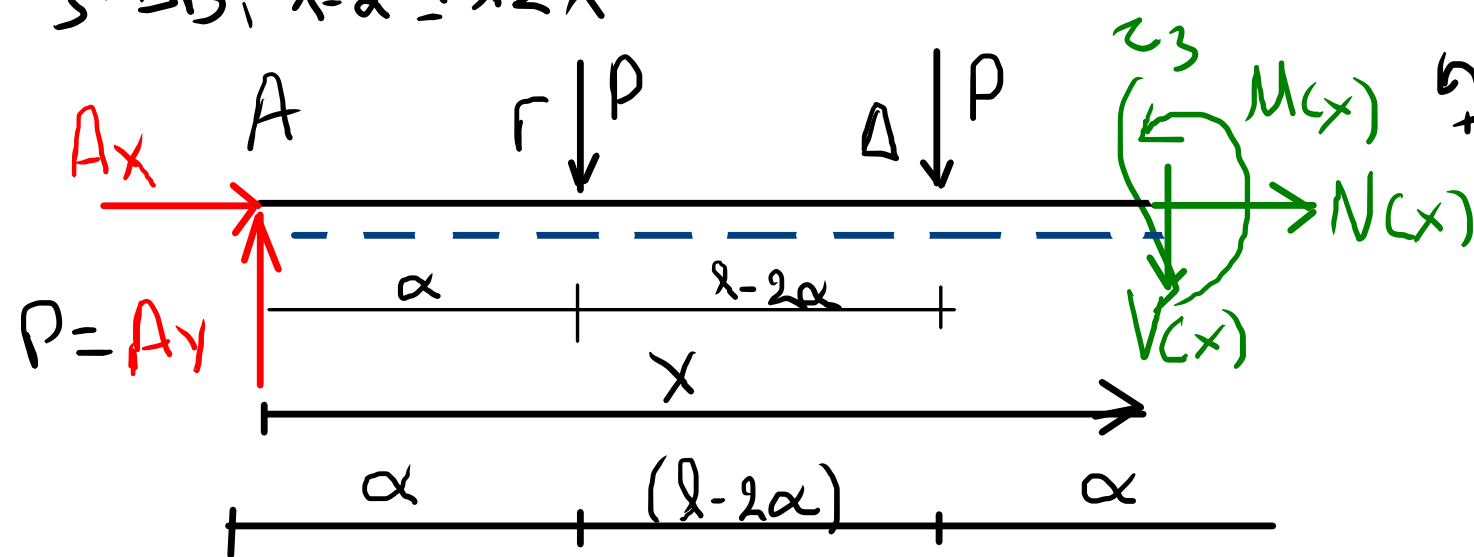
$$N(x) = 0$$

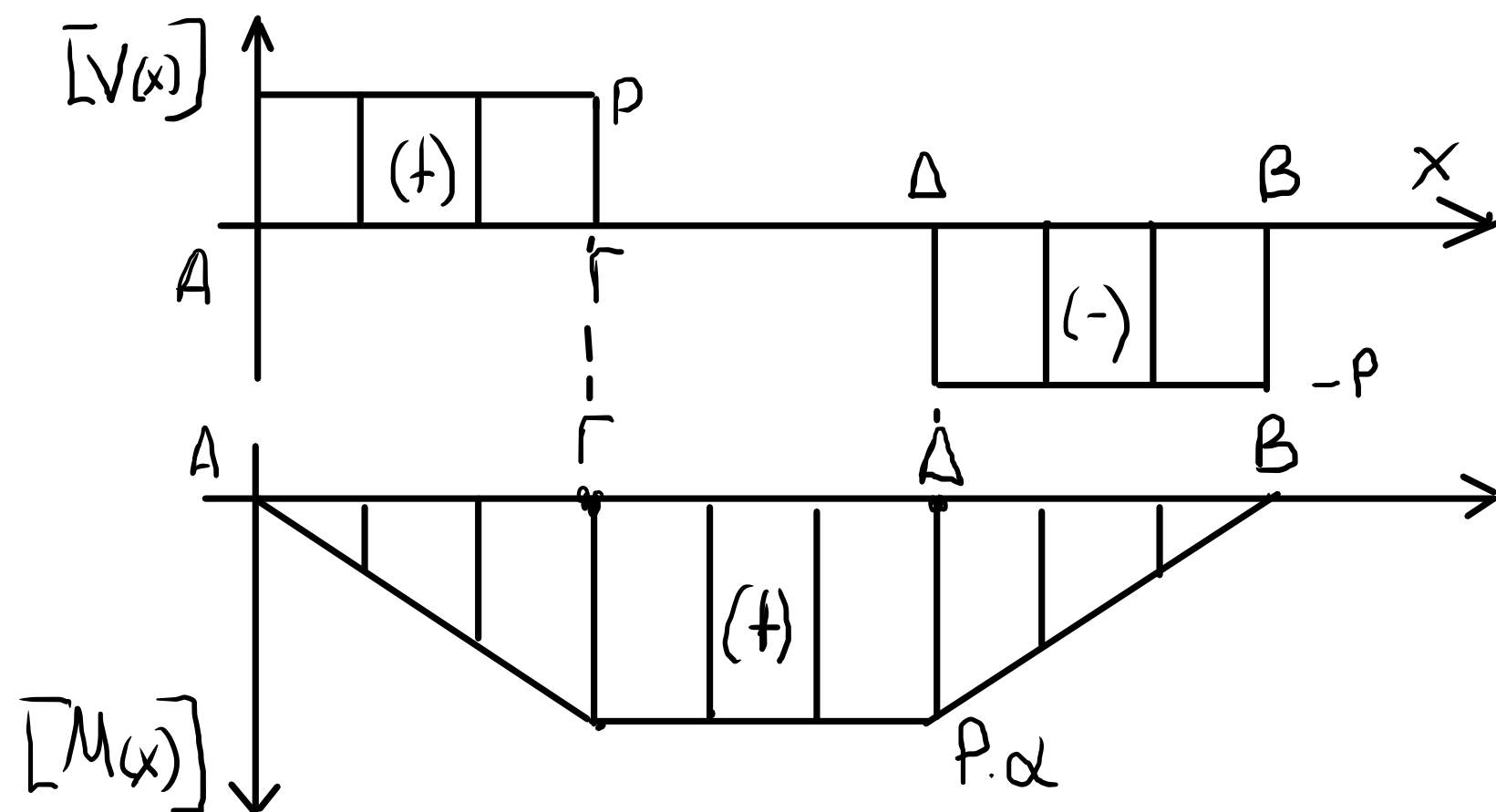
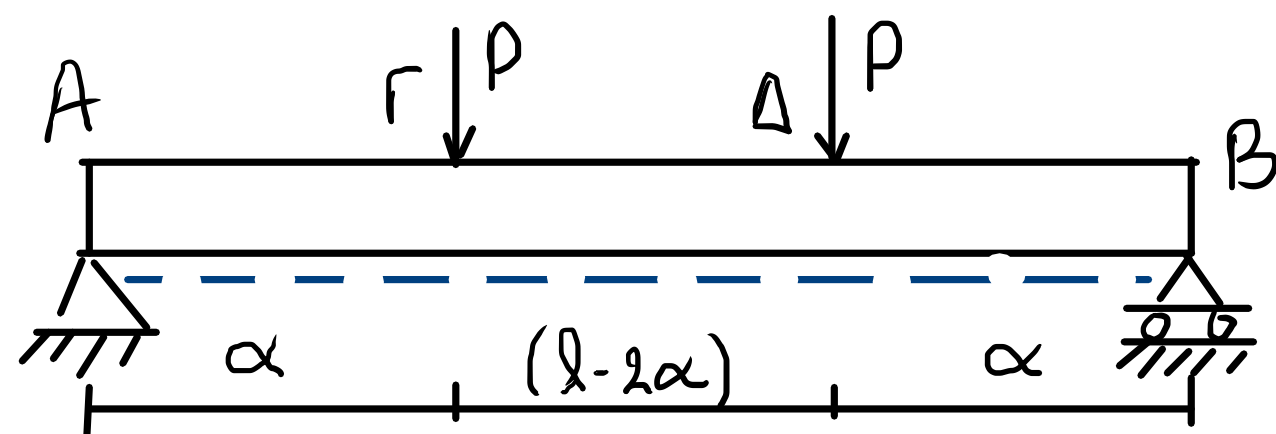
$$P - P - P - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -P$$

$$-P \cdot x + P \cdot (x - \alpha) + P \cdot (x - l + \alpha) + M(x) = 0$$

$$\Rightarrow -P \cdot \alpha + P \cdot x - P \cdot l + P \cdot \alpha + M(x) = 0$$

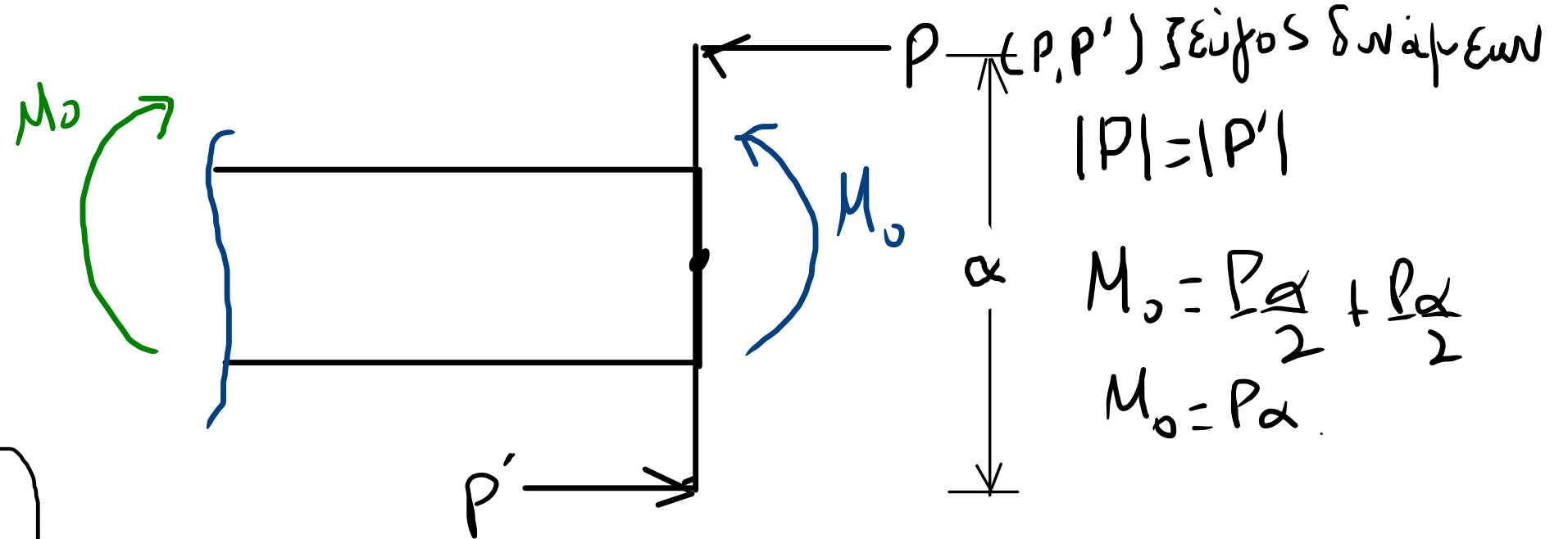
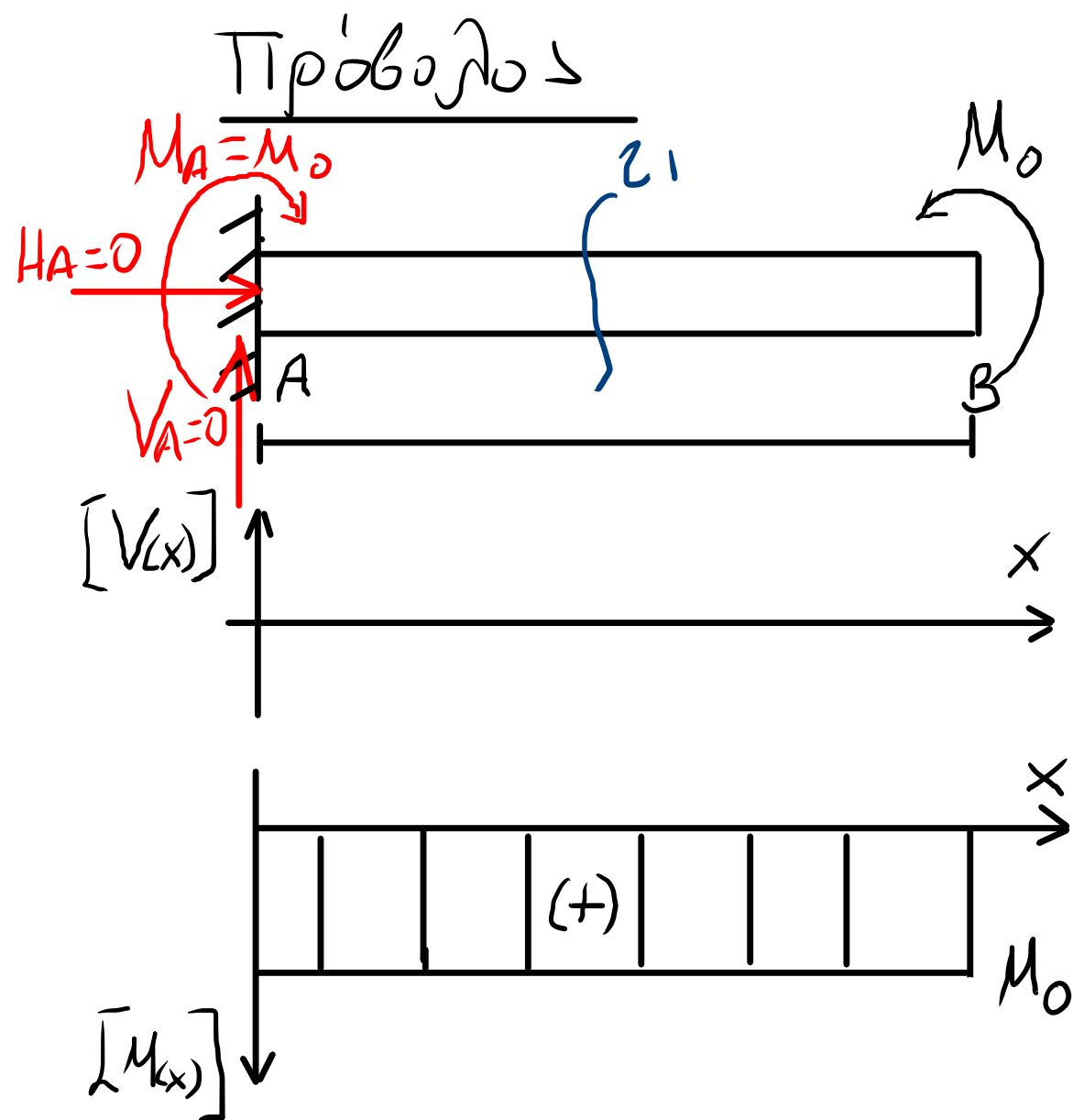
$$M(x) = -P(x - l) \quad \left| \begin{array}{l} \Delta: x=l-\alpha, M_{\Delta}=P \cdot \alpha \\ B: x=l, M_B=0 \end{array} \right.$$





α) Τμήμα ΓΔ: $V=0$, $M=P \cdot \alpha \neq 0$
 $\Rightarrow$ Καθαρή κάμψη

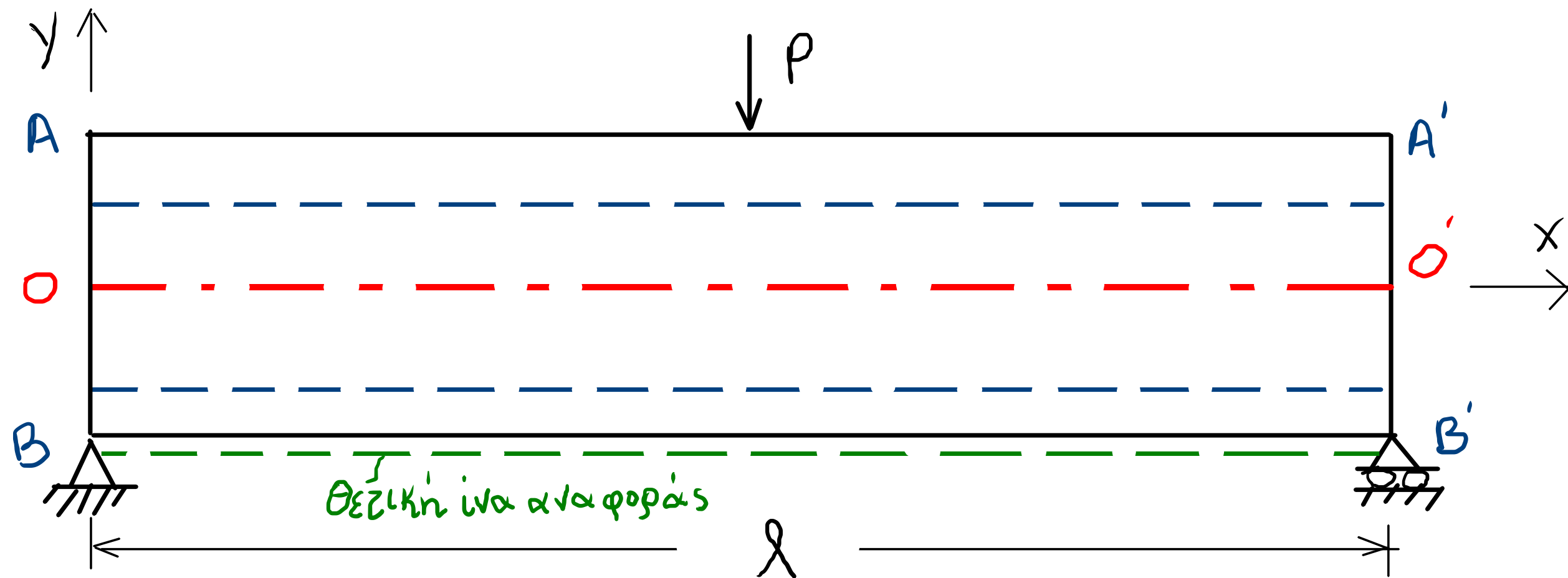
β) Τμήματα ΑΓ και ΔΒ: $V \neq 0$, $M \neq 0$
 $\Rightarrow$ Γενική κάμψη

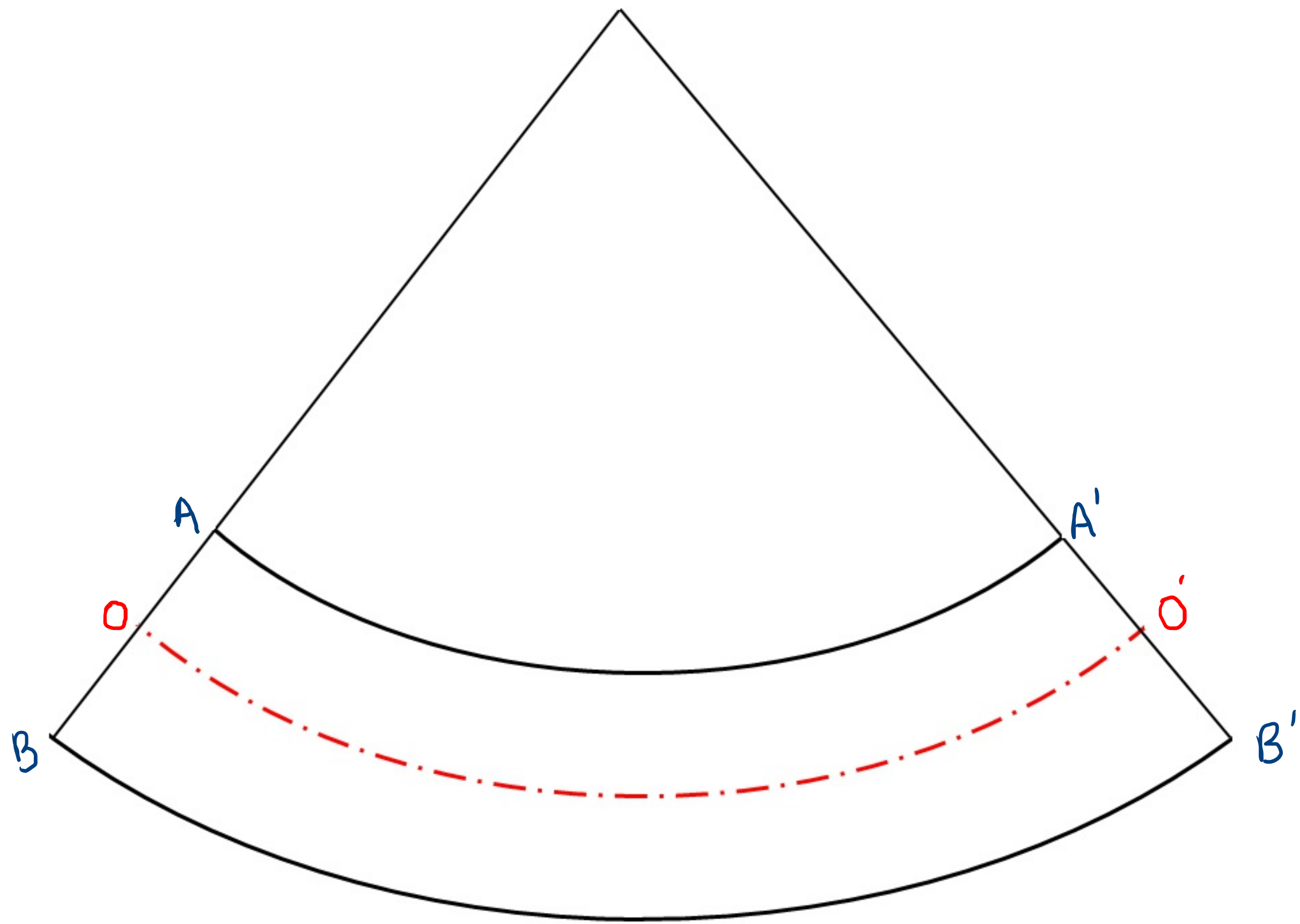


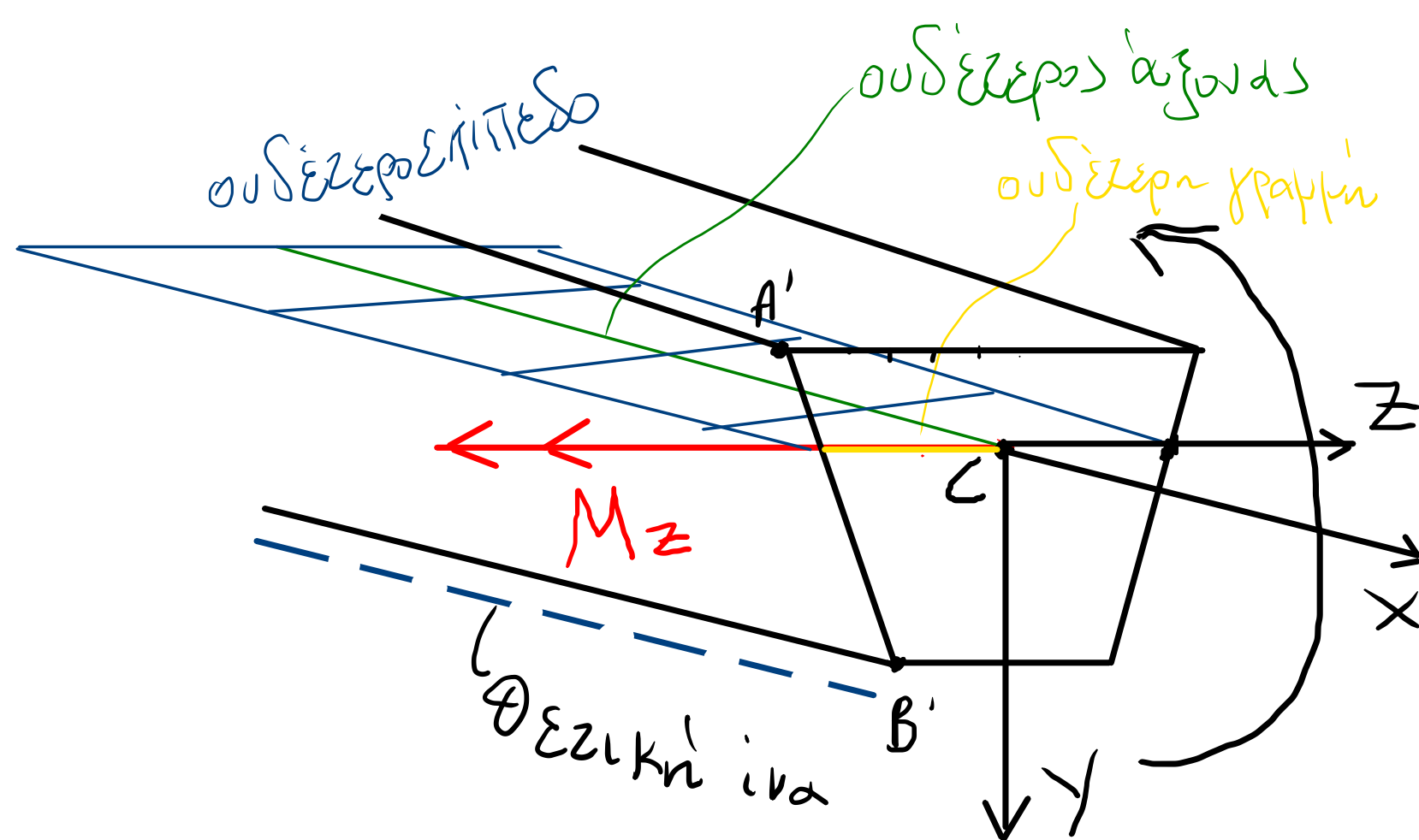
Καθαρή κάμψη προβόλου σε όλο το μήκος του

* Ανάπτυξη ορθών τάσεων και διατομές λόγω καμπτικής ροπής. Δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις αφού η εφελκυστική δύναμη είναι μηδενική.

Έννοια αβεζέρου επιπέδου και αβεζέρου άξονα σε καμπζόμενη δοκό:







$C_{x,y,z}$: κεντροβαρικό εύρημα αξόνων
 $x-y$: επίπεδο φόρτισης
 (επίπεδο συμπίεσης)



ουδέτερη ίνα: καταπονείται μόνο σε διάταση και δεν μεταβάλλει το μήκος της.
 $\epsilon = 0$

ουδέτερος άξονας: προκύπτει από την κοπή του ουδέτερου επιπέδου με το επίπεδο συμπίεσης της δοκού $x-y$

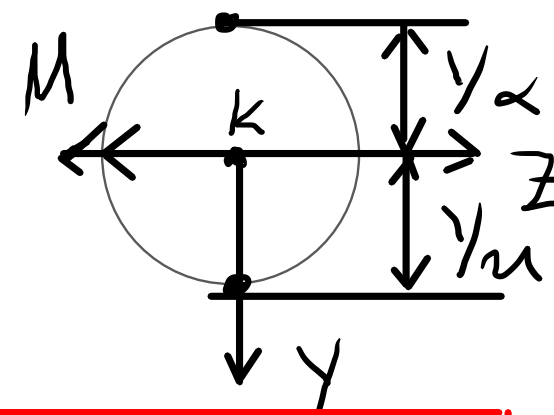
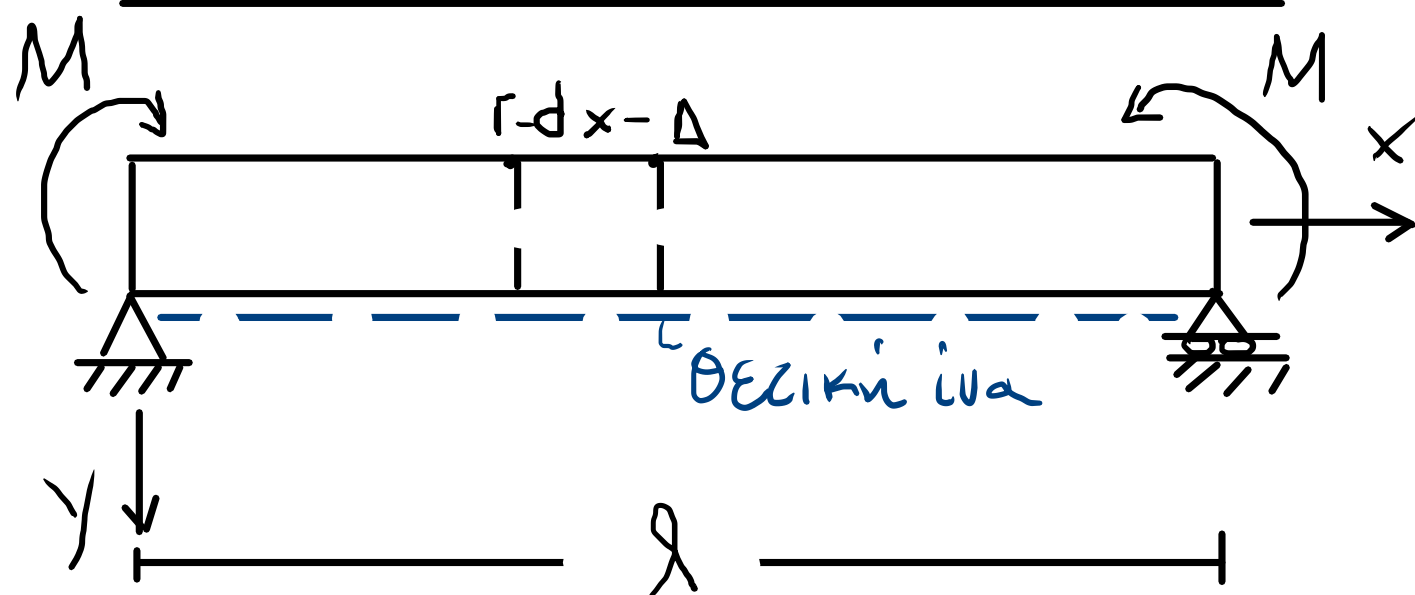
ουδέτερη γραμμή: ίχνος του ουδέτερου επιπέδου πάνω στη διατομή της δοκού

Θετική ροπή κάμψης: ορίζουμε τη θετική ίνα αναφοράς προς τα θετικά του y άξονα. Όταν η θετική ίνα εφελκύνεται (συμπίεσε του κανόνα της δεξιάς παλάμης) τότε η ροπή θεωρείται θετική

Παραδοχές κάμγης:

- α) Ισχύει η υπόθεση Bernoulli-Navier: Κάθε διατομή επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού προ της κάμγης, παραμένει έζω και γύρω την κάμγη
- β) Η διατομή της δοκού έχει έναν τουλάχιστον άξονα ευμμετρίας (κύριος άξονας) που περιέχεται στο επίπεδο της γόρζισης.
- γ) Ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή το υλικό συμπεριγράφεται ελαστικά
- δ) Η ροπή κάμγης θεωρείται θετική όταν τείνει να εφελκύσει την ίνα αναφοράς που λαμβάνεται ως η κατώτερη ίνα της δοκού (δηλ. στα θετικά του άξονα y)

Κατανόηση ορθών τάσεων



$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} y$$

$$M = \sigma \alpha \vartheta$$

σε όρους εις διαστάσεις

$$V = 0$$

καθαρή κάμψη

$$y_{\alpha} \leq y \leq y_{\eta}$$

ρ : ακτίνα καμπυλότητας της δοκού

E : μέτρο ελαστικότητας.

y_{α}, y_{η} : μέγιστες αποστάσεις από Ο.Γ.

(Ο.Γ. Γραμμή)

$$y_{\eta} > 0$$

$$y_{\alpha} < 0$$

$\kappa = \frac{1}{\rho}$: καμπυλότητα της δοκού.

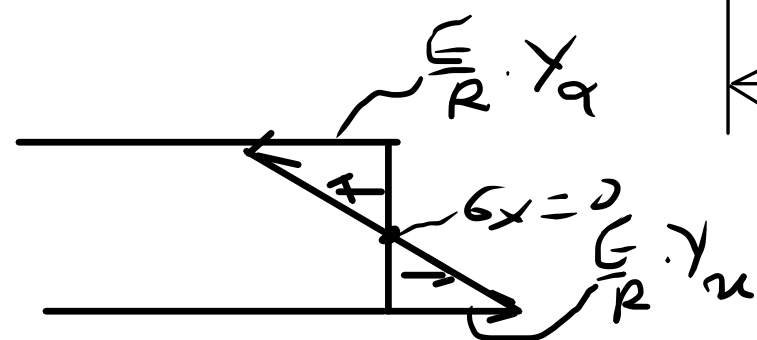
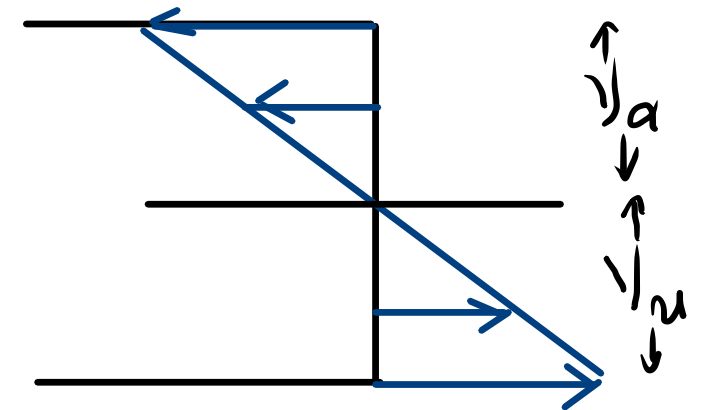
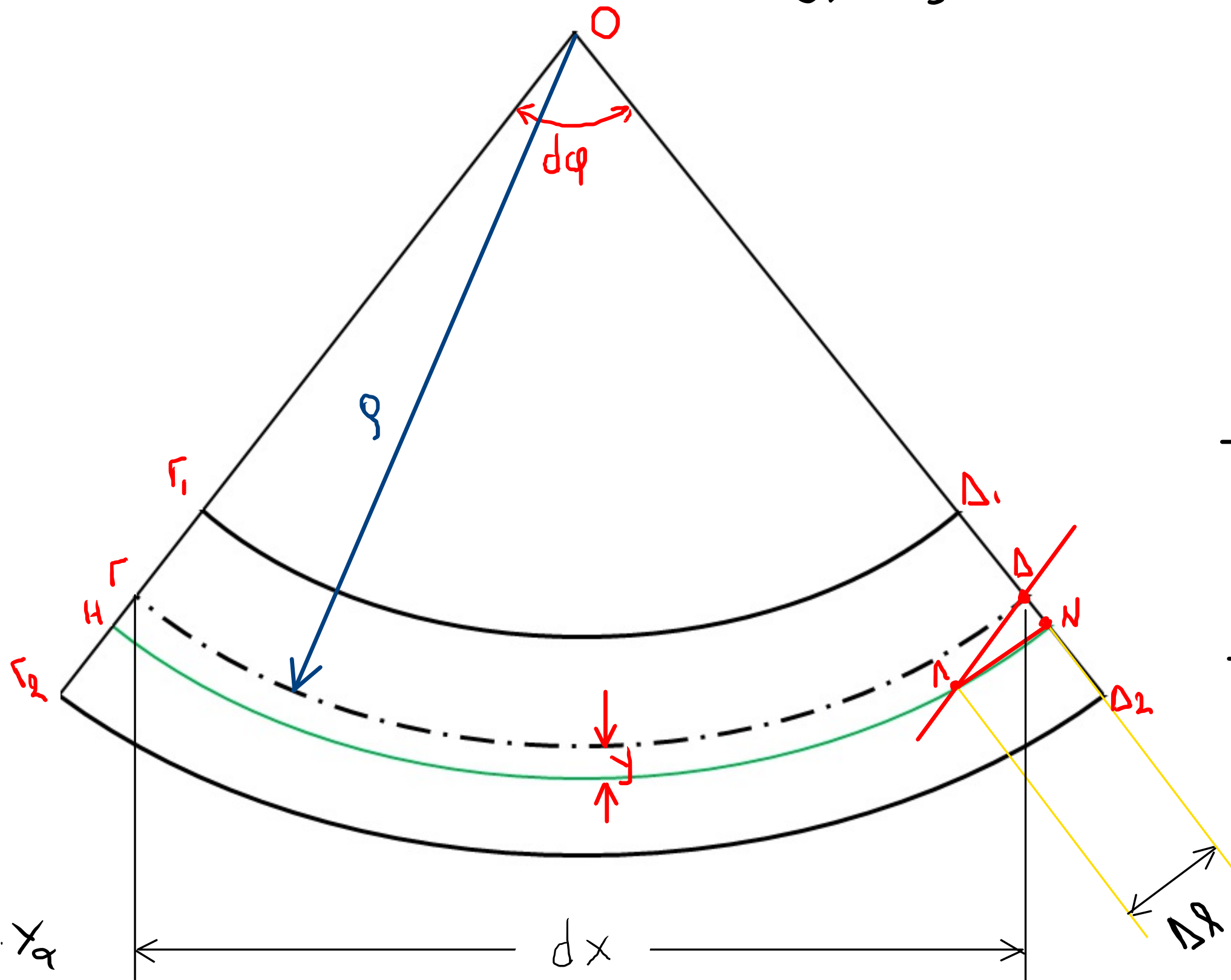
HN: ευχάια ως παρέρηη με ρΔ σε αρίοιζαη γ.
 $\Delta\eta // \Gamma_1 \Gamma_2$: Αρα $H\Lambda = \Gamma\Delta = dx$, $\Lambda N = \Delta\lambda$

Ομοια τρίγωνα $O\Gamma\Delta$ και $\Delta\Lambda N$
 $\frac{\Delta\lambda}{dx} = \frac{\gamma}{\rho}$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{dx} \rightarrow \text{Hooke}$$

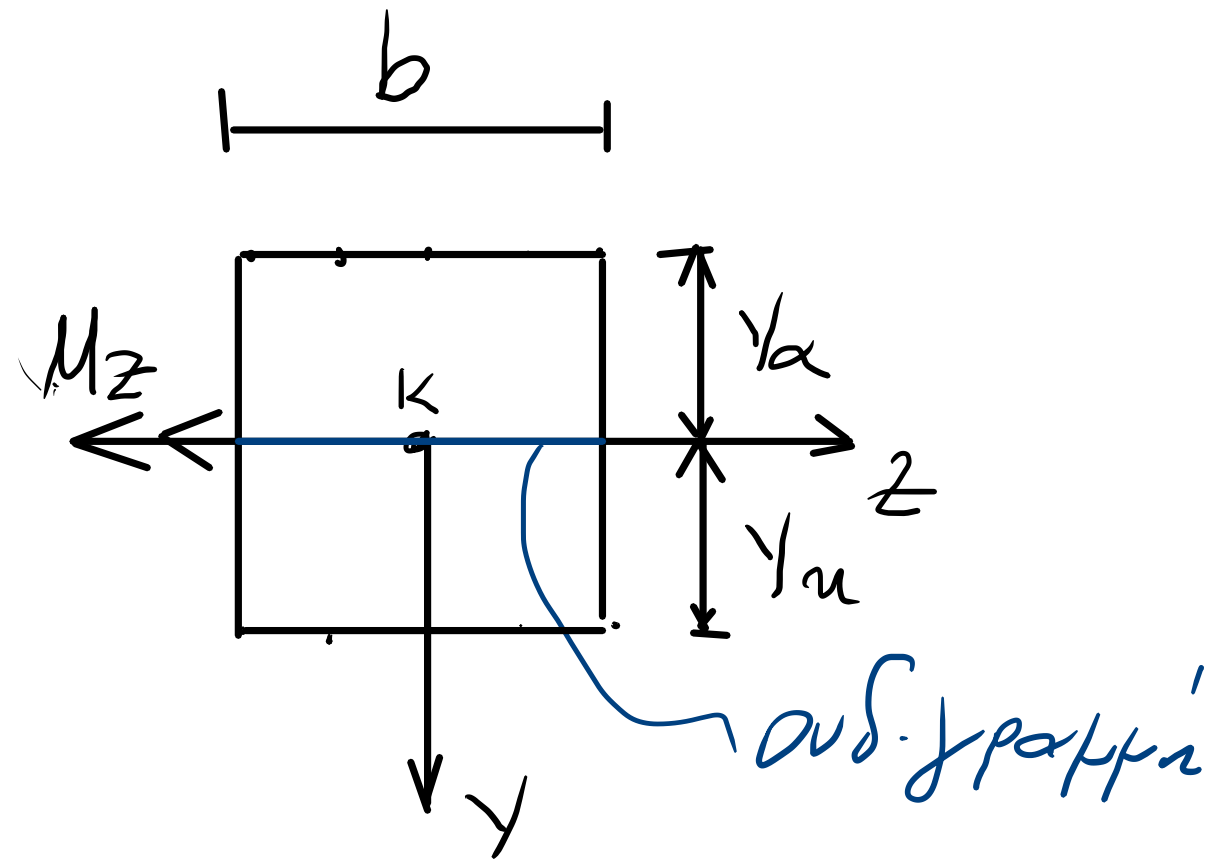
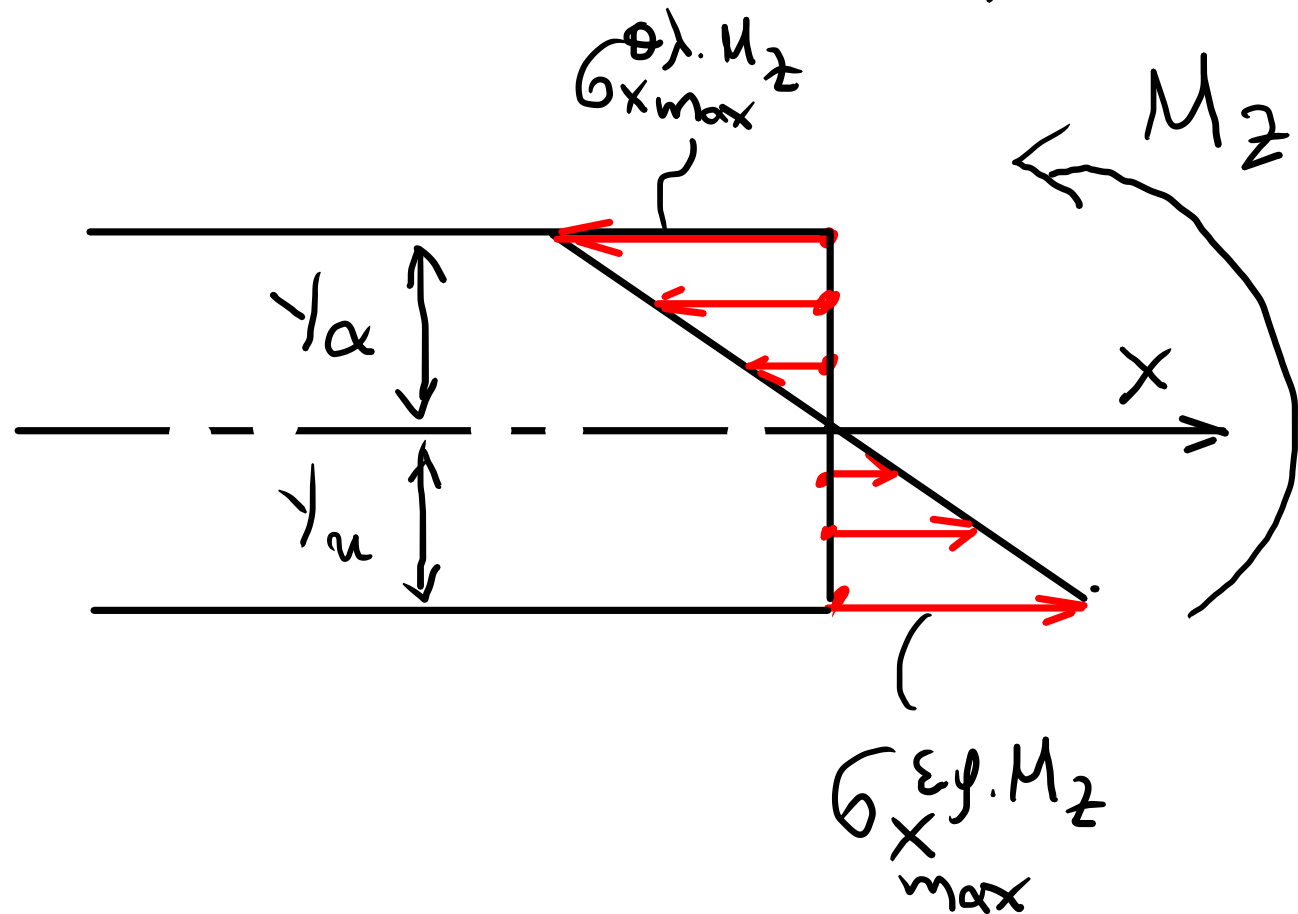
$$G_x = \bar{E} \epsilon_x = \bar{E} \frac{\Delta l}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_x = \frac{\bar{E}}{\rho} \gamma}$$



Ουδέτερη γραμμή:

Καλείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της διατομής που έχουν μηδενική ορθή τάση (ελεύθερα τάσεων)



$$\sigma_x = \frac{E}{R} y, \quad y_\alpha \leq y \leq y_u$$

Θερμειώδης νόμος της κάμψης:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y, \quad y_a \leq y \leq y_u$$

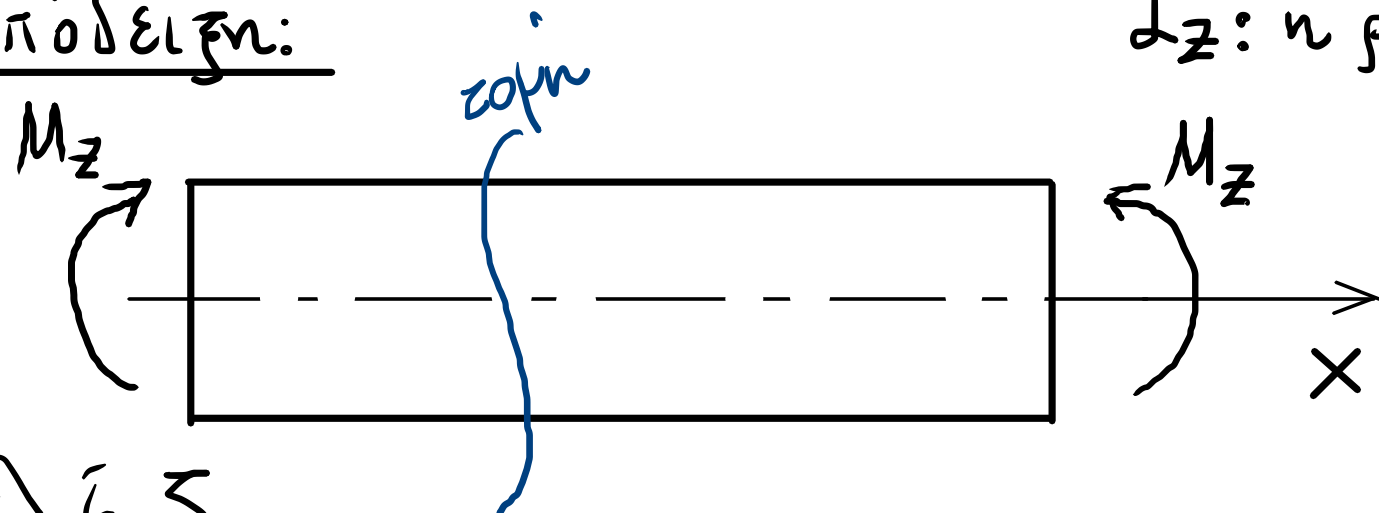
y : η απόσταση της εξεταζόμενης ίνας ως προς την αδ. γραμμή

$y_u > 0$: η απόσταση της κατώτατης ίνας

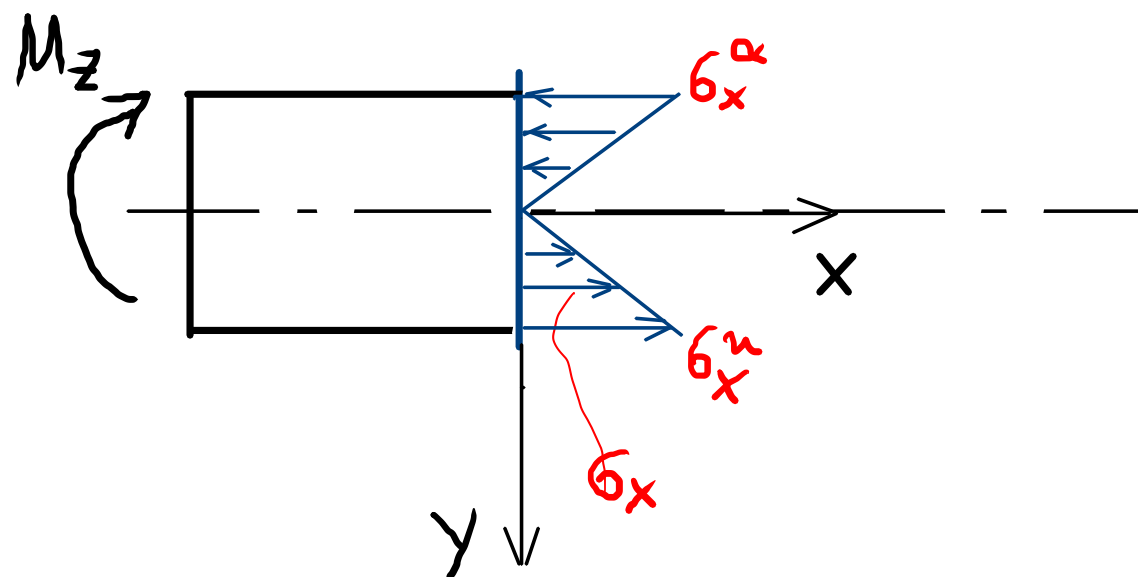
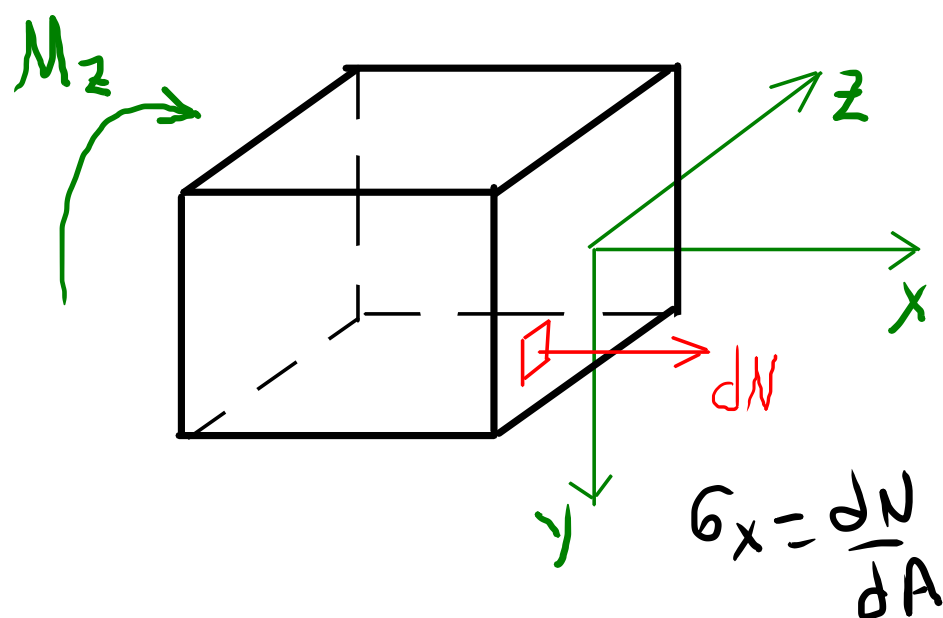
$y_a < 0$: η απόσταση της ανώτατης ίνας

I_z : η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα z

Απόδειξη:



Δ.Ε.Σ.



Από εξίσωση ισορροπίας των ροπών κάμψης

$$M_z - \int_A y dN = 0 \Rightarrow M_z = \int_A y \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA, \quad \left(\sigma_x = \frac{E}{\rho} y \right)$$

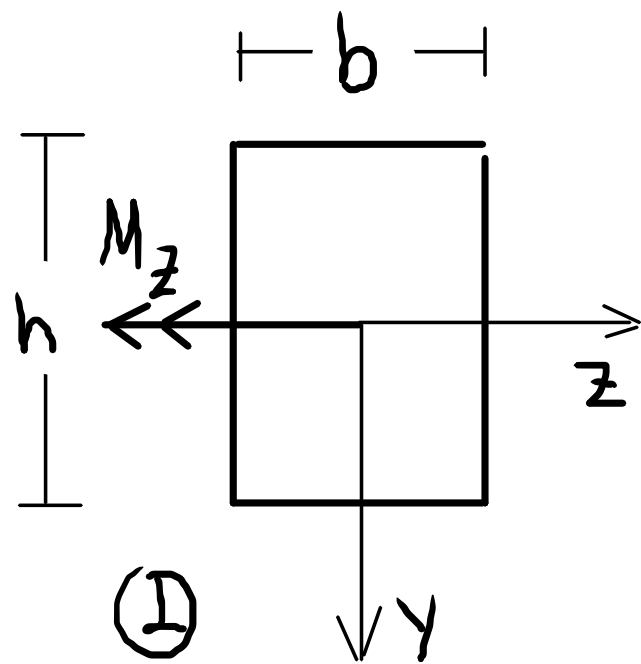
$$\Rightarrow M_z = \frac{E}{\rho} I_z \Rightarrow M_z = \frac{\sigma_x}{y} I_z \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y}$$

Η αναπαραγόμενη σ_x είναι ανάλογη της ροπής κάμψης, της απόστασης της εξεταζόμενης ίνας από την Ο.Γ. και αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδρανείας της διατομής. Στην ουδέτερη γραμμή (Ο.Γ.) η σ_x είναι μηδέν.

Ερώτηση:

Ποιός από τους δύο τρόπους τοποθέτησης της διατομής μιας καρτερένιας δοκού οδηγεί σε μικρότερες τάσεις;

$$h > b$$

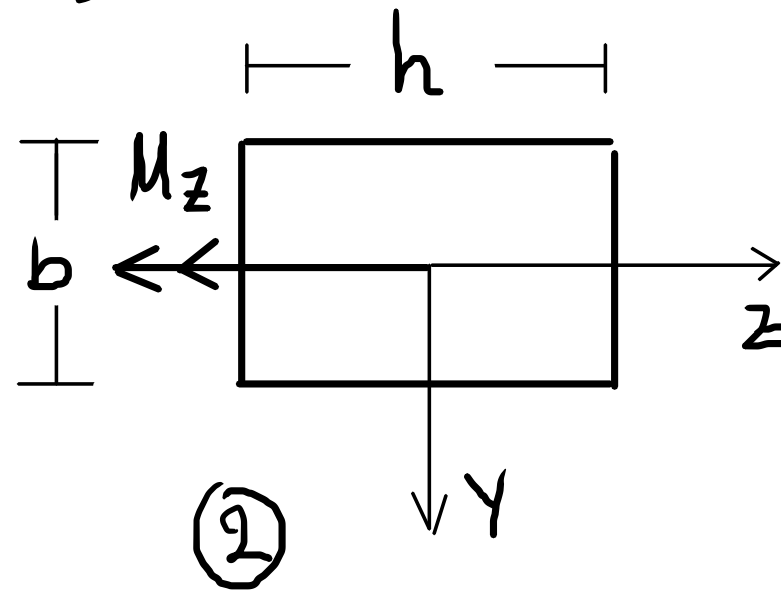


$$I_z^{(1)} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$|y_{\max}|^{(1)} = \frac{h}{2}$$

$$W_z^{(1)} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^2$$

$$W_z^{(1)} = \left(\frac{1}{6} h b\right) h >$$



$$I_z^{(2)} = \frac{1}{12} h b^3$$

$$|y_{\max}|^{(2)} = \frac{b}{2}$$

$$W_z^{(2)} = \frac{\frac{1}{12} h b^3}{\frac{b}{2}} = \frac{1}{6} h b^2$$

$$W_z^{(2)} = \left(\frac{1}{6} h b\right) b \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{M_z}{I_z} |y_{\max}| = \frac{M_z}{\frac{I_z}{|y_{\max}|}} = \frac{M_z}{W_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} : \text{ποινή αυξίζοντας επιφάνειας}$$

για $M_z = \text{const}$

$$\textcircled{\sigma_{x_{\max}}^{(1)}} < \sigma_{x_{\max}}^{(2)}$$

Επίλογος.

Ακτίνα καμπυλότητας - Γωνία βροφής:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{\rho} y \\ \sigma_x &= \frac{M_z}{I_z} y \end{aligned} \right\} \frac{E}{\rho} y = \frac{M_z}{I_z} y \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}}$$

κ : Καμπυλότητα δοκού
 ρ : ακτίνα καμπυλότητας
 EI_z : δυσκαμψία δοκού
ή καρπική βιβαρότητα

για $M_z = \text{const.}$ $\kappa \uparrow$ για $EI_z \downarrow$
για $EI_z = \text{const.}$ $\kappa \uparrow$ για $M_z \uparrow$

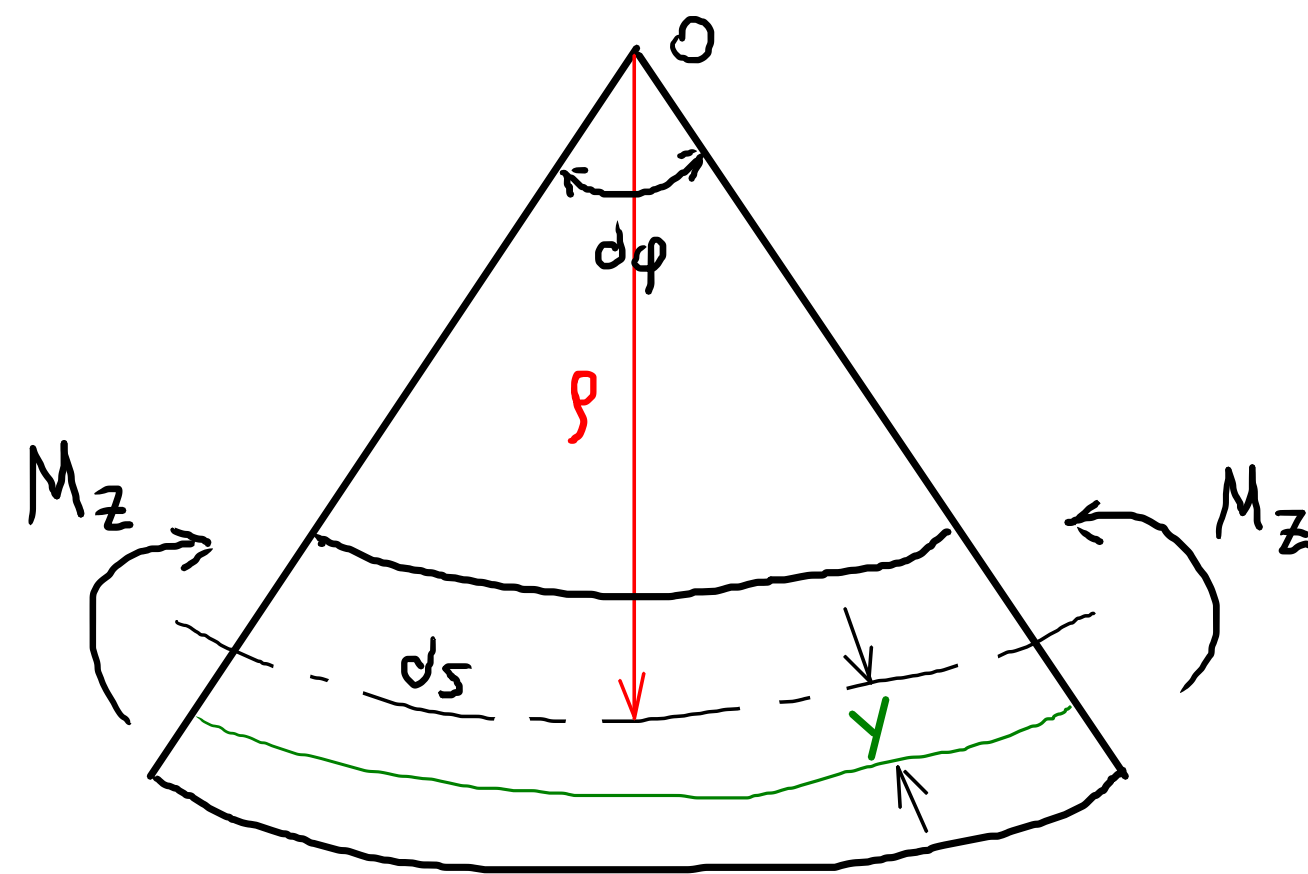
Σχετική γωνία βροφής $d\varphi$ μεταξύ δύο διαδοχικών διατομών που απέχουν βιοχειώδη απόσταση ds

$$ds = \rho \cdot d\varphi \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_z}{EI_z}$$

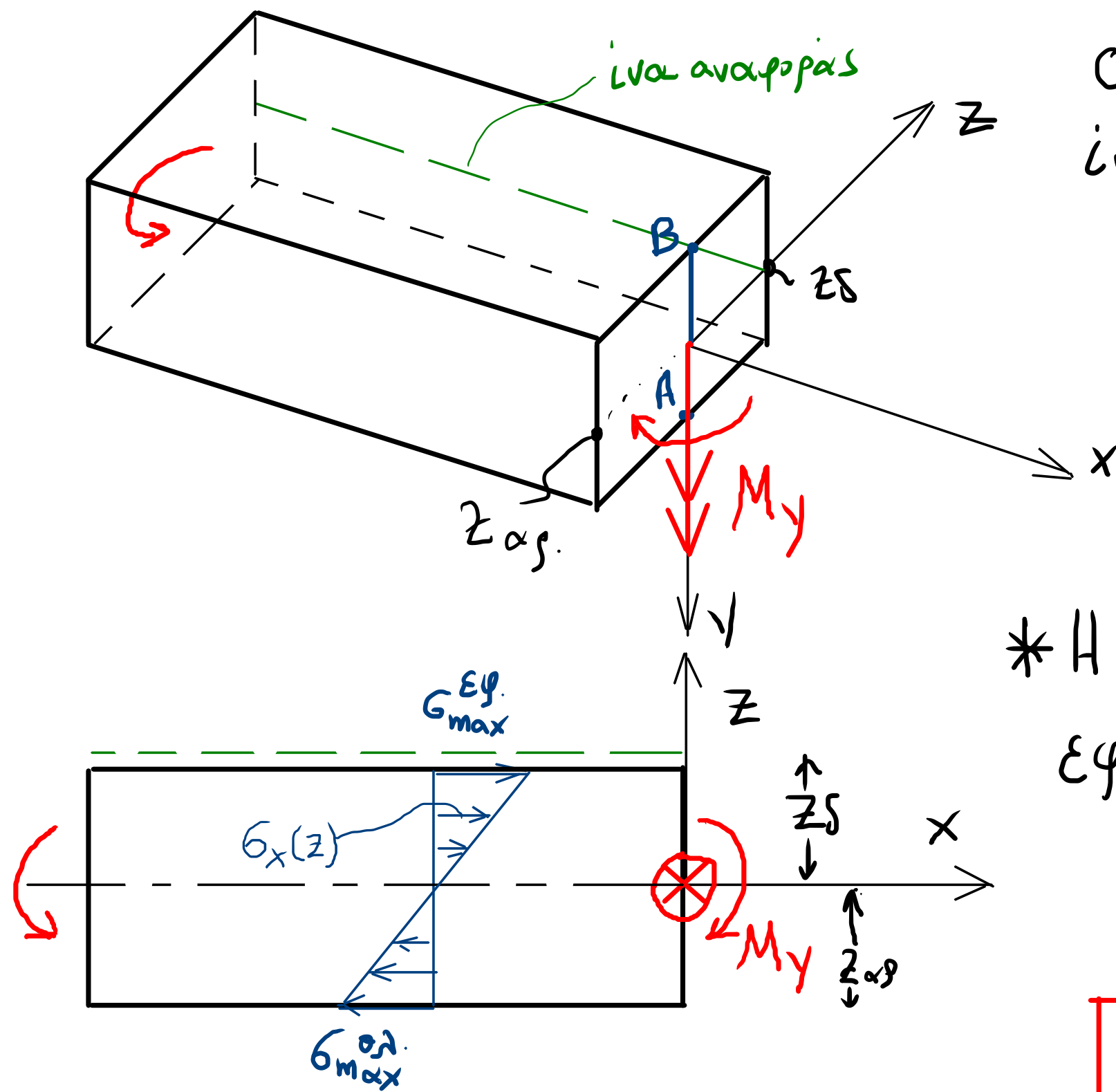
$$\Rightarrow d\varphi = \frac{M_z}{EI_z} ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{M_z \cdot l}{EI_z}}$$

ολική γωνία βροφής
για όλη τη δοκό μήκους l



Οριζόντιο επίπεδο φόρτισης:

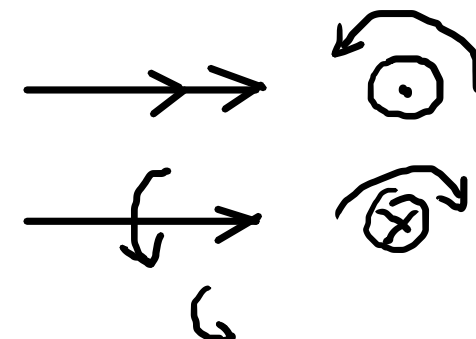


επίπεδο φόρτισης xz (οριζόντιο)

Ουδέτερη γραμμή (Ο.Γ.) η ευθεία AB στον y άξονα
 línea αναφοράς: σταθερικά τον άξονα z.



Κανόνας δεξιάς πιατάκης



* Η ροπή M_y είναι θετική γιατί τείνει να εφελκύσει την línea αναφοράς

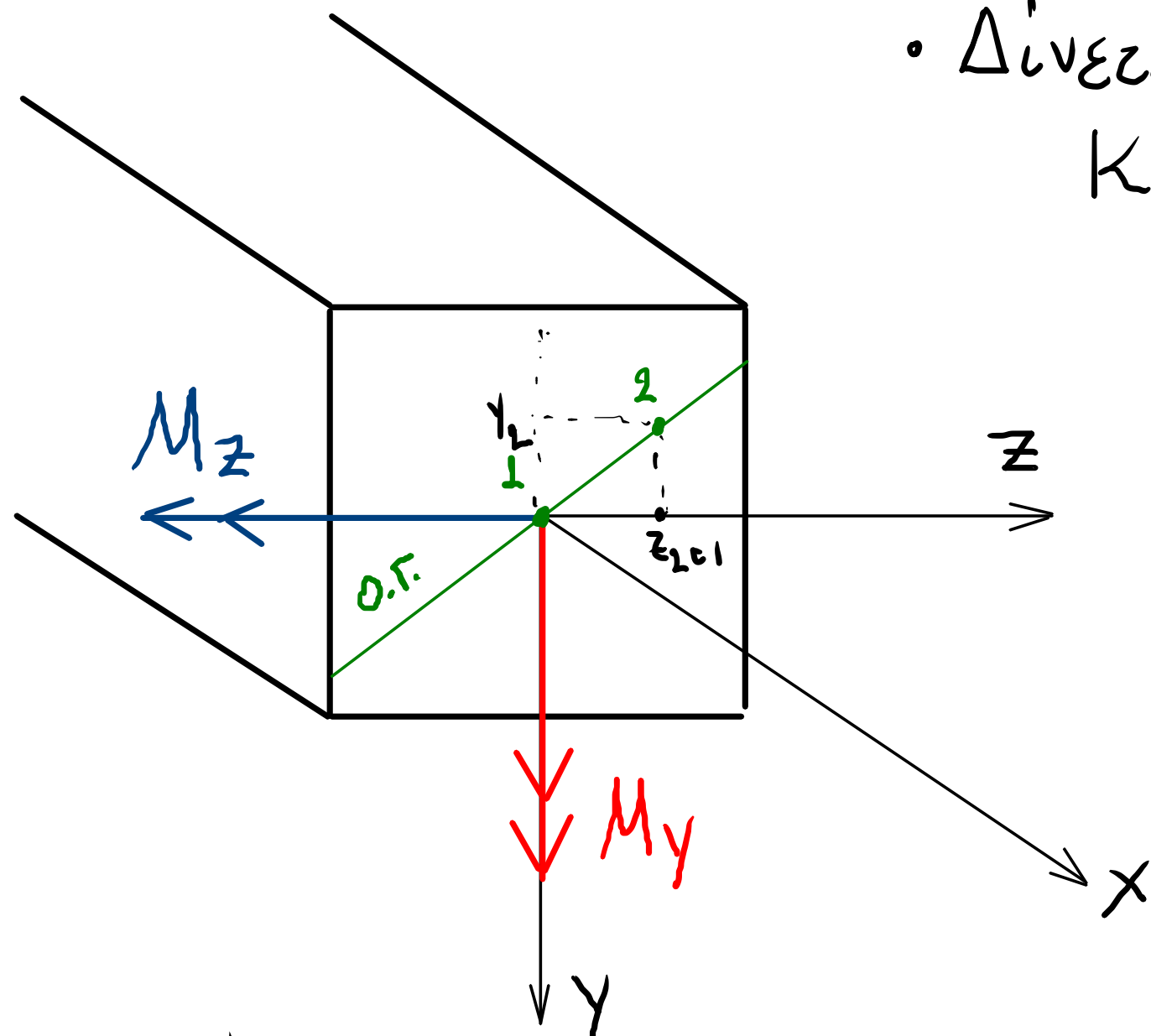
Ορθές τάσεις $\sigma_x(z)$

Κατανομή ορθών τάσεων
 σε μια διατομή της δοκού

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z, \quad z_{ap} \leq z \leq z_s$$

$z_{ap} < 0, z_s > 0$
 θέσεις αποκαρυσμένων υλών

Διπλή κάμψη διπλά συμμετρικής διατομής:



- Δίνεται ότι M_y και M_z θετικές ροπές
Κατανομή ορθών τάσεων $\sigma_x(y, z)$ πάνω
στη διατομή:

$$\sigma_x(y, z) = + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (1)$$

Σε τυχαίο σημείο $A(y_A, z_A)$ πάνω στην διατομή η ορθή τάση που αναπτύσσεται προκύπτει από την εξ. (1) αντικαθιστώντας $y = y_A, z = z_A$

* Προσοχή στην εξ. (1) τα πρόσημα:

- Η M_z προκαλεί εφελκυσμό στις ίνες με $y > 0$
- Η M_y προκαλεί εφελκυσμό στις ίνες με $z > 0$

Έυρεση ουδέτερης γραμμής:

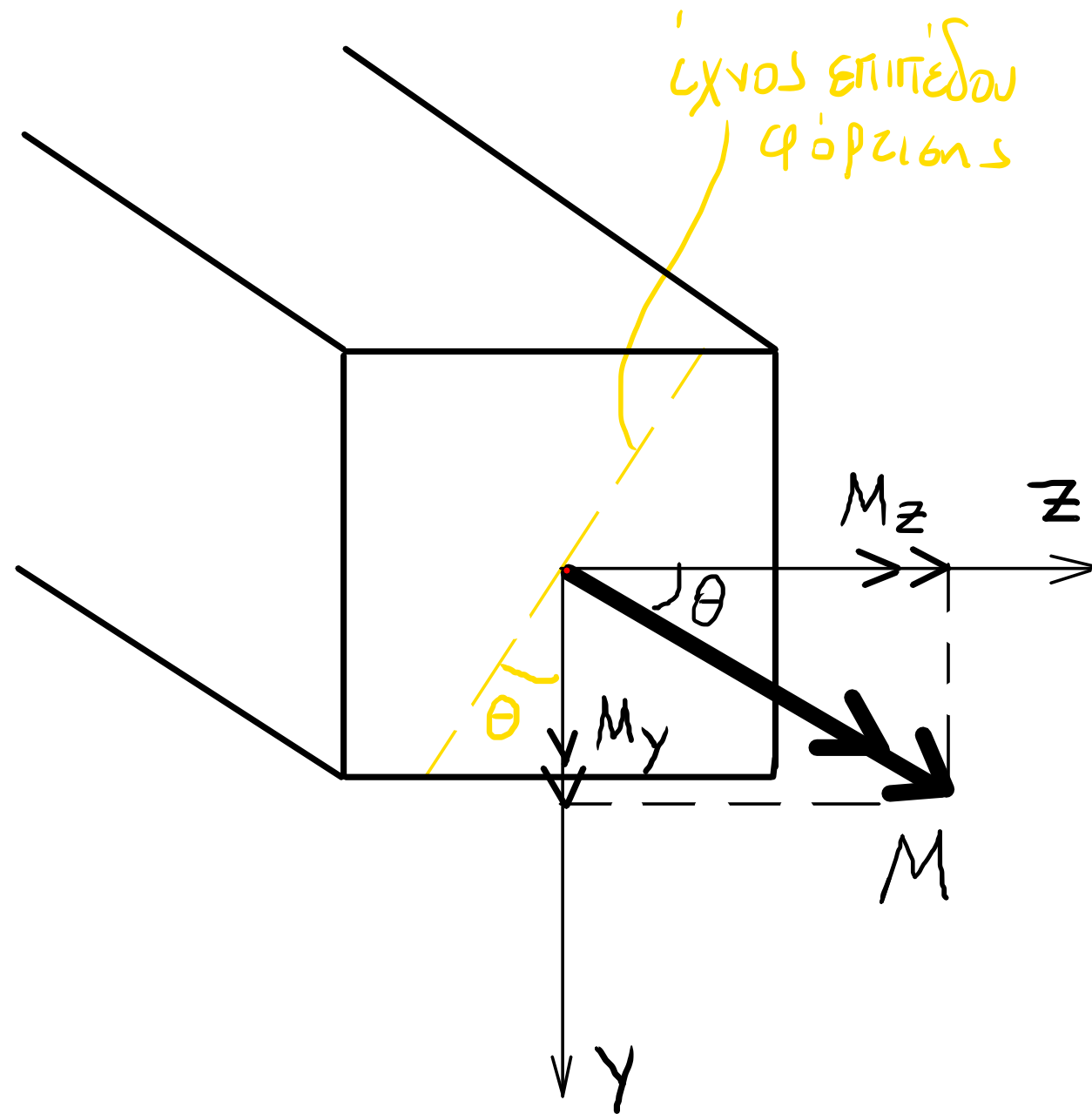
Θέτω $\sigma_x(y, z) = 0 \Rightarrow y = - \frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z} z$ εξίσωση ευθείας

Βρίσκω δύο σημεία πάνω στην διατομή με $\sigma_x = 0$ και τα ενώνω με μια γραμμή

για $z_1 = 0, y_1 = 0$

για $z_2 = L, y_2 = - \frac{I_z}{M_z} \frac{M_y}{I_y}$

Λοξή κάμψη σε διπλά συγγετρική διατομή:



Αναλύουμε τη ροπή M που ασκείται σε επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ σε σχέση με το εφκάρδιο επίπεδο σε συνιστώσες

M_z και M_y οπότε έχουμε την περίπτωση της διπλής κάμψης

$$M_z = M \cos \theta, \quad M_y = M \sin \theta$$

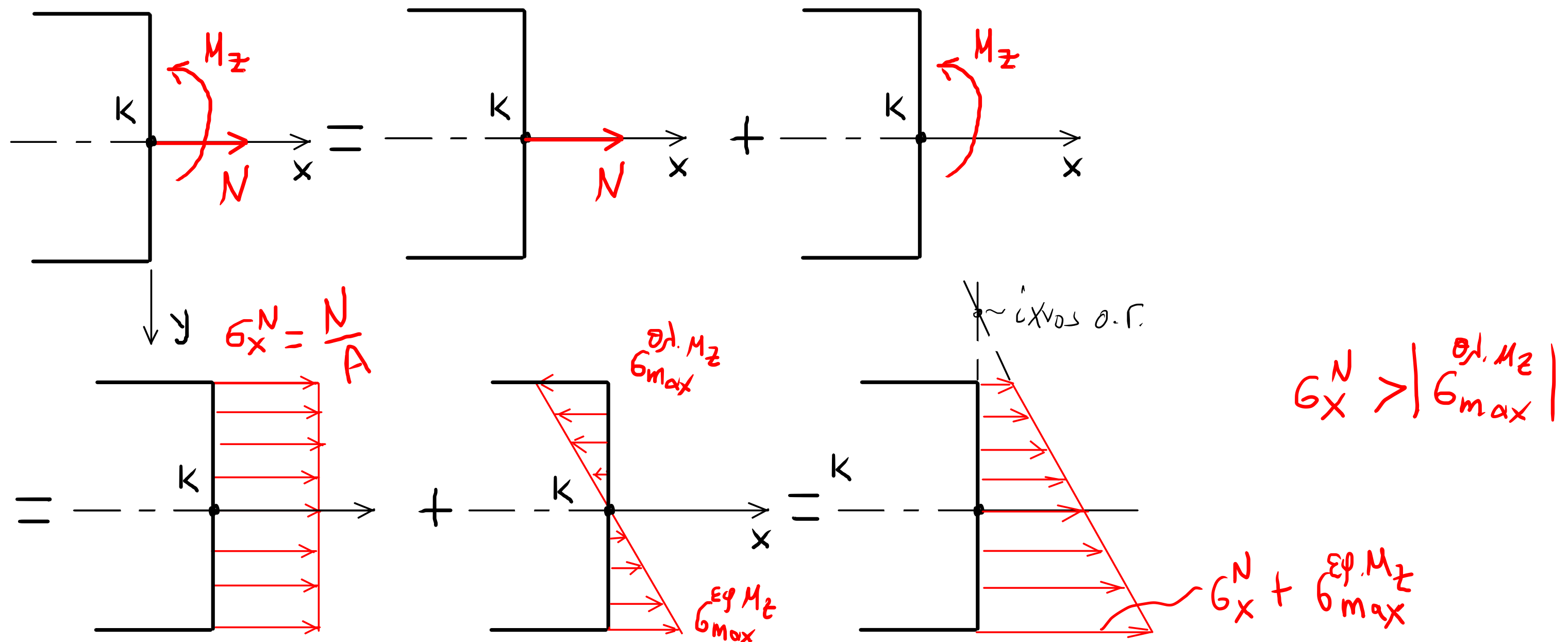
$$\sigma_x(y, z) = - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

*Προσοχή σε πρόσημα στην παραπάνω σχέση

Σύνθετες καταπονήσεις με κάμψη:

• Κάμψη και αξονική καταπόνηση:

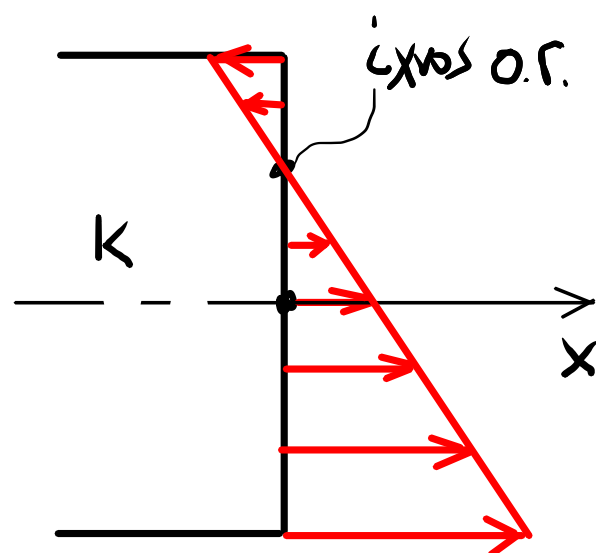
Σε δοκό διπλά συγγενικής διατομής συνυπάρχουν αξονική δύναμη N (κεντροβαρική) και ροπή κάμψης M_z . Για να βρούμε την κατανομή των ορθών τάσεων ότι διαδο-
γική εφαρμόζουμε την Αρχή της επαλληλίας. Εξετάζουμε την κατανομή των ορθών
τάσεων από κάθε καταπόνηση ξεχωριστά (αξονική και καμπτική καταπόνηση) και
τις προθέτουμε για να βρούμε την ολική κατανομή όπως στο σχήμα:



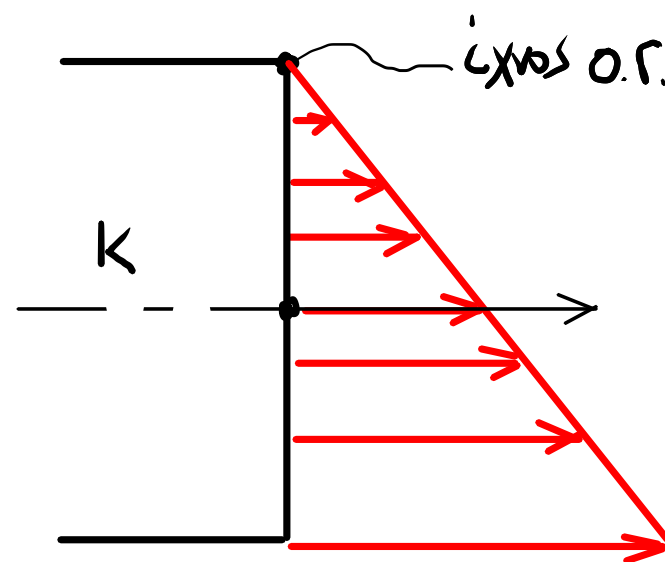
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y, \quad y_a \leq y \leq y_u$$

* Προβόλη στα πρόσηφα των τάσεων

$$\text{Εάν } \sigma_x^N < |\sigma_{\max}^{\sigma \lambda M_z}|$$



$$\text{Εάν } \sigma_x^N = |\sigma_{\max}^{\sigma \lambda M_z}|$$



Λογική κέρση και αξονική δύναμη:

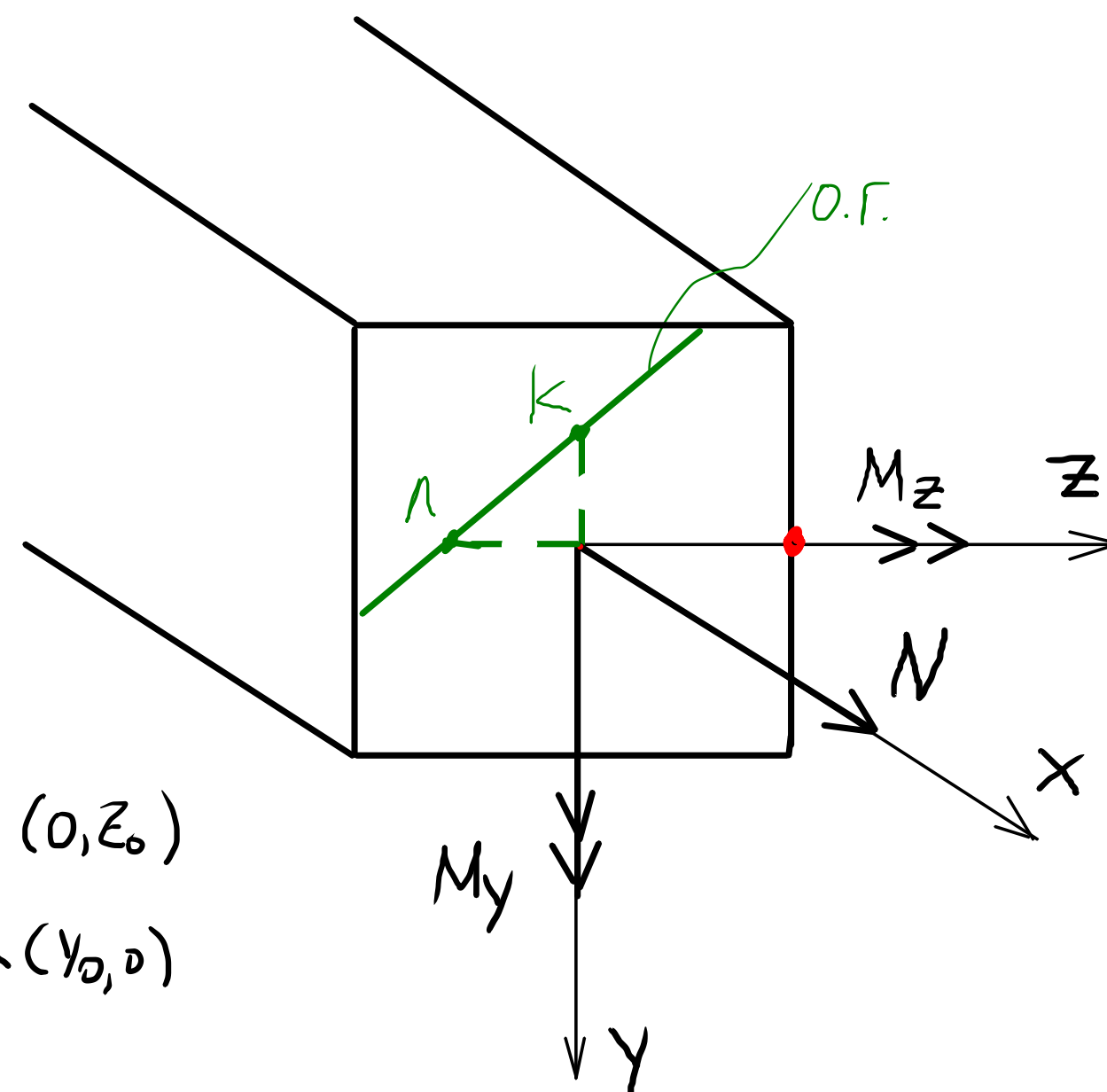
$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\text{Ο.Γ.: } \sigma_x = 0 \Rightarrow y = \frac{I_z}{M_z} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \right) \quad \begin{array}{l} \text{για } y=0 \Rightarrow z_0, \Lambda(0, z_0) \\ \text{για } z=0 \Rightarrow y_0, \kappa(y_0, 0) \end{array}$$

* Η Ο.Γ. δεν διέρχεται από το κ.β. Κ έχει μετατοπιστεί λόγω του αξονικού φορτίου Ν. Για να τη βρω λύνω $\sigma_x = 0$.

$$y_{\text{Ο.Γ.}} = - \frac{N}{A} \frac{I_z}{M_z} \quad (\text{όσο παράδειγμα τας})$$

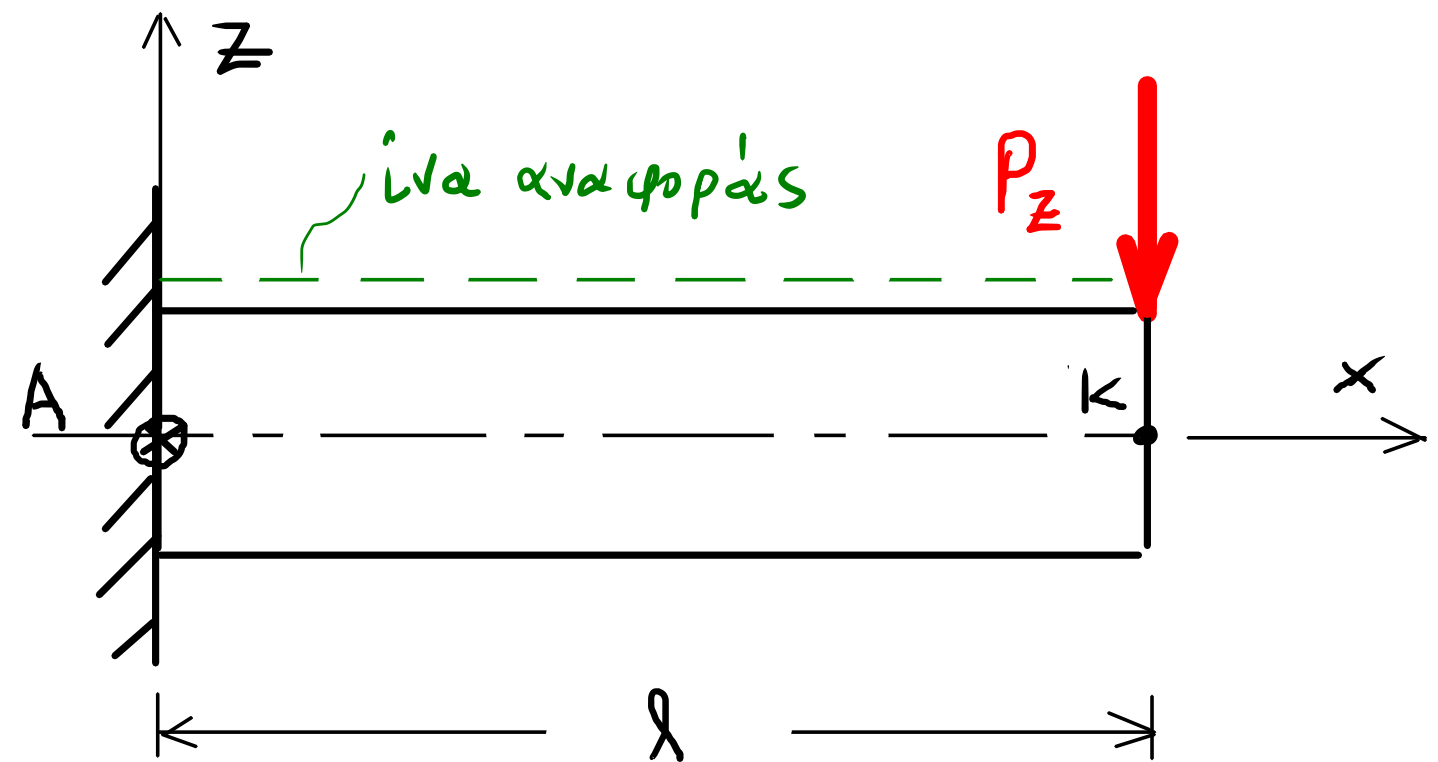
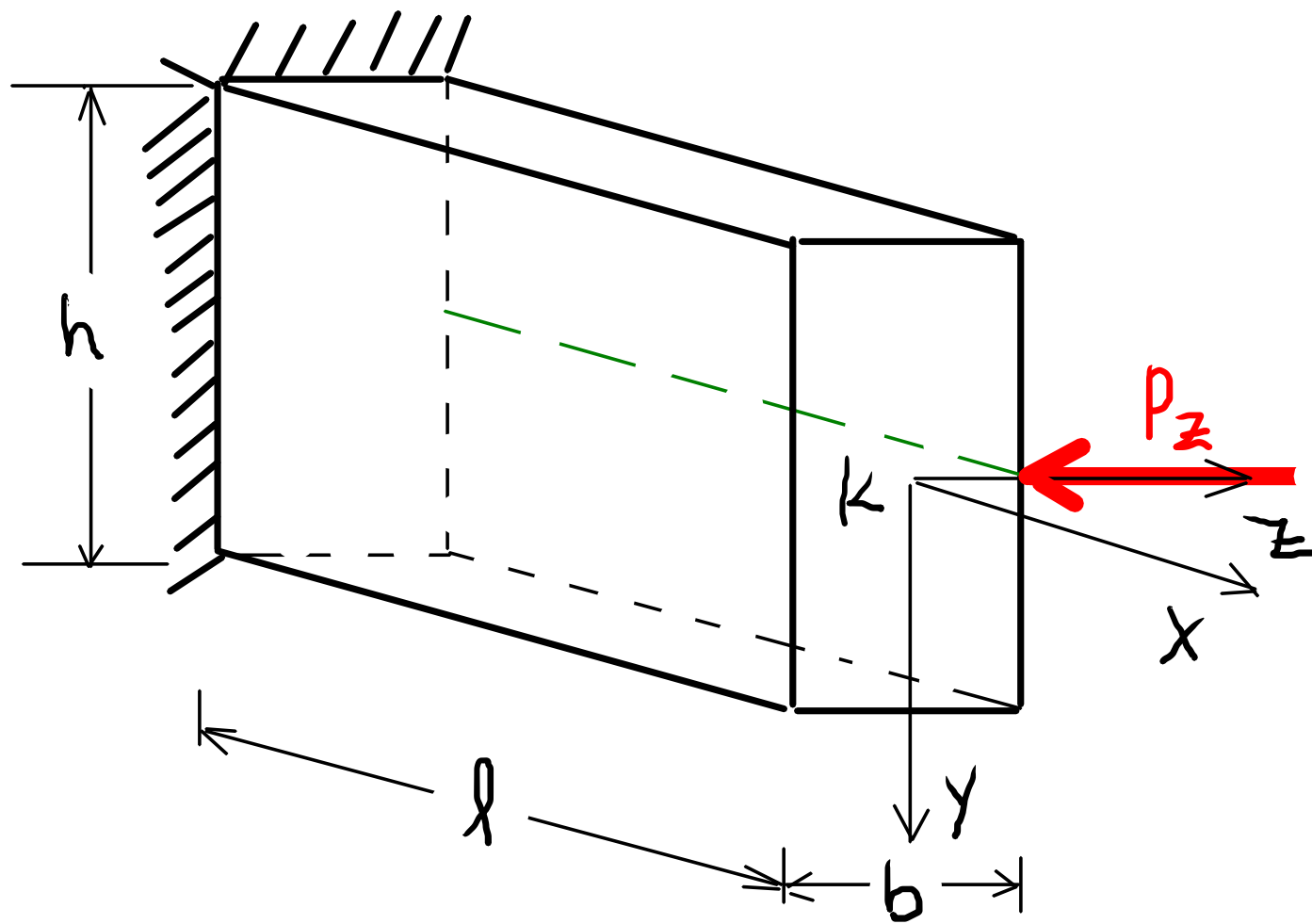
Ο.Γ. ευθεία παράλληλη στον z άξονα

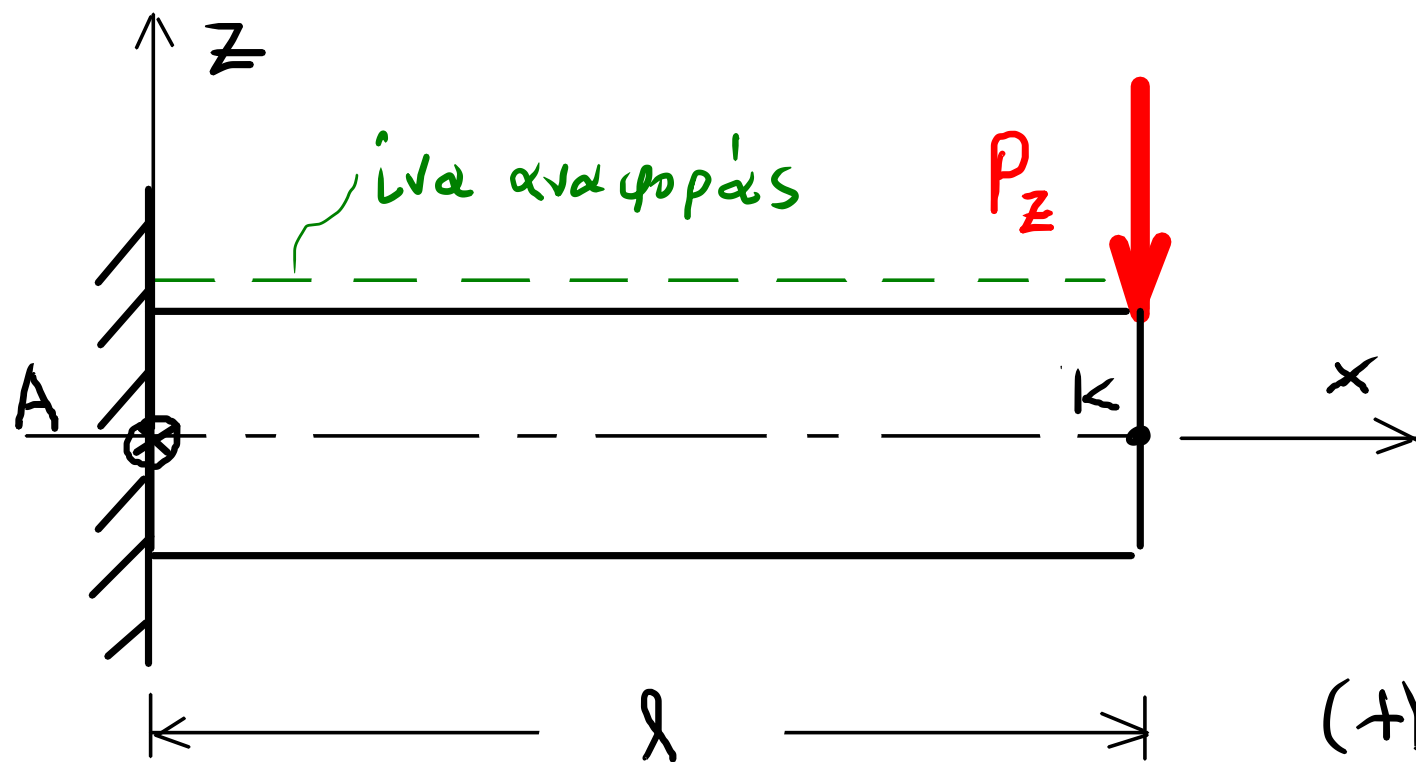


Παράδειγμα 8.7 (Βιβλίο Βουδούνη)

Πρόβολος μήκους $l=4\text{m}$ ορθογωνικής διατομής $b \times h = 10 \times 20\text{cm}^2$ φέρει οριζόντια δύναμη $P_z = 5\text{kN}$. ληζούνται οι μέγιστες ορθές τάσεις.

Αν ληφθεί υπόψη και το ίδιο βάρος της δοκού $q = 2\text{kN/m}$ πόσες είναι τότε οι μέγιστες ορθές τάσεις;



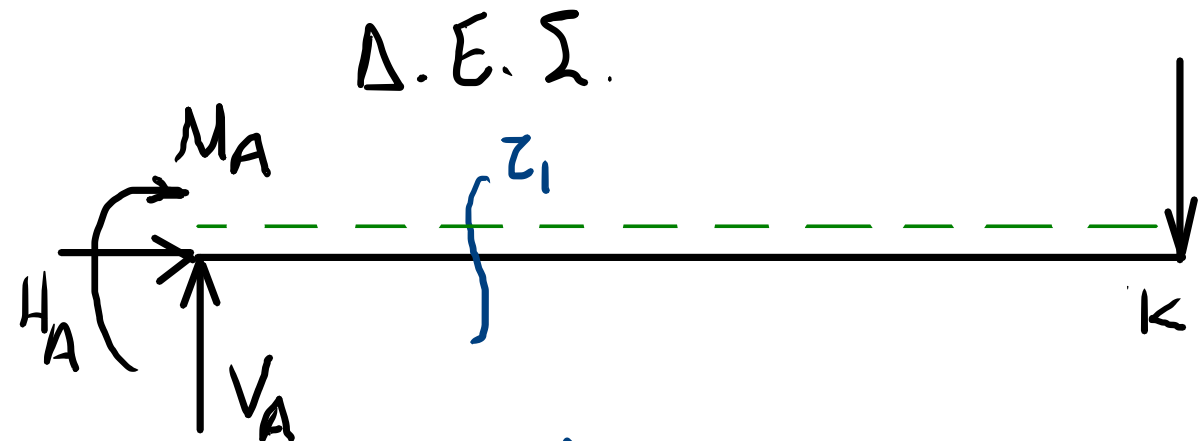


$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 0}$$

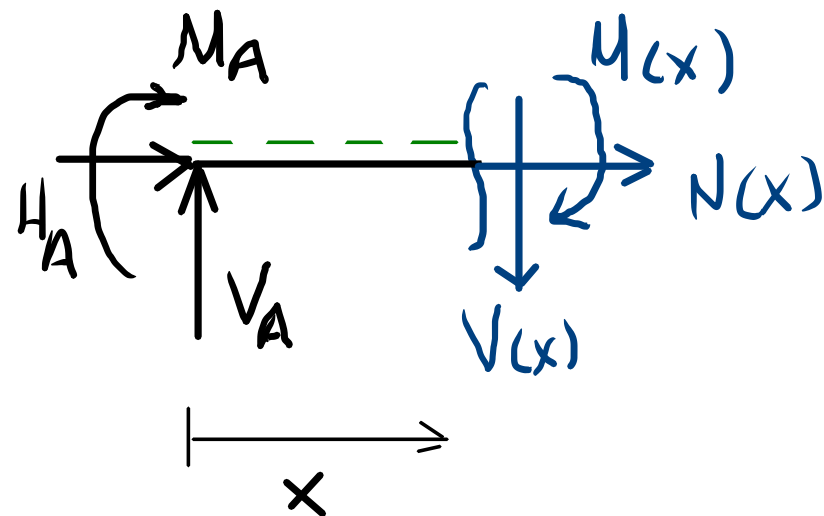
$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - P_z = 0 \Rightarrow \underline{V_A = P_z = 5 \text{ kN}}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - P_z \cdot l = 0 \Rightarrow \underline{M_A = -P_z \cdot l = -5 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow \underline{M_A = -20 \text{ kN}\cdot\text{m}}$$



Τομή $z_1: 0 \leq x \leq l$



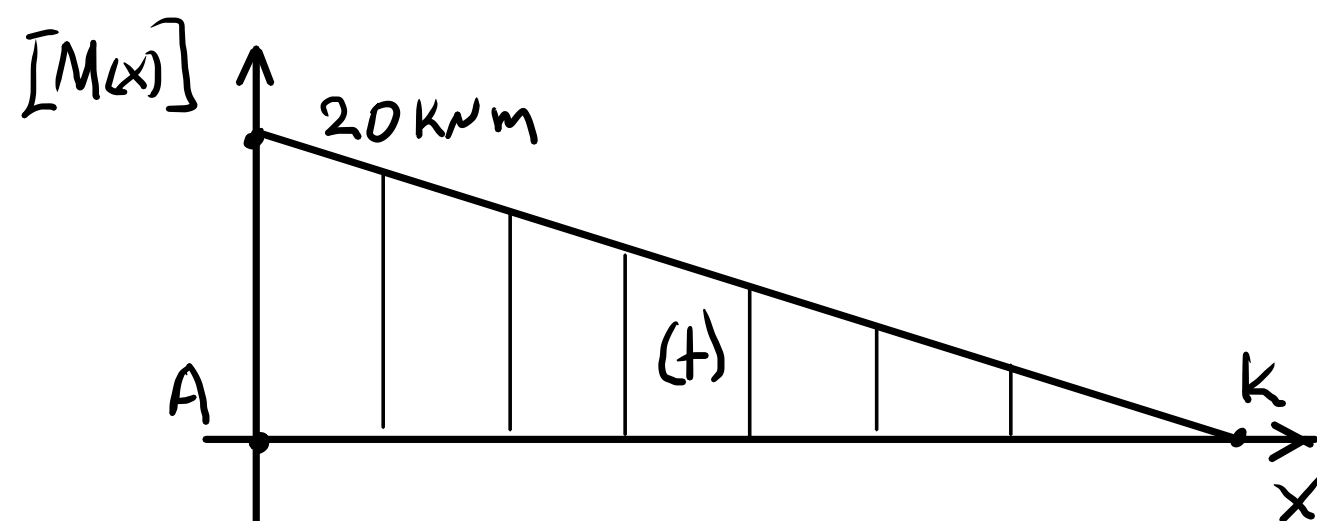
$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = -H_A = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = V_A = 5 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M_x = 0 \Rightarrow -M_A - V_A \cdot x - M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -M_A - V_A \cdot x$$

$$\Rightarrow M(x) = 20 - 5x \quad \left\{ \begin{array}{l} A^+, x=0, M(0) = 20 \text{ kNm} \\ K, x=l=4, M(4) = 0 \end{array} \right.$$

Διάγραμμα εσωτερικής καμπτικής ροπής:



* Στο σημείο Α δεν πλάκωσι αναπτύσσεται η μέγιστη ροπή κάμψης $M_y^{\max} = 20 \text{ kNm}$

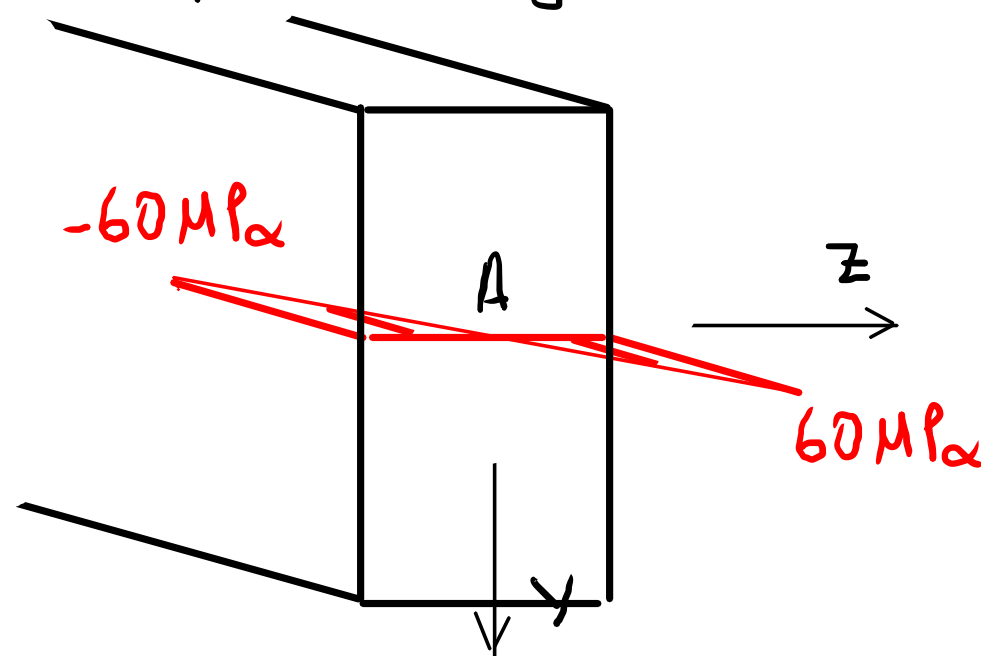
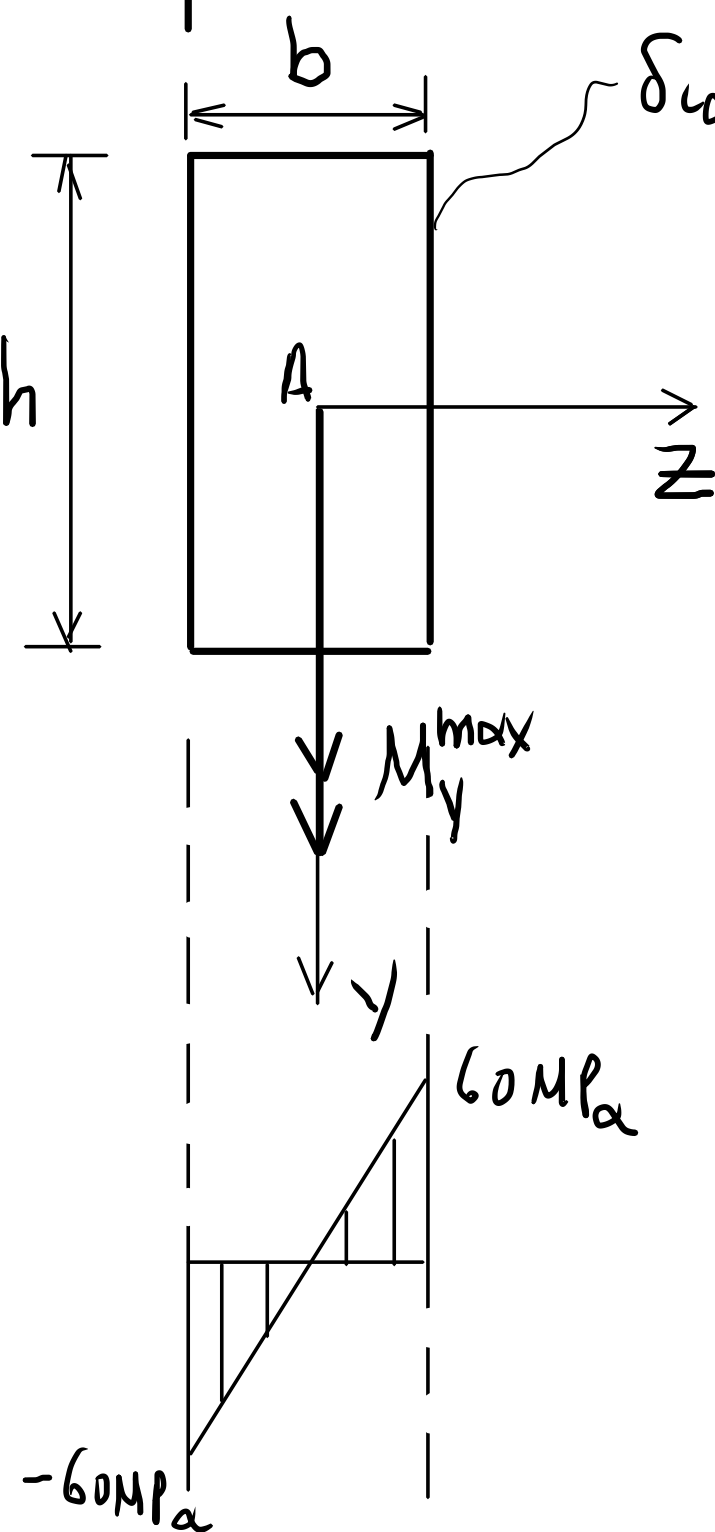
$$\text{Λόγω } P_z \rightarrow M_y^{\max} \rightarrow \sigma_x = \frac{M_y^{\max}}{I_y} \cdot z$$

$$I_y = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{1}{12} 10^3 \cdot 20 = 1666,67 \text{ cm}^4 = 1666,67 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

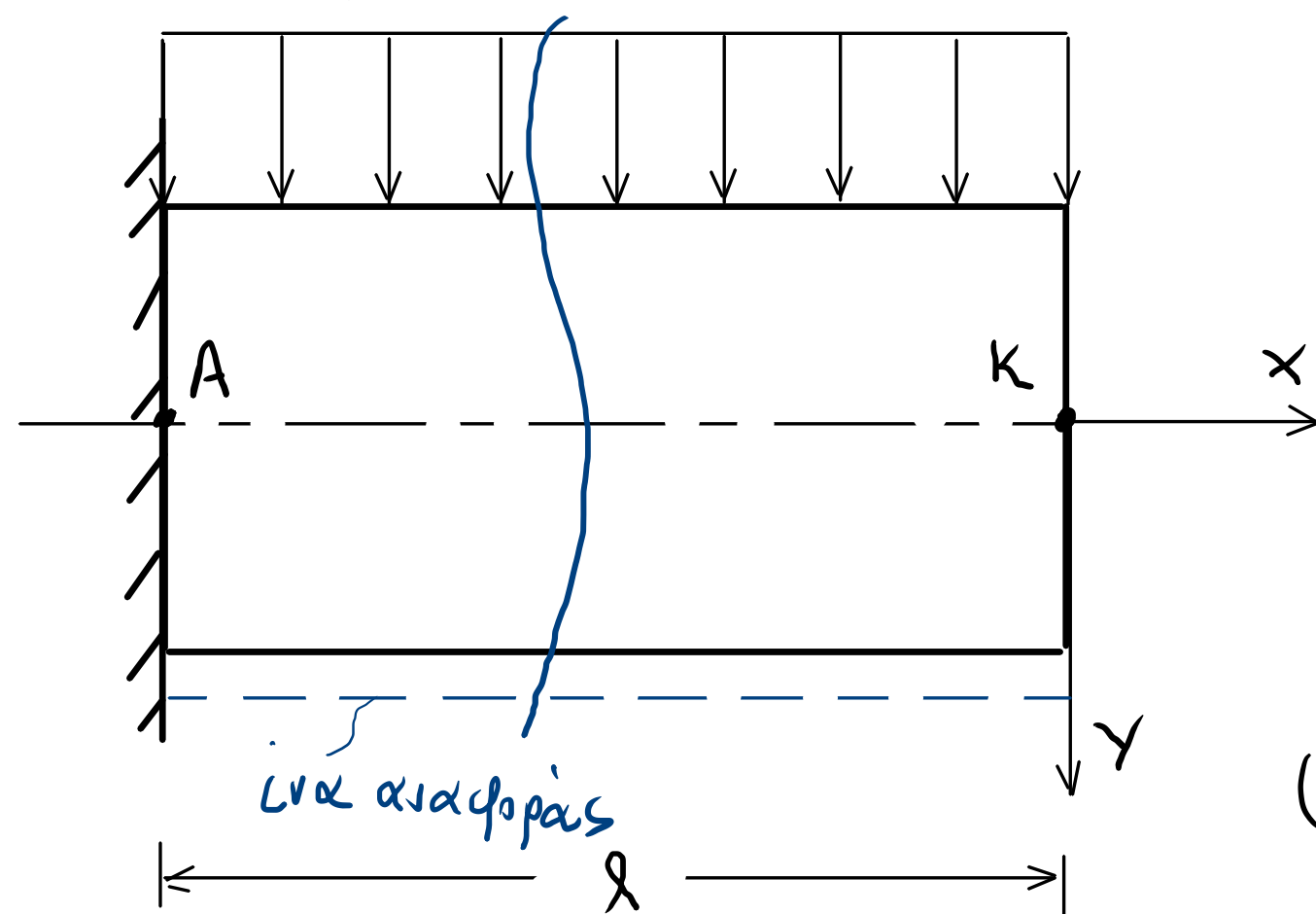
$$\text{για } z_s = \frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm} : \sigma_x^s = \frac{20 \cdot 0,05}{1666,67 \times 10^{-8}} = 60 \cdot 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} = 60 \text{ MPa}$$

$$\text{για } z_a = -\frac{b}{2} = -5 \text{ cm} : \sigma_x^a = -60 \text{ MPa}$$

Η Ο.Γ. (αυξάνουσα γραφή) συντρίβεται με τον άξονα y.

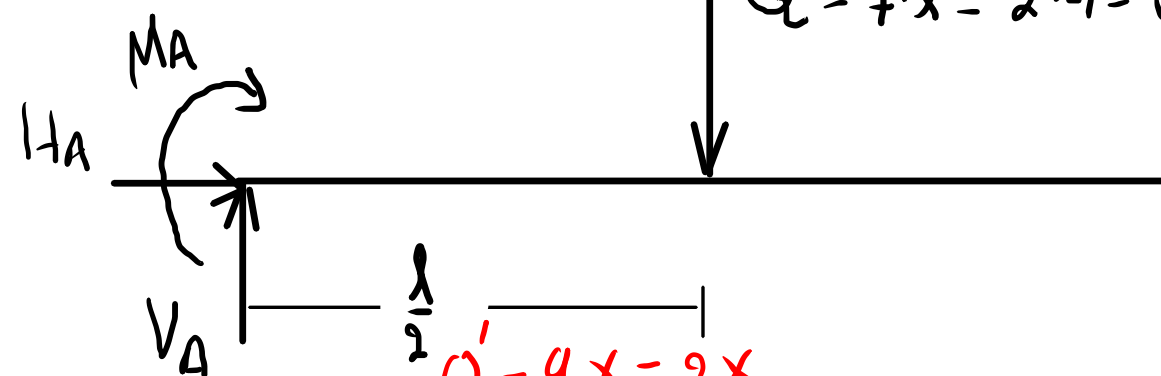


Εάν λάβουμε υπόψη το ίδιο βάρος της δοκού $q = 2 \text{ kN/m}$ (χωρίς την P_2)

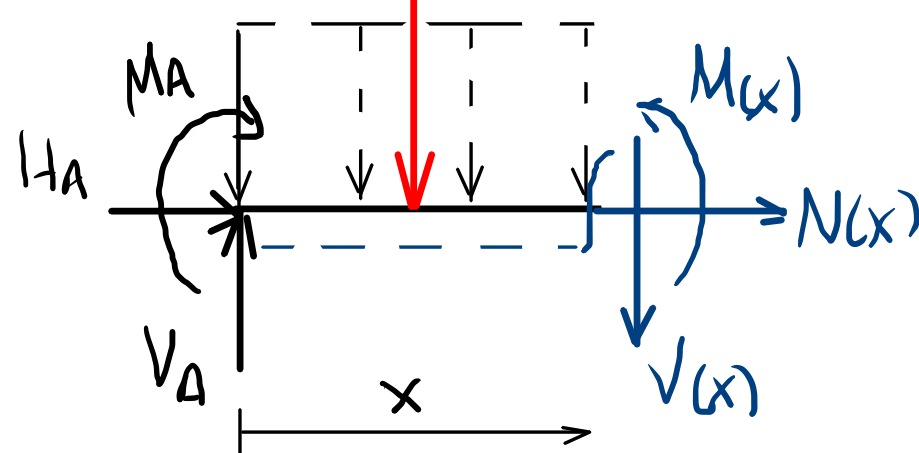


$\Delta \epsilon \Sigma$

$$Q = q \cdot l = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kN}$$



$$Q' = q \cdot x = 2x$$



$$(+ \rightarrow) \sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{H_A = 0}$$

$$(+ \uparrow) \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - Q = 0 \Rightarrow \underline{V_A = Q = 8 \text{ kN}}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - Q \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \underline{M_A = -Q \frac{l}{2} = -16 \text{ kNm}}$$

$$(+ \rightarrow) \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = -H_A = 0$$

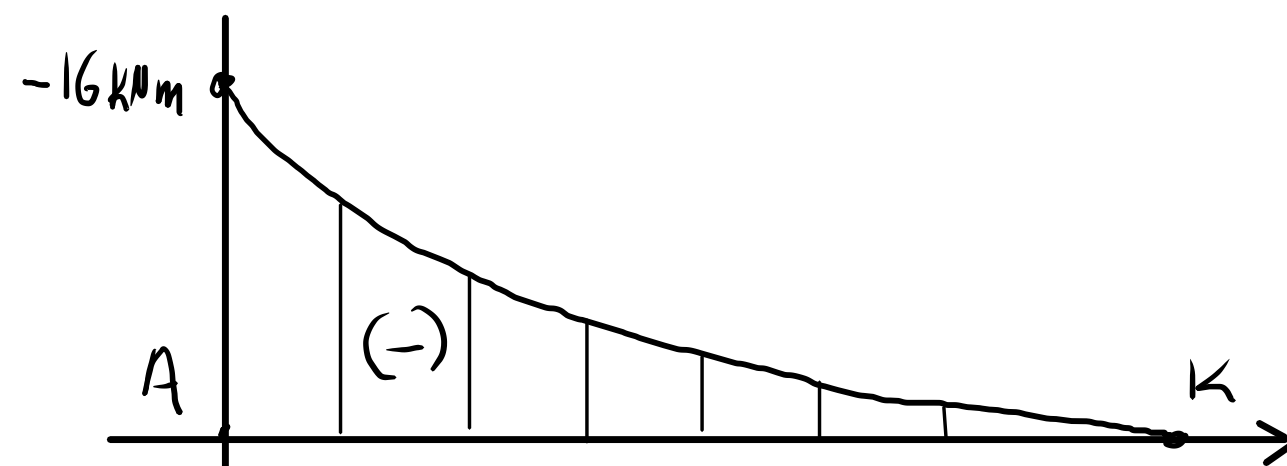
$$(+ \uparrow) \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - Q' - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = V_A - Q' = 8 - 2x \quad \left. \begin{array}{l} x=0, V(0) = 8 \\ x=4, V(4) = 0 \end{array} \right\}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_x = 0 \Rightarrow -M_A + Q' \frac{x}{2} + M(x) - V_A \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = M_A - x^2 + 8x$$

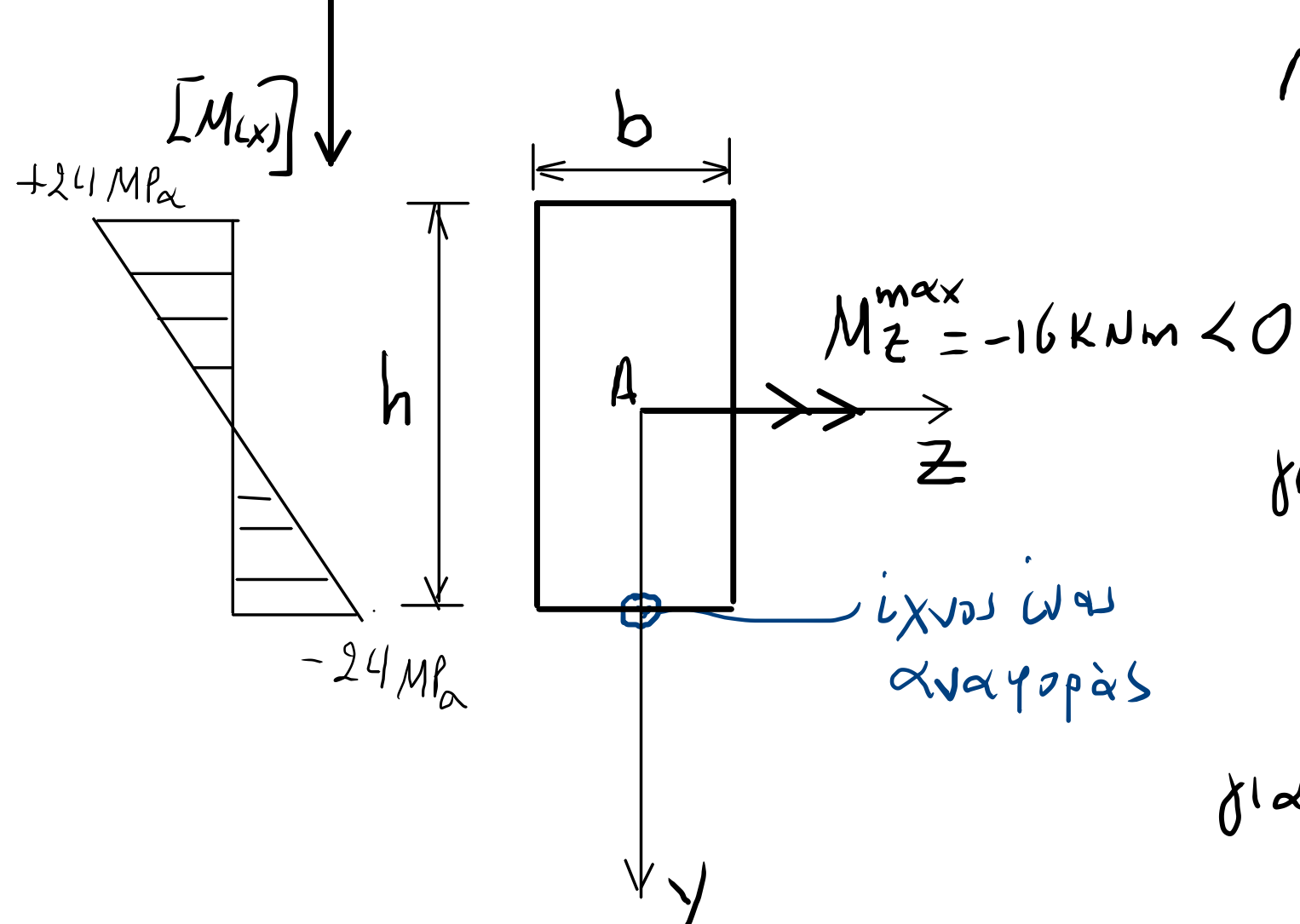
$$\Rightarrow M(x) = -x^2 + 8x - 16 \quad \left. \begin{array}{l} x=0, M(0) = -16 \text{ kNm} \\ x=4, M(4) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \Rightarrow -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ακριβώς}, \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -2 < 0 \quad \text{Γεγονότι τα} \\ \text{κρίνει} \\ \text{απ'αυτ'}$$

Διάγραμμα εσωτερικής καμπτικής ροπής:



* Στην διατομή στη θέση Α (πάκωση)
αναπτύσσεται η μέγιστη ροπή γύρω
από τον z άξονα $M_z^{max} = -16 \text{ kNm} < 0$
Επομένως θα θλίβει την ίνα αναφοράς



$$\text{Λόγω διου βάρους } q \rightarrow M_z^{max} \rightarrow \sigma_x = \frac{M_z^{max}}{I_z} y$$

$$I_z = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 10 \cdot 20^3 = 6666,67 \text{ cm}^4$$

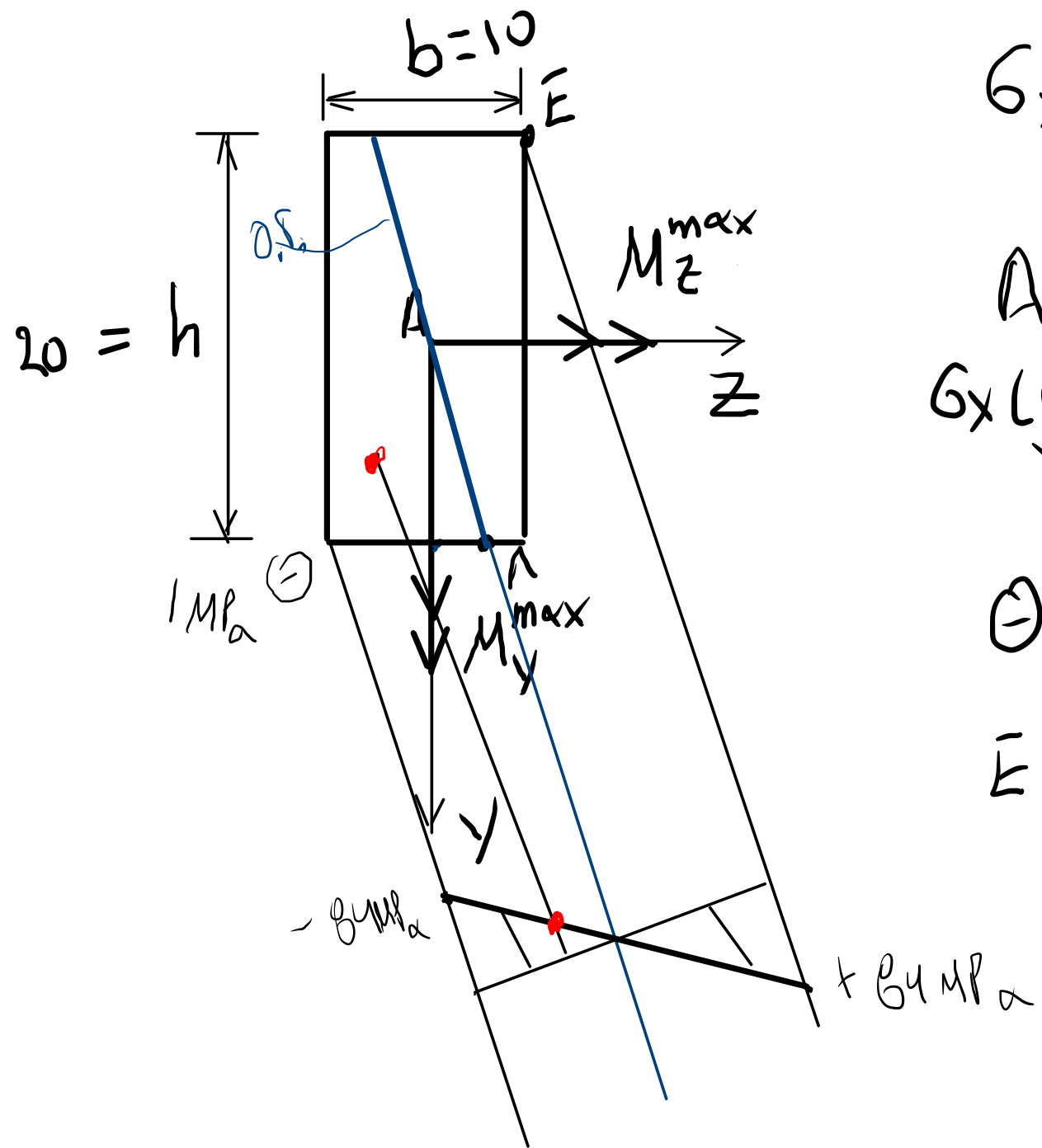
$$\text{για } y_{\alpha} = -\frac{h}{2} = -10 : \sigma_x = \sigma_{\alpha}^{εφ.} = \frac{-16}{6666,67 \cdot 10^{-8}} (-10 \cdot 10^{-2}) = 24 \text{ MPa}$$

$$\text{για } y_{\alpha} = \frac{h}{2} = 10 : \sigma_x = \sigma_{\alpha}^{θρ.} = -24 \text{ MPa}$$

Η ορθή ελίξη γραφή (Ο.Γ.) ταυτίζεται με τον άξονα z

Συνδυασμός και των δύο φαρμάκων:

Διπλή κάρτα διπλά συρρετικές διαζωφίνες:



$$G_x = - \frac{|M_z^{\max}|}{I_z} y + \frac{|M_y^{\max}|}{I_y} z \quad (1)$$

$$A(0,0) \Rightarrow 6x = 0 \text{ } \alpha \rho \alpha \text{ } 6 \eta \mu \epsilon \text{ } 0 \text{ } 0. \Gamma.$$

$$G_x(10, 2) = 0 \Rightarrow z = 2 \text{ cm} \quad \Lambda(10, 2)$$

$$\ominus (y_0 = 10, z_0 = -5) \stackrel{(\text{II})}{=} 6_x^0 = -84 \text{ MPa}$$

$$E(y_E = -10, z_E = 5) \stackrel{(\text{II})}{=} 6_X^E = 84 \text{ MPa}$$