



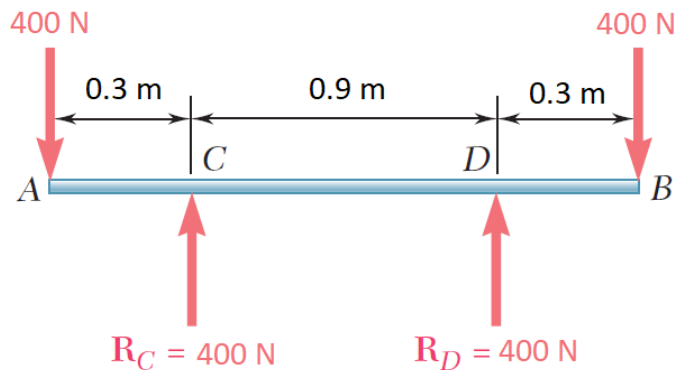
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Κάμψη

Δρ. Δημήτριος ΣΑΒΒΑΣ

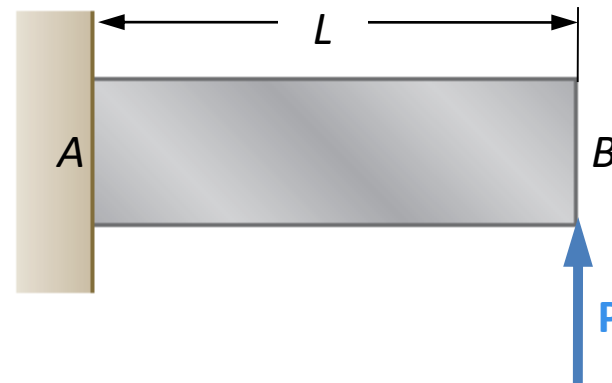
Μέλη που καταπονούνται σε κάμψη



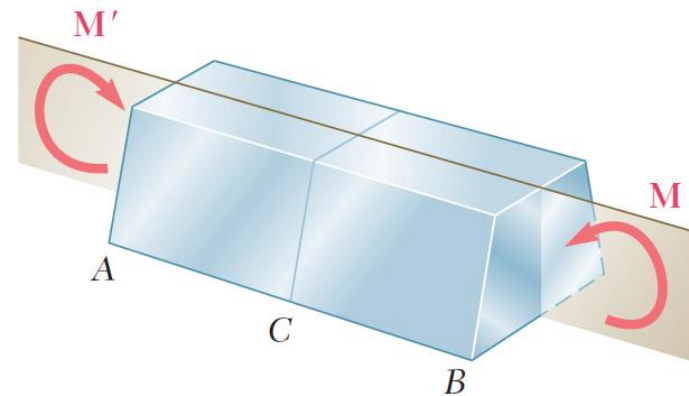
(a)



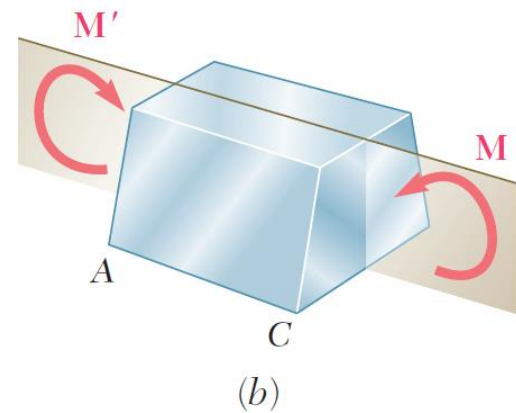
(b)



Ορισμός καθαρής κάμψης

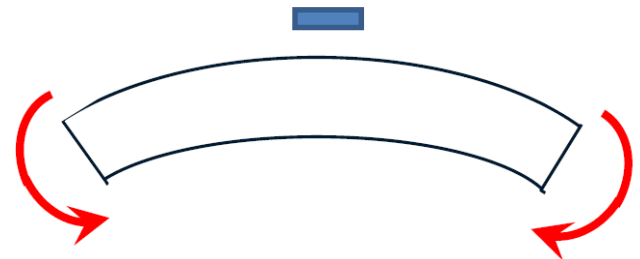


Πρισματικό μέλος AB με ένα επίπεδο συμμετρίας (διαμήκες) καταπονείται από ίσα και αντίθετα ζεύγη ροπών M και M' που δρουν στο επίπεδο αυτό.



Η ροπή M ονομάζεται ροπή κάμψης ή καμπτική ροπή στη διατομή

Σύμβαση προσήμου:

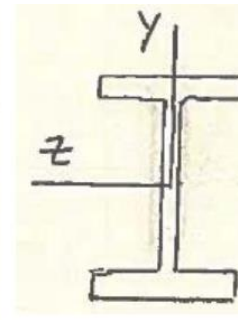
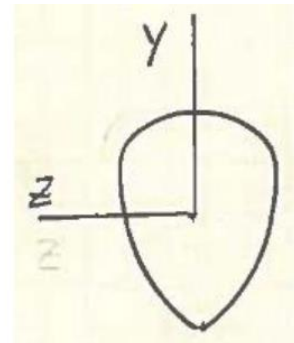
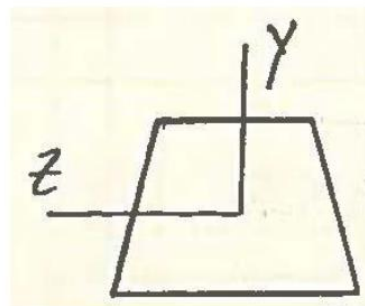
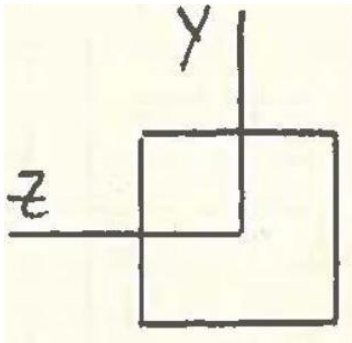


Μέλος σε κατάσταση
καθαρής κάμψης

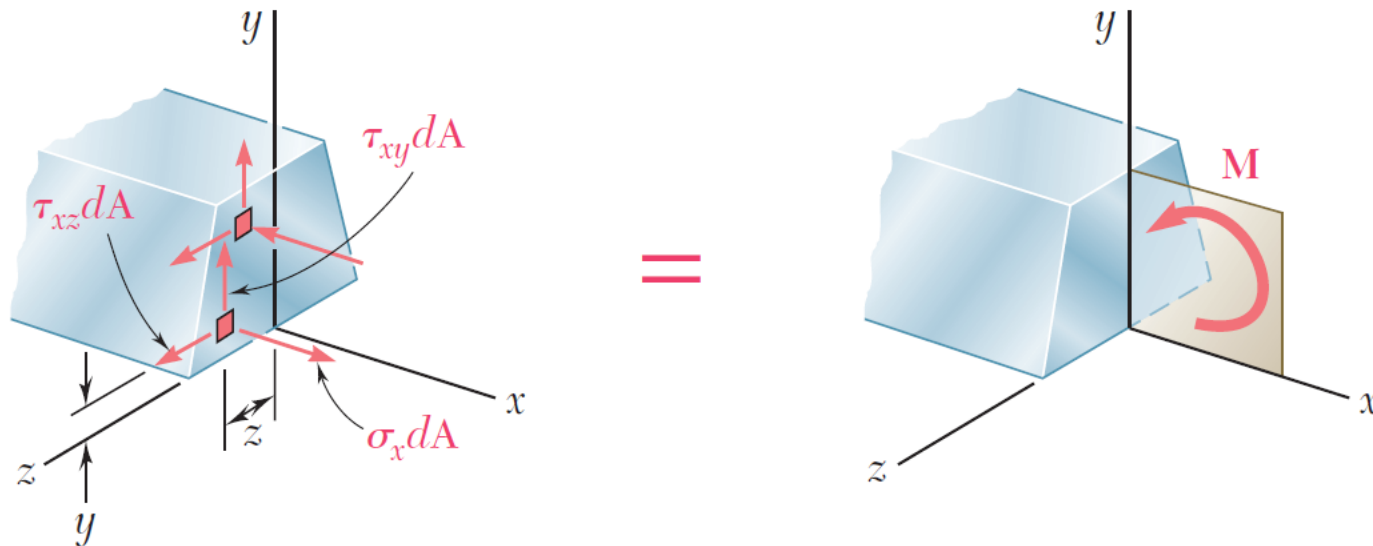
Υποθέσεις για καθαρή κάμψη

Υποθέσεις που γίνονται στην καθαρή κάμψη:

- Το ζεύγος των ροπών να ασκείται πάνω σε επίπεδο συμμετρίας.
- Οι διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την κάμψη.
- Δεν υπάρχει συστροφή στις διατομές.
- Δεν λαμβάνει χώρα λυγισμός των μελών.
- Μικρές παραμορφώσεις.



Σχέσεις εσωτερικής ροπής και τάσης



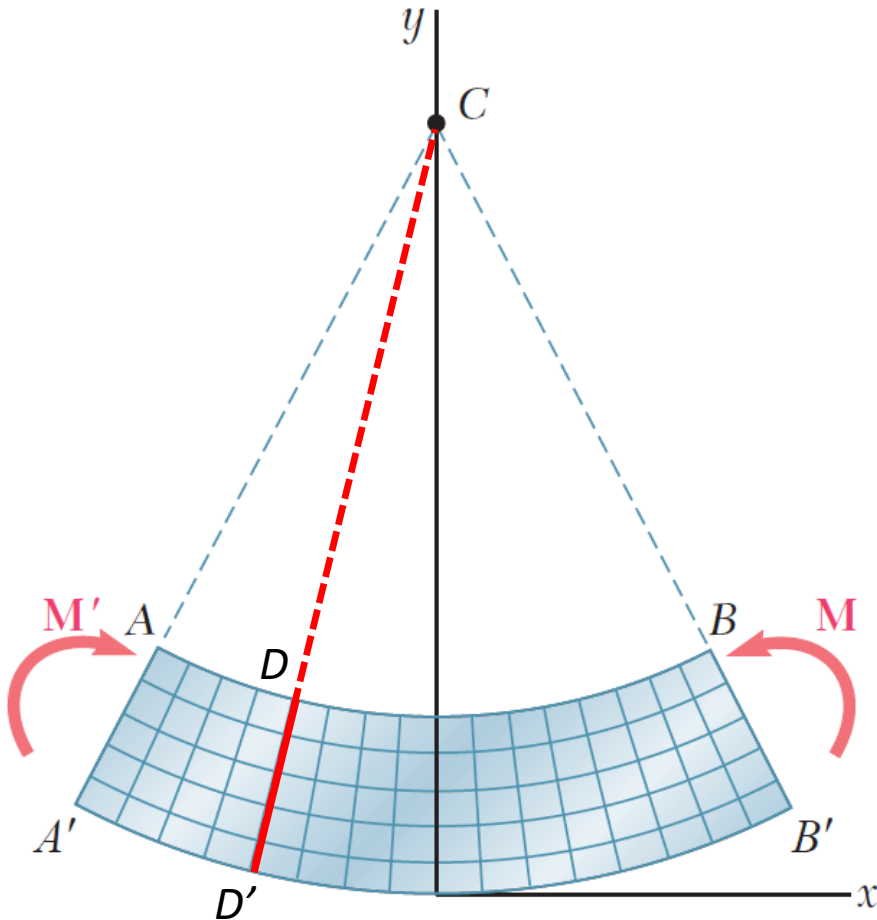
Τάσεις που προκύπτουν από καθαρή ροπή κάμψης M

x συνιστώσες:
$$\int \sigma_x dA = 0$$

Ροπές ως προς τον άξονα y :
$$\int z \cdot \sigma_x dA = 0$$

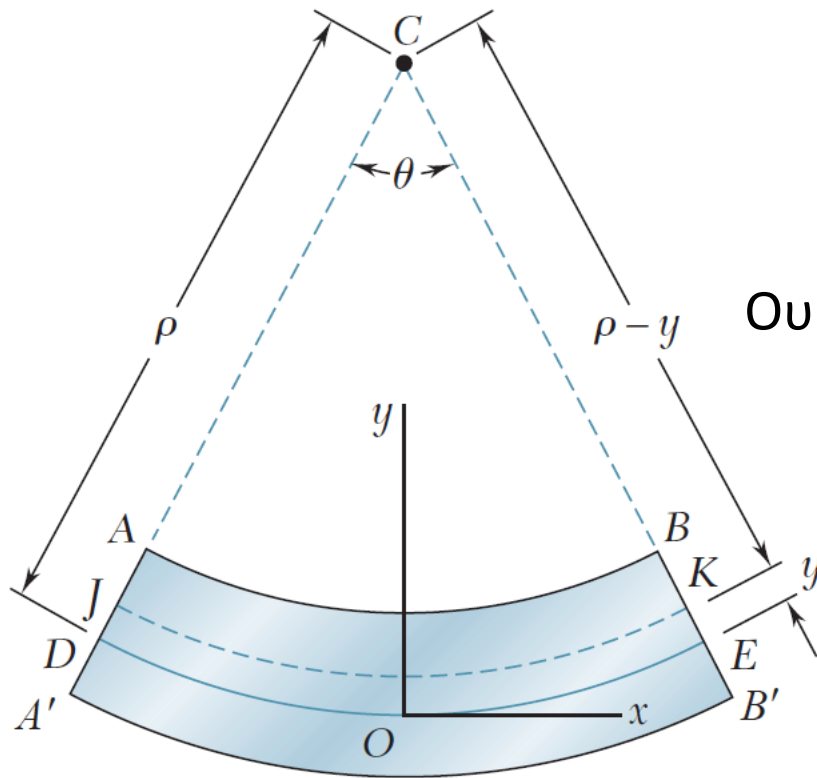
Ροπές ως προς τον άξονα z :
$$-\int y \cdot \sigma_x dA = M$$

Επιπεδότητα εγκάρσιων διατομών στην καθαρή κάμψη

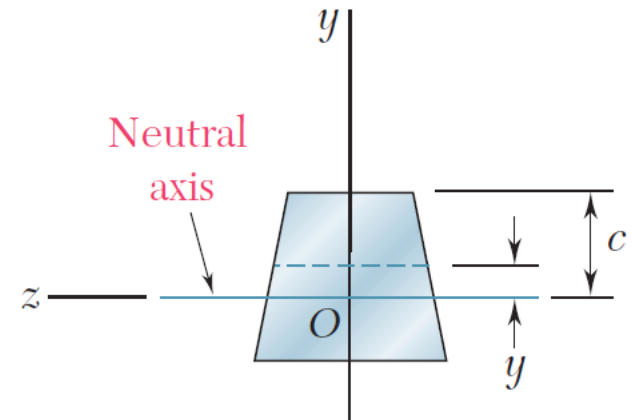


Η ροπή κάμψης M είναι ίδια σε κάθε επίπεδο (ομοιόμορφη κάμψη). Η γραμμή AB σχηματίζει τόξο κύκλου με κέντρο C . Συνεπώς οποιαδήποτε εγκάρσια διατομή DD' η οποία είναι κάθετη στον άξονα του μέλους παραμένει επίπεδη και το επίπεδο της διατομής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C .

$$\text{Δοκός Euler-Bernoulli } \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$



AB (θλίψη, $\epsilon_x < 0$, $\sigma_x < 0$),
 $A'B'$ (εφελκυσμό, $\epsilon_x > 0$, $\sigma_x > 0$)
 Ουδέτερη επιφάνεια DE ($\epsilon_x = 0$, $\sigma_x = 0$)



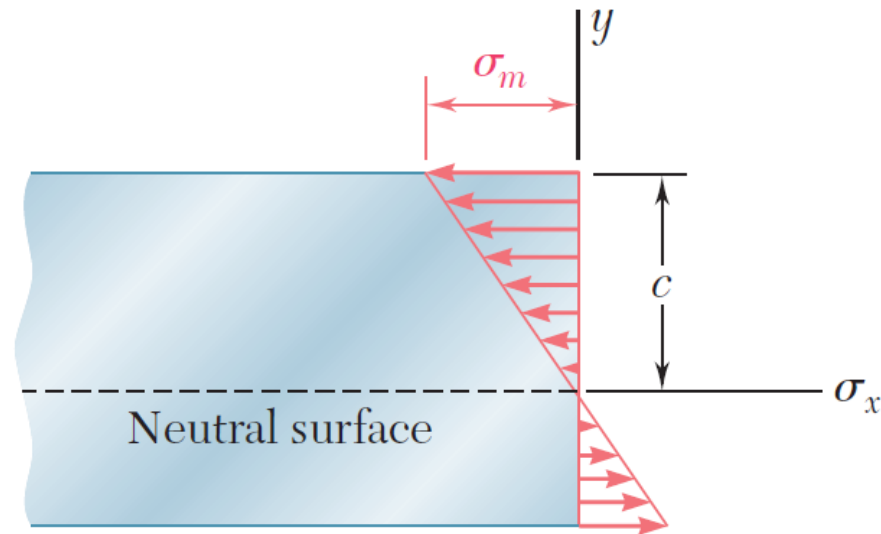
$$L = \rho\theta, \quad L' = (\rho - y)\theta$$

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m$$

Τάσεις στην ελαστική περιοχή



$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \text{Hooke}$$

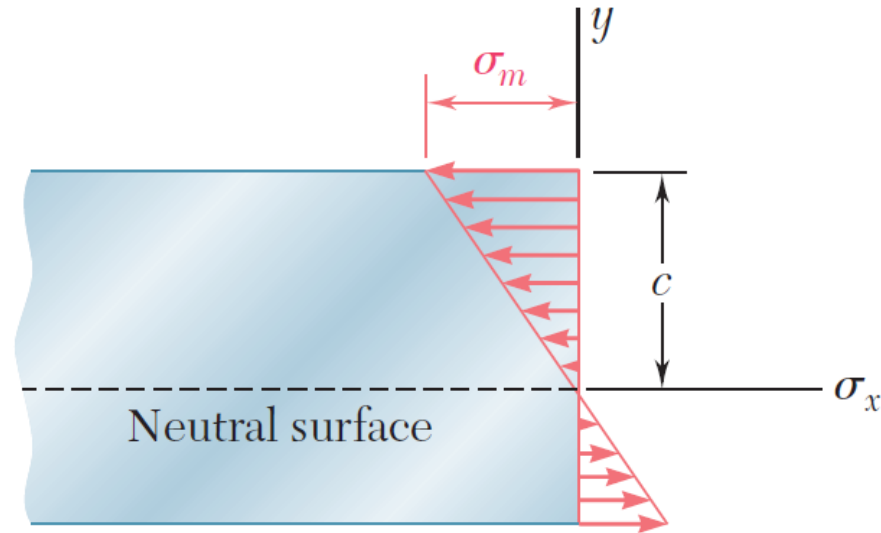
$$E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}(E\varepsilon_m) \Rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m$$

Στην ελαστική περιοχή η ορθή τάση μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από την ουδέτερη επιφάνεια.

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

$$\Rightarrow \int y dA = 0 \quad \text{Στατική ροπή επιφανείας ή πρωτοβάθμια ροπή}$$

Τύποι της ελαστικής κάμψης



$$\int (-y\sigma_x dA) = M$$

$$\Rightarrow \int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M$$

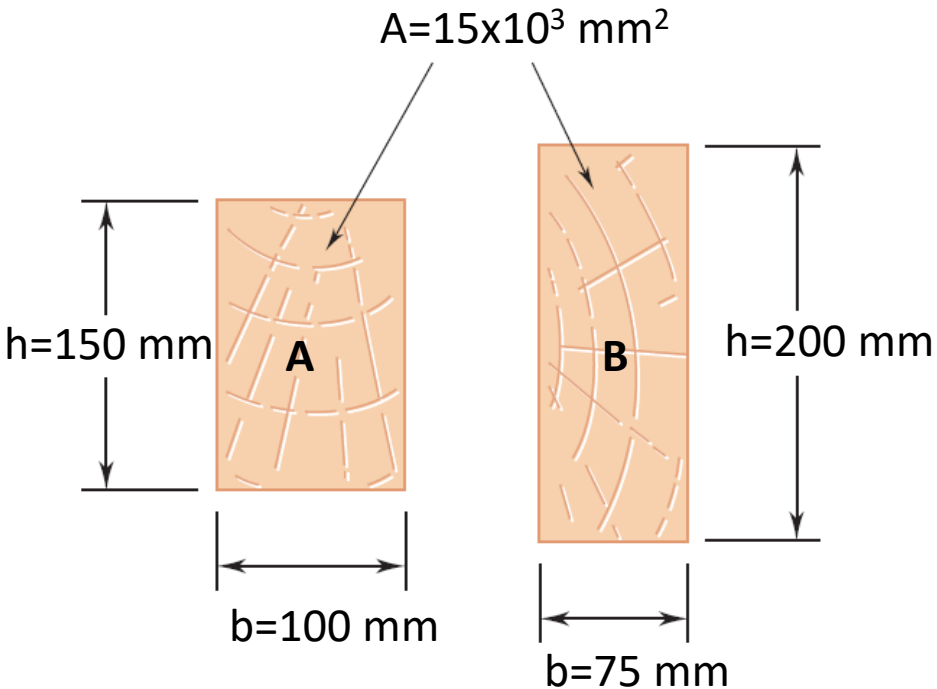
$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

$I = \int y^2 dA$ Ροπή αδρανείας ή δευτεροβάθμια ροπή

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m = -\frac{y}{c} \frac{Mc}{I} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \text{Καμπτική τάση}$$

Ελαστική ροπή αντίστασης



$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \Rightarrow \boxed{\sigma_m = \frac{M}{S}}$$

$$\boxed{S = \frac{I}{c}}$$

Ελαστική ροπή
αντίστασης

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

Ερώτηση: Ποιά δοκός (A ή B) είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά στην αντίσταση τής σε κάμψη και γιατί?



Σχέση ροπής-καμπυλότητας

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

Στην ελαστική περιοχή: $\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} = \frac{Mc}{EI}$

$$\frac{Mc}{EI} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{c} \frac{Mc}{EI}$$

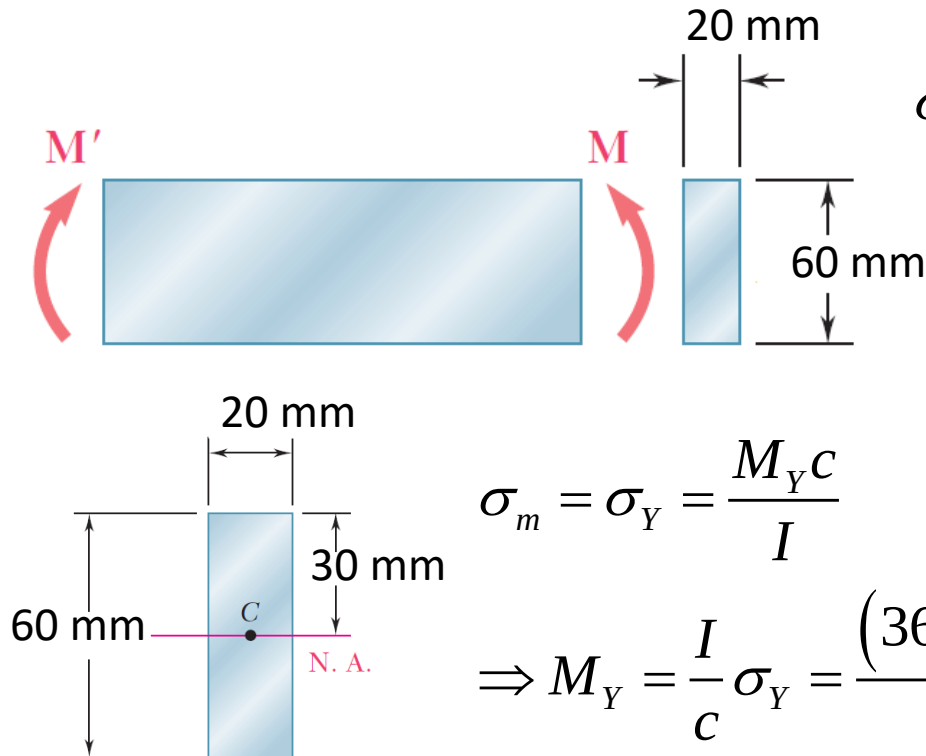
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

EI : Καμπτική ακαμψία δοκού

*Η καμπυλότητα της δοκού είναι ανάλογη της ροπής

Εφαρμογή 3.1

Έστω χαλύβδινη δοκός ορθογώνιας εγκάρσιας διατομής 20x60 mm υπόκειται σε καθαρή κάμψη λόγω ζεύγους ροπών. Προσδιορίστε την τιμή της καμπτικής ροπής M που προκαλεί διαρροή στη δοκό.



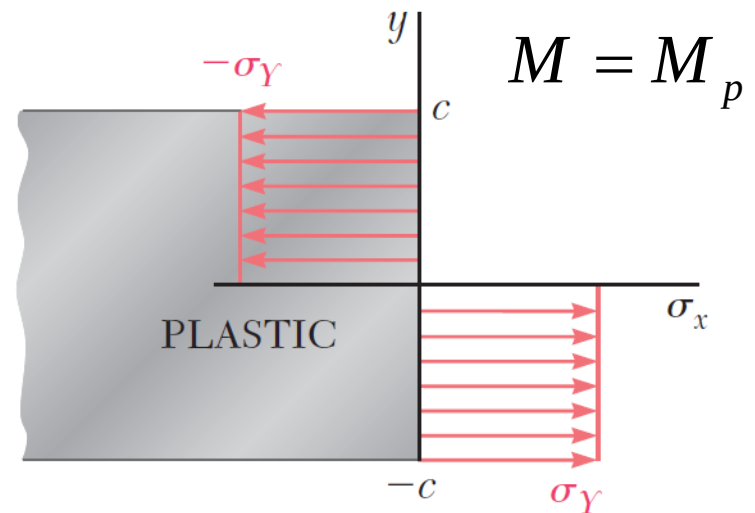
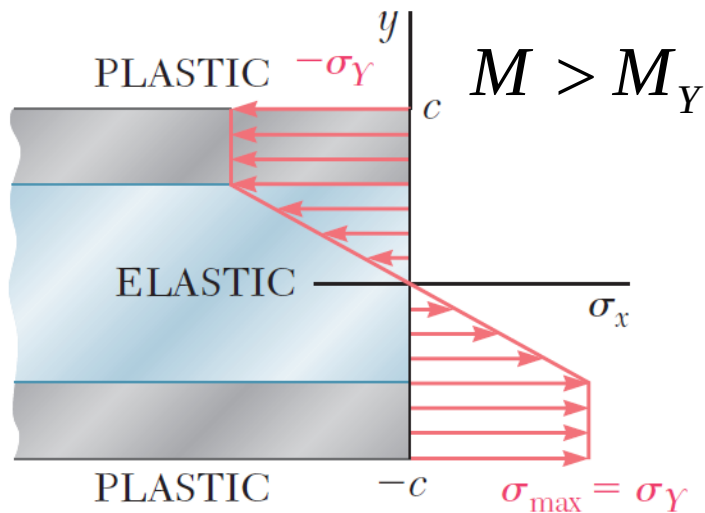
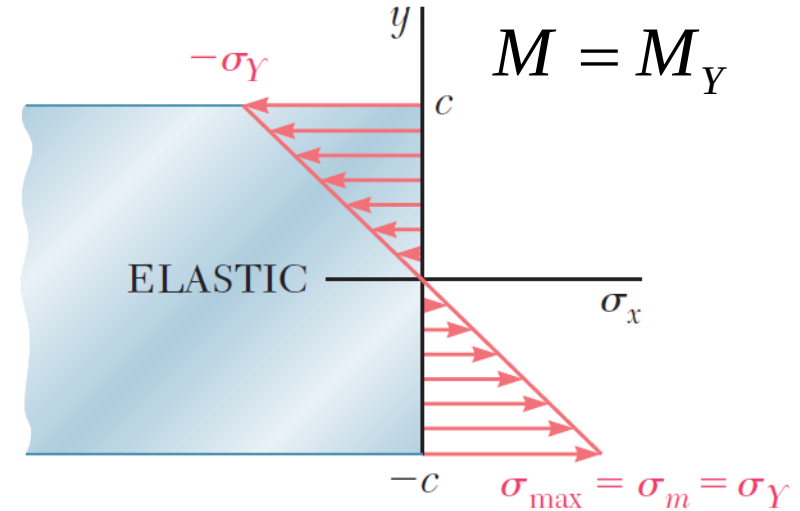
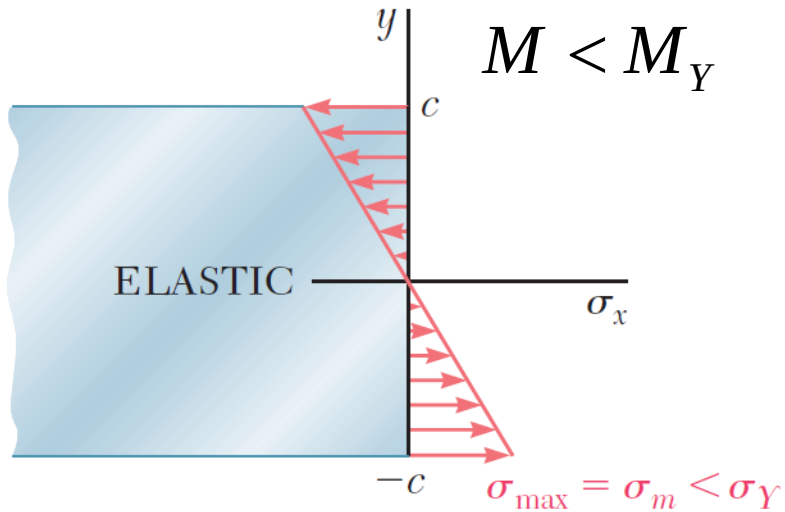
$\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$ όριο διαρροής χάλυβα

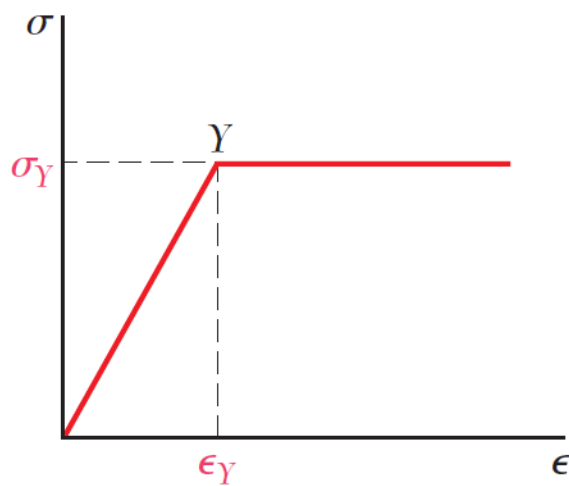
$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}20 \cdot 60^3 = 360 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_m = \sigma_Y = \frac{M_Y c}{I}$$

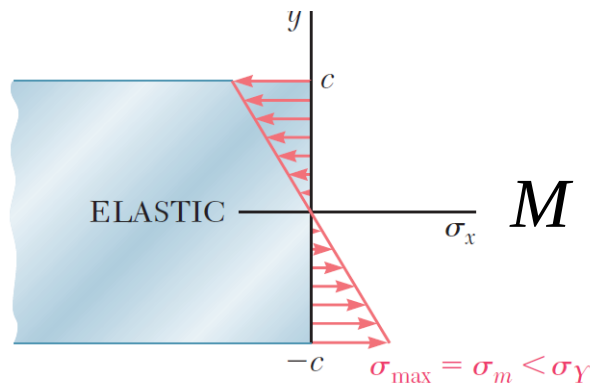
$$\Rightarrow M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y = \frac{(360 \times 10^{-9}) \text{ m}^4}{0.03 \text{ m}} (250 \times 10^6 \text{ Pa}) = 3 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Κατανομές τάσης ανάλογα το μέγεθος της ροπής

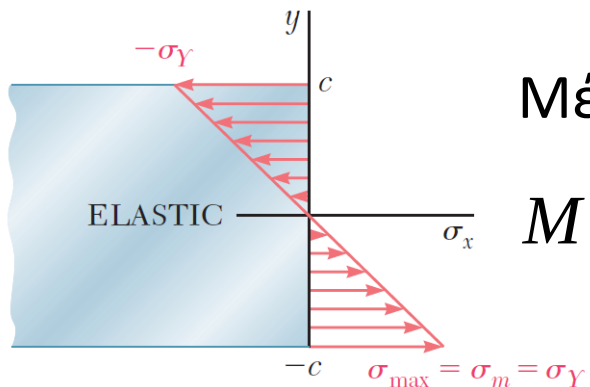




Ιδανικό ελαστοπλαστικό υλικό

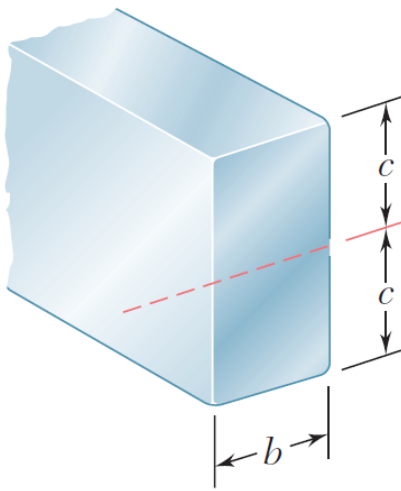


$$M < M_Y \quad \sigma_x = -\frac{My}{I}, \quad \sigma_m = \frac{Mc}{I}$$



Μέγιστη ελαστική ροπή:

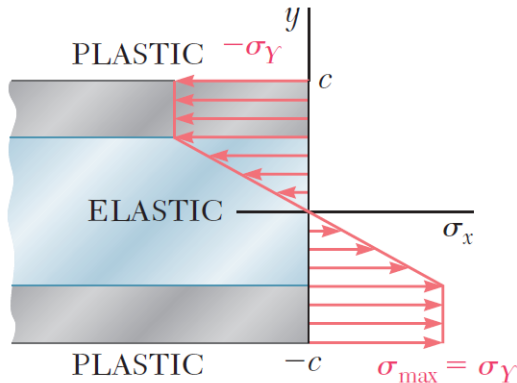
$$M = M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_Y$$



N. A.

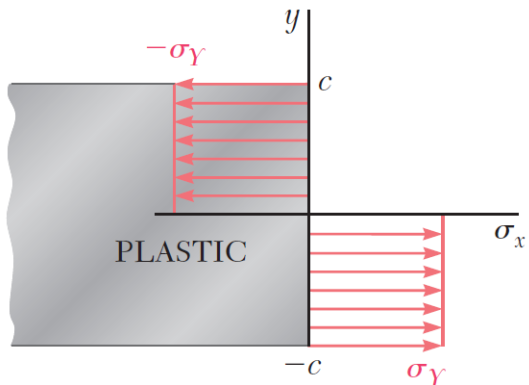
$$I = \frac{1}{12} b (2c)^3 = \frac{2}{3} b c^3$$

$$\Rightarrow M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_Y$$



Ελαστικός πυρήνας:

$$M > M_Y, \quad \sigma_x = -\frac{\sigma_Y}{y_Y} y$$



Πλαστική ροπή:

$$M = M_p$$

Υπολογισμός ροπής στην περίπτωση ελαστικού πυρήνα

$$M = \int_A (-y\sigma_x \cdot dA) = 2 \int_0^y (-y\sigma_x b dy) = 2 \int_0^{y_Y} (-y\sigma_x b dy) + 2 \int_{y_Y}^c (-y\sigma_x b dy)$$

$$\Rightarrow M = -2b \int_0^{y_Y} y\sigma_x dy - 2b \int_{y_Y}^c y\sigma_x dy = -2b \int_0^{y_Y} y \left(-\frac{\sigma_Y}{y_Y} y \right) dy - 2b \int_{y_Y}^c y(-\sigma_Y) dy$$

$$\Rightarrow M = 2b \frac{\sigma_Y}{y_Y} \int_0^{y_Y} y^2 dy + 2b\sigma_Y \int_{y_Y}^c y dy = 2b \frac{\sigma_Y}{y_Y} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{y_Y} + 2b\sigma_Y \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_Y}^c$$

$$\Rightarrow M = 2b \frac{\sigma_Y}{y_Y} \left(\frac{y_Y^3}{3} - 0 \right) + 2b\sigma_Y \left(\frac{c^2}{2} - \frac{y_Y^2}{2} \right) = \frac{2}{3} b y_Y^2 \sigma_Y + b c^2 \sigma_Y - b y_Y^2 \sigma_Y$$

$$\Rightarrow M = b c^2 \sigma_Y \left(1 - \frac{y_Y^2}{3c^2} \right)$$

$$\text{όπου } M_Y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_Y$$

$$\Rightarrow M = \frac{3}{2} M_Y \left(1 - \frac{y_Y^2}{3c^2} \right) \quad \text{για } y_Y \rightarrow 0 \Rightarrow M = M_P = \frac{3}{2} M_Y$$