

Μονοαξονικός Εγελκυβριός = (ωλκίμα υλικά)

$(P, \delta) \rightarrow (G, \varepsilon) \quad G = P, \quad \varepsilon = \delta$ δομικό χαρμύας

$$(P, \delta) \xrightarrow{A} (G, \varepsilon), \quad G \underset{\approx P}{=} \frac{P}{A}, \quad \varepsilon = \delta_{L_0}$$

$$\tilde{G} = \frac{P}{A}$$

Σοφικό Χατζύλας

GA: Zahnanalogia

$\sigma = \bar{E} \cdot \epsilon$ σχέση αναλογίας
ή νόμος Hooke.

и вѣсѣхъ Аноуе.

$E \equiv \tan \omega$: Υέτρο ελαστικότητας
ή υέτρο Young.

to Elizabeth Young.

γ : yield point

Gráfico de barras

Gy: Zehn Stappans

Στο τέλος Q:

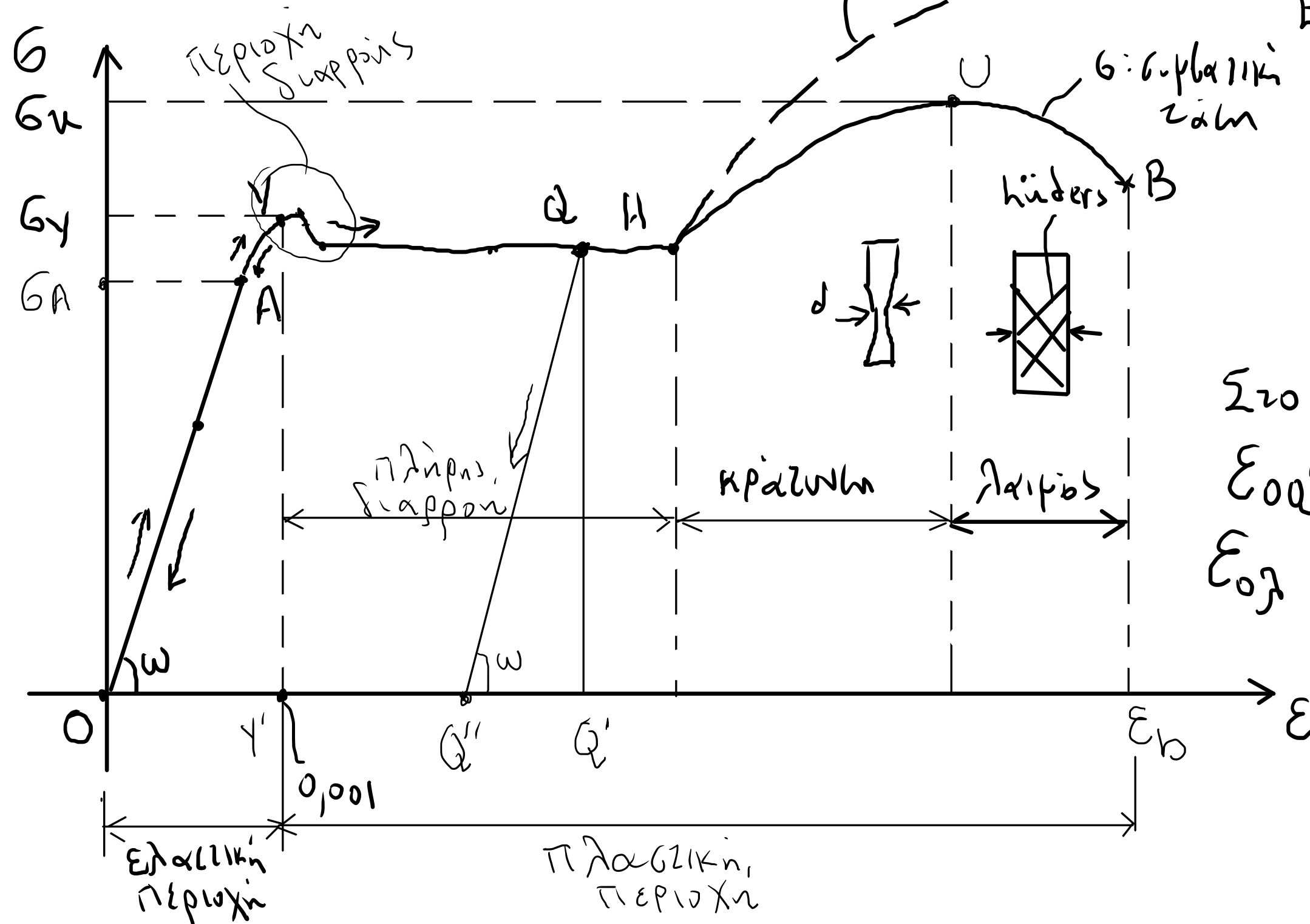
$$\varepsilon_{0a'} = \varepsilon_{0a'} + \varepsilon_{a'a'}$$

$$\varepsilon_{0\lambda} = \varepsilon_{\pi\lambda} + \varepsilon_{\varepsilon\lambda}.$$

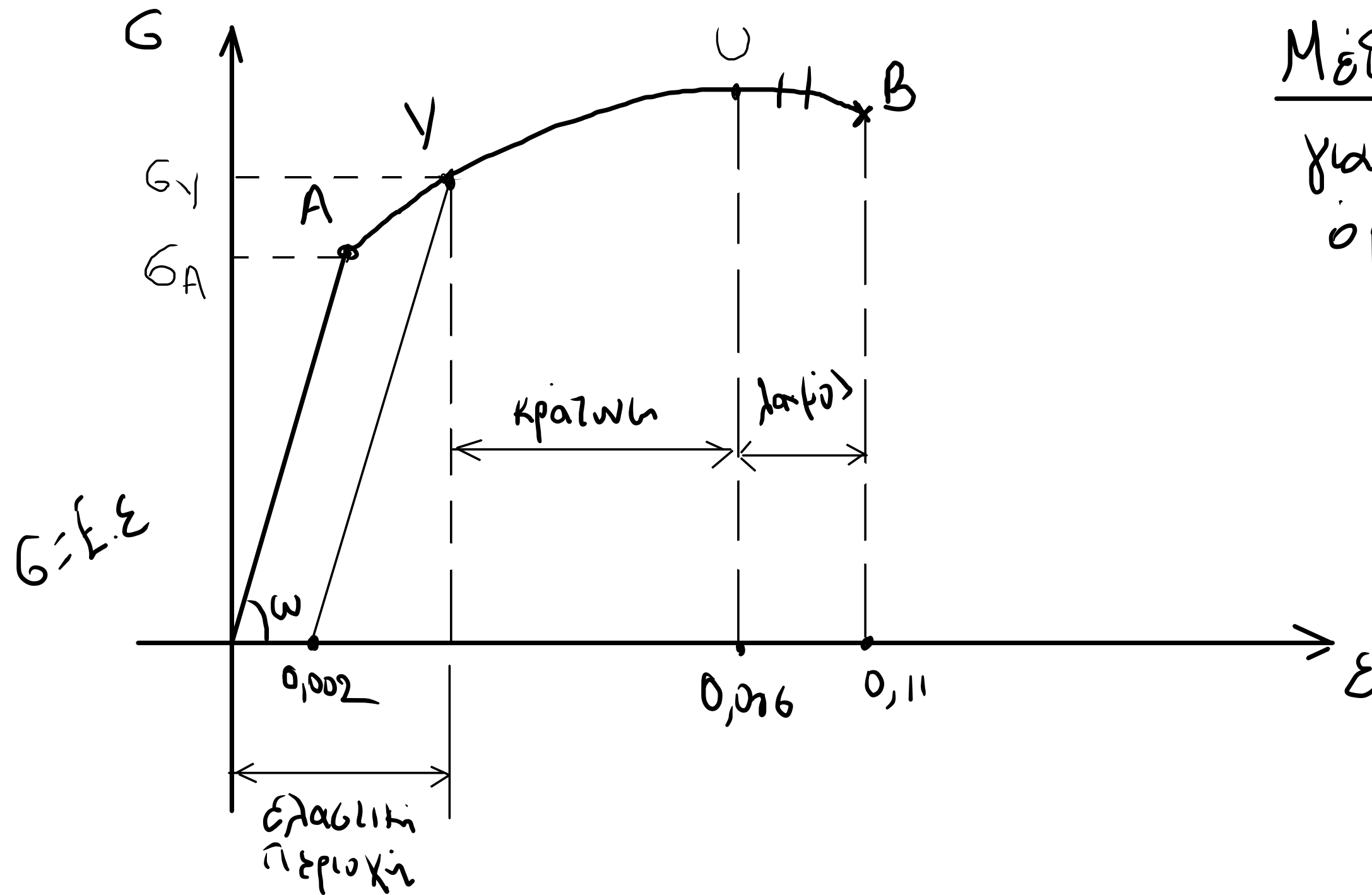
Gu. opackin Zahl
α₁₀ Xin (max)

6B: Zahlen Sprüche

Κινού-Κραίνρα



Κράμα Αλουμινίου (60/40).



Μέθοδος πρόκτασης της τροπής

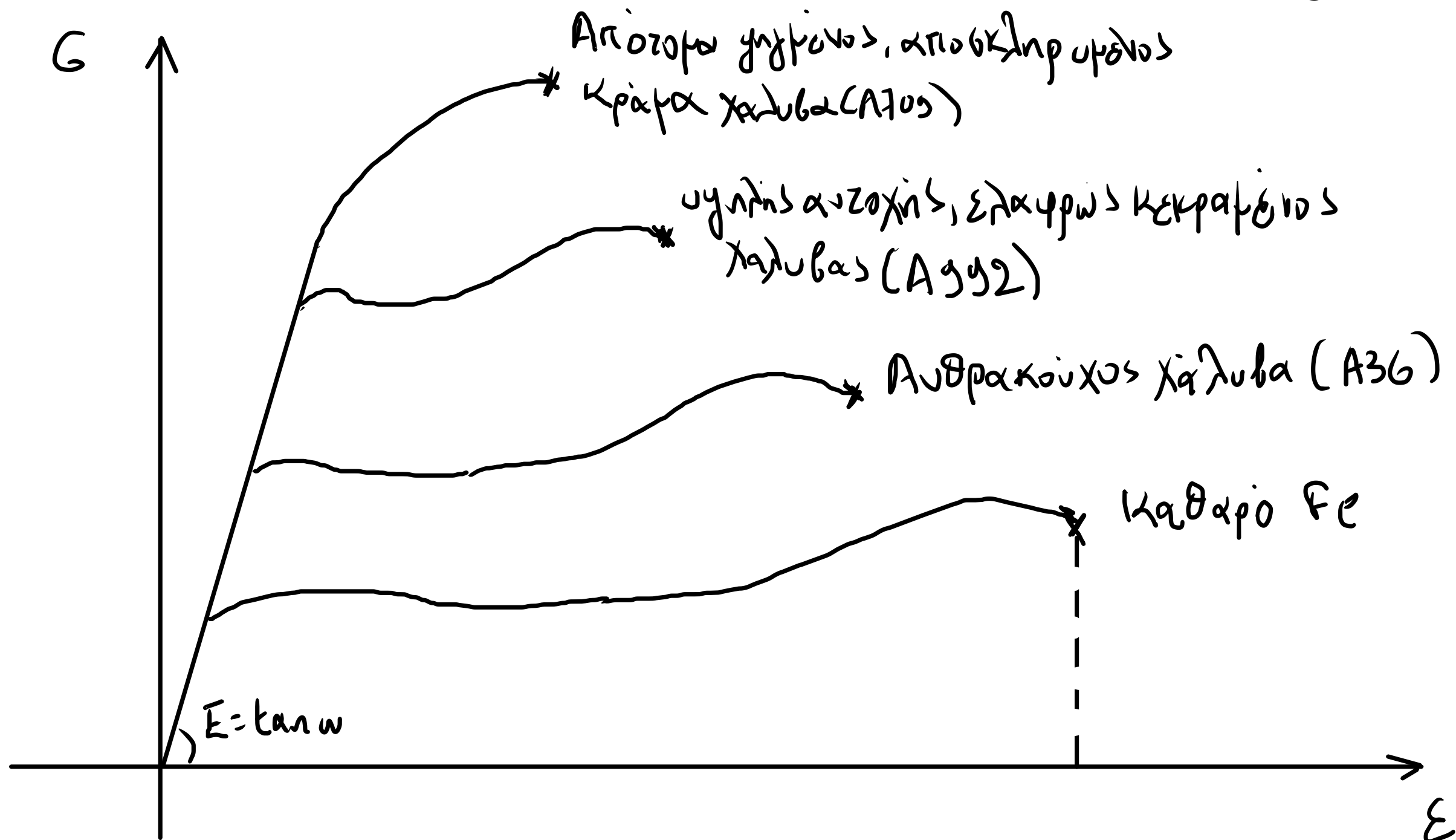
για να προσδιοριστεί το
όριο διαρροής γ .

$$\epsilon = 0,002$$

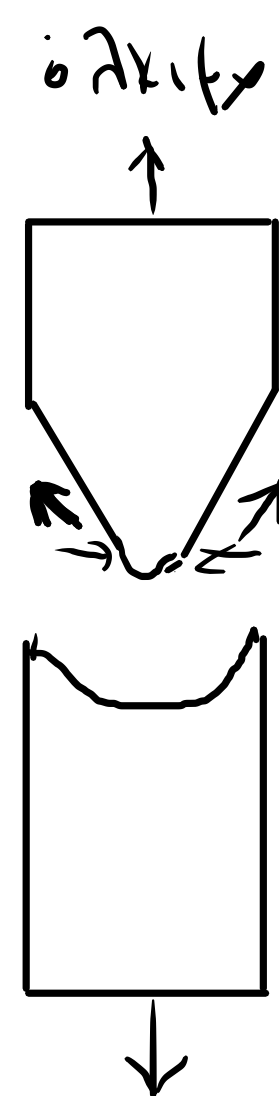
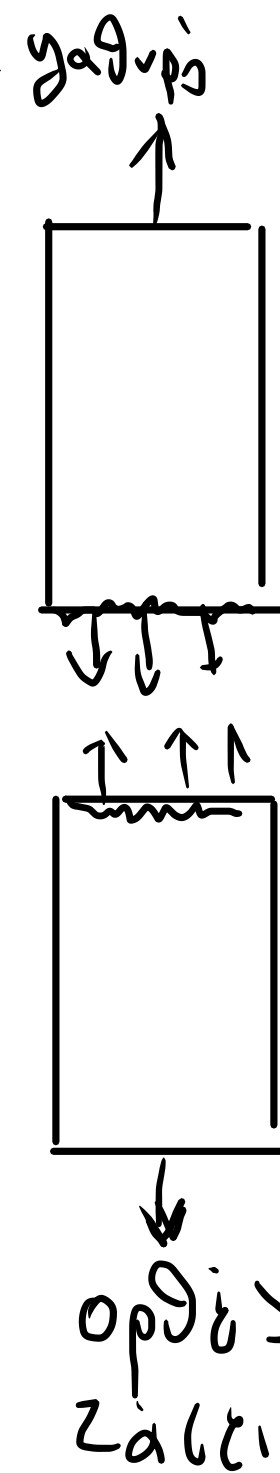
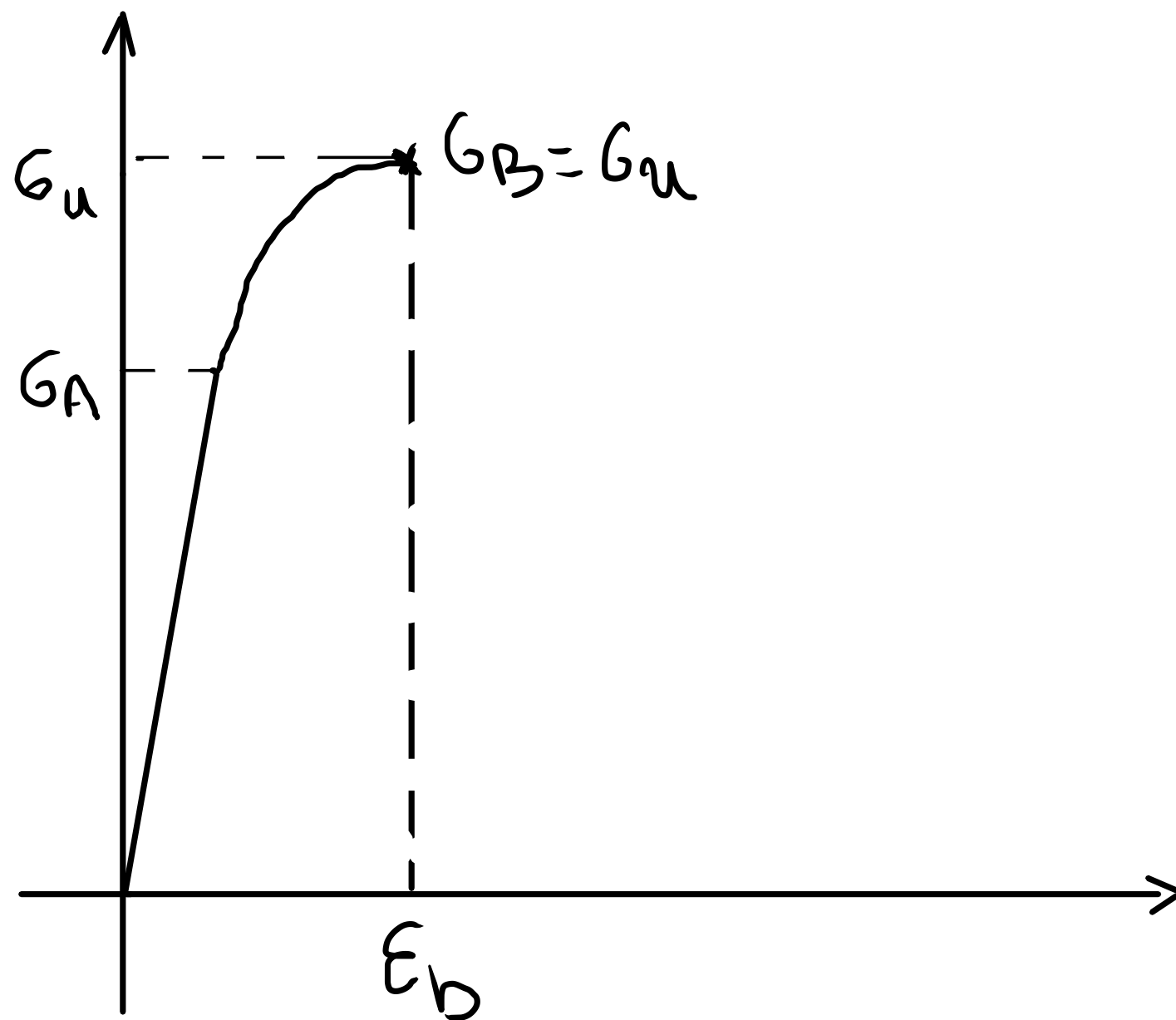
Πρότυπα μέτρα ολκιμότητας:

α) εκατοστιαία επιμήκυνση $= 100 \cdot \frac{L_B - L_0}{L_0}$

β) εκατοστιαία μείωση εμβαδού $= 100 \cdot \frac{A_0 - A_B}{A_0}$



Ψαθურά υλικά

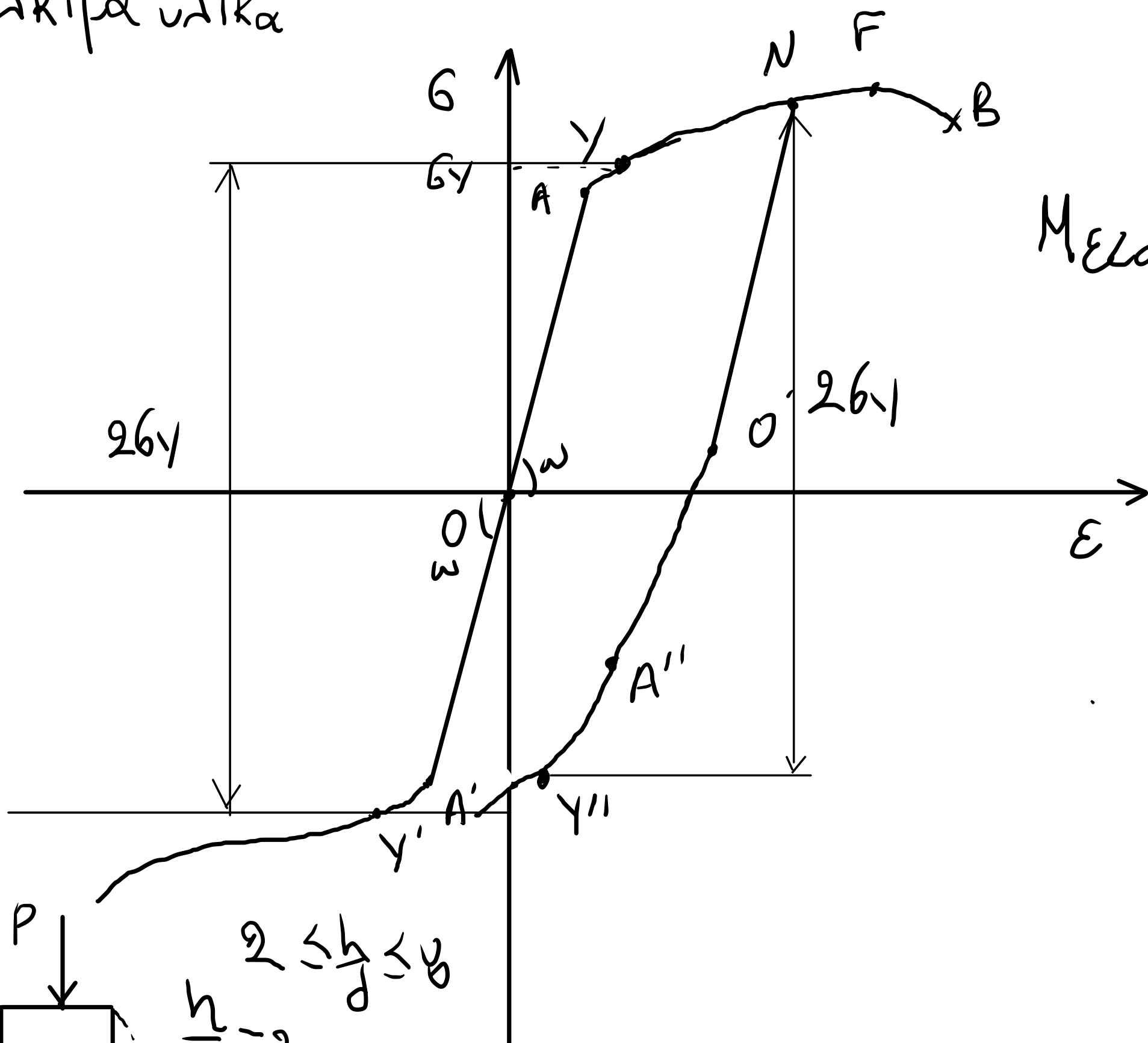


δυσμενεια
καταστροφης

υπερδοσεις για
αξονα.

Μονοαξονική Θάλην

Ολκίφα υλικά



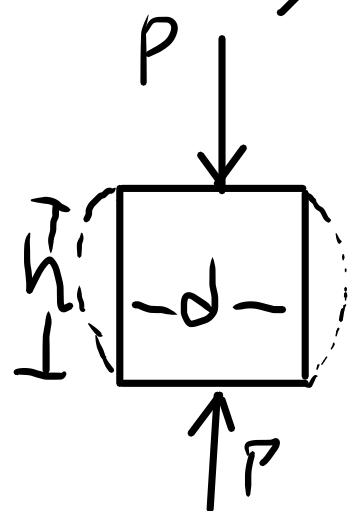
Φαινόμενο Bauschinger

Μετατόπιση του σημείου διαρροής

ΟΑ'' : Καμπύλη γραμμής

Η συνολική πτώση τάσης είναι 26.1

$$|NY''| \equiv |YY'| = 26.1$$

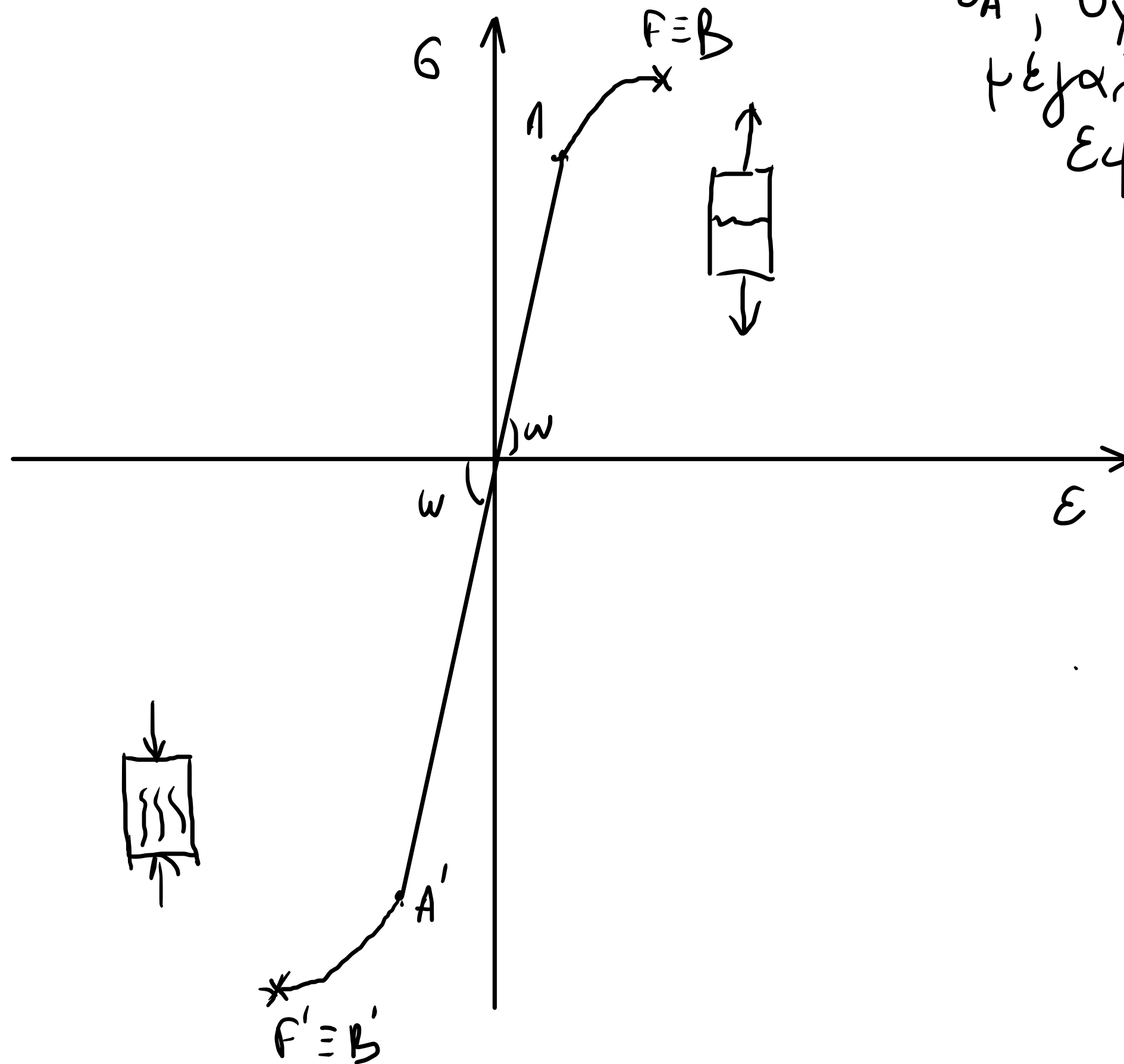


$$2 \leq \frac{h}{d} \leq 8$$

$$\frac{h}{d} = 2$$

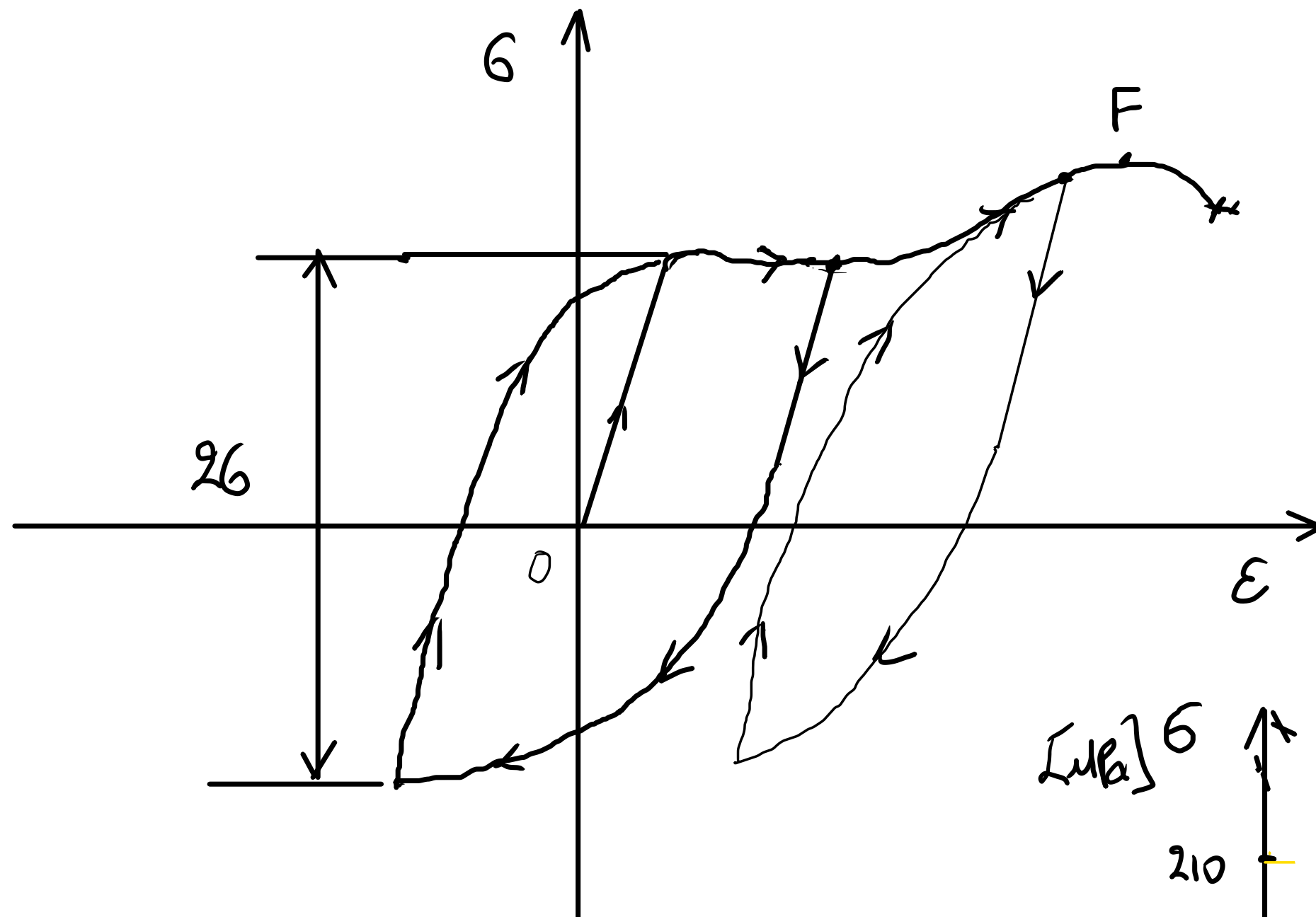
Κοντό δοκίμιο
Βαρελότοιμη

Ψαθούρα υλικά:



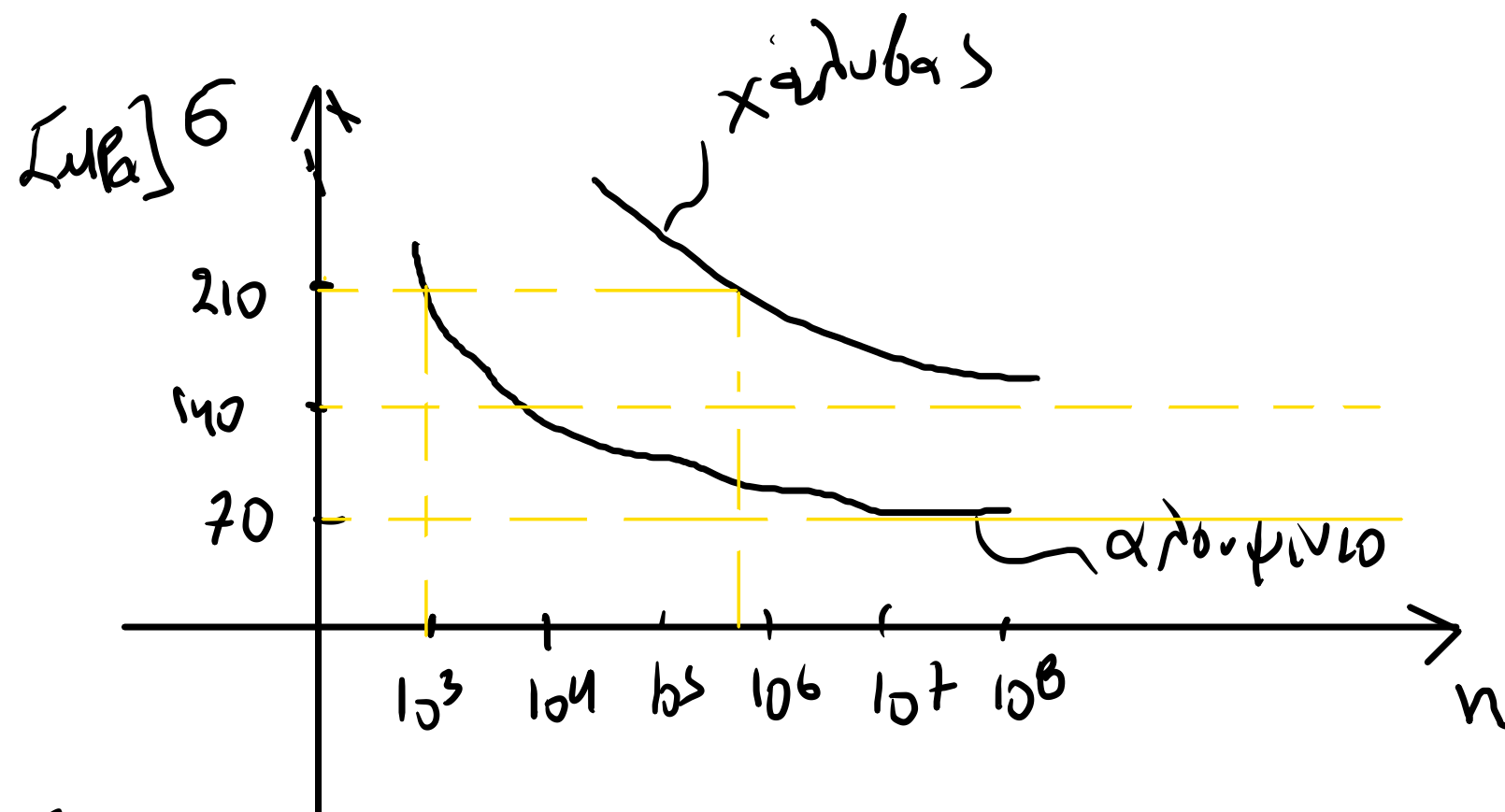
$\sigma_{A'}$, $\sigma_{\gamma'}$, $\sigma_{F'}$ στην θλίψη είναι
μεγαλύτερες από ότι σ_E
εφελκυστικό.

Πείραμα Κόπωσης:



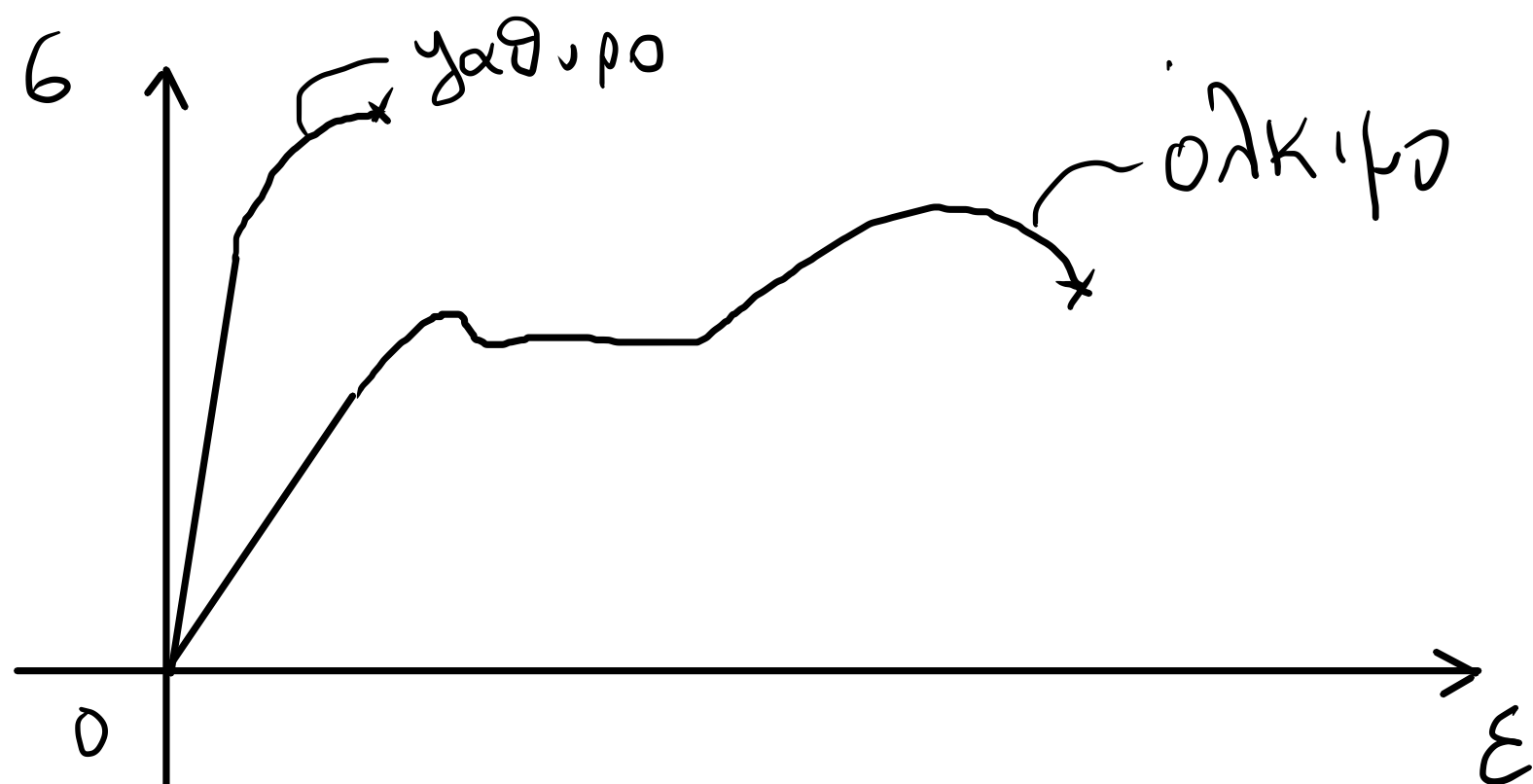
$$\sigma < \sigma_F, \sigma_B$$

Καμπύλες Wohler:

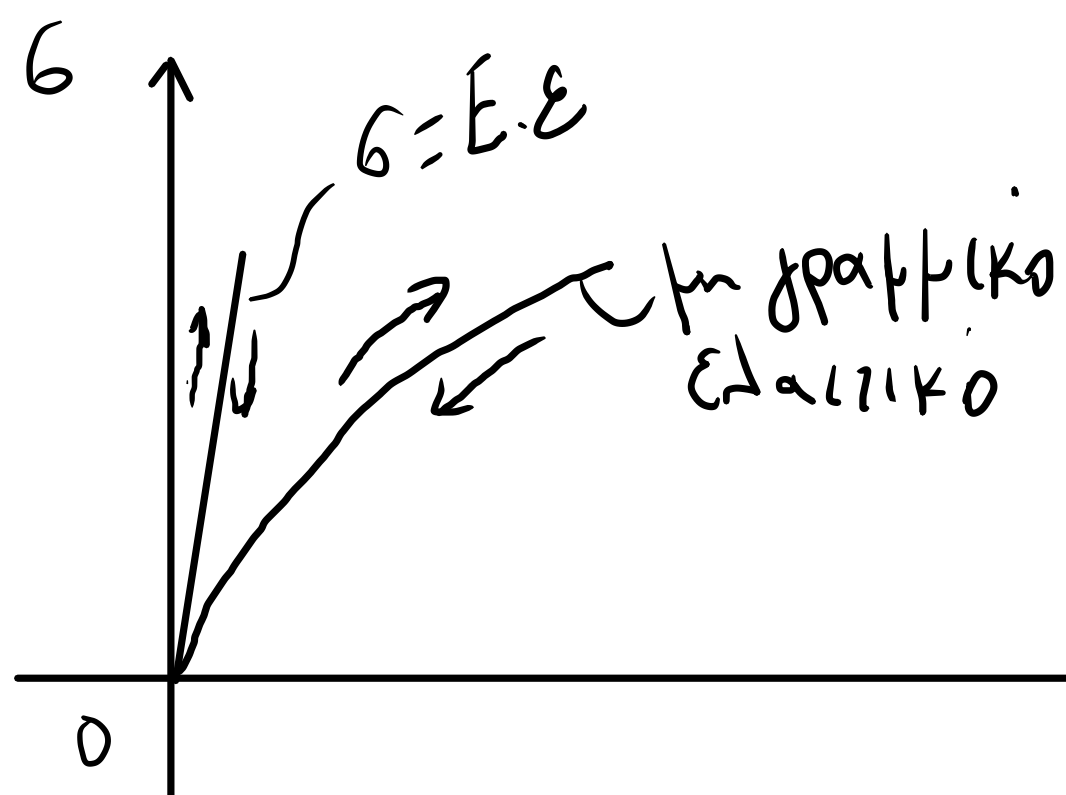


οριο διαρκείας αντοχής (ΟΔΑ)
 για χαλυβας $ΟΔΑ = \frac{1}{2} \sigma_F$
 Αιτία αμυχής το άθροισμα των μικροβωφών σε
 κάθε κύκλο φόρτισης.

Εξιδανικευμένα πρότυπα υλικών.

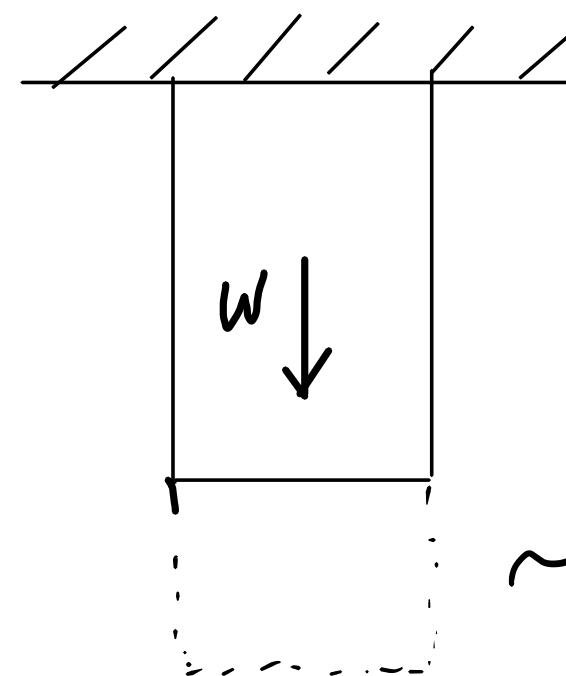


α) Απόλυτα ελαστικά υλικά:



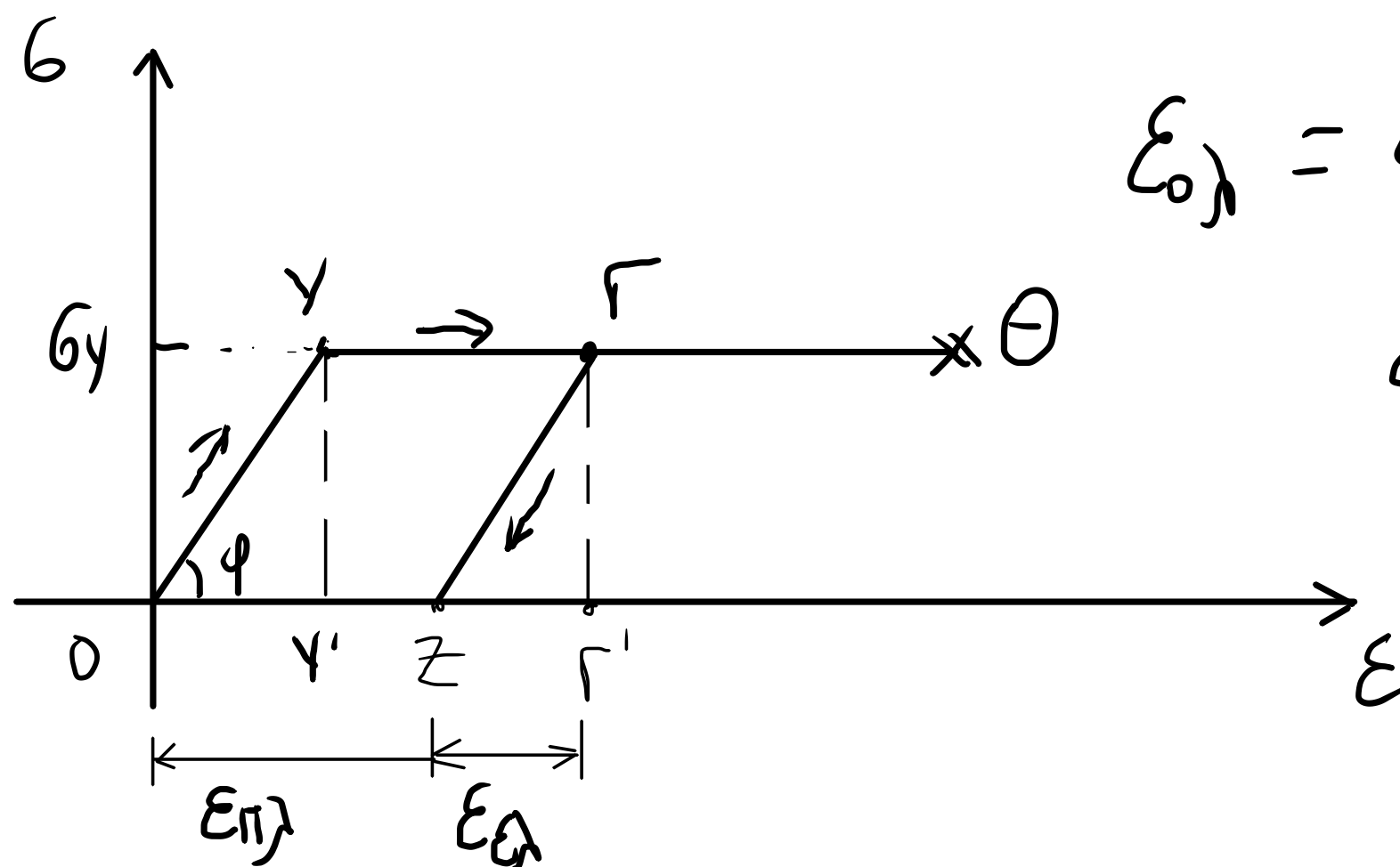
- Δεν υπάρχει εξάρτηση από το χρόνο
 - Πλήρη επαναφορά στις αρχικές διαστάσεις μετά την αποφόρτιση
 - Ακολουθείται η ίδια καμπύλη $\sigma - \epsilon$ φόρτιση - αποφόρτιση
- $E_{πλ} = 0$.

β) Ανελαστικά υλικά (ισωθελαστικά - πολυμερή υλικά).



Ερπυσμός
↓
Χαλάρωση

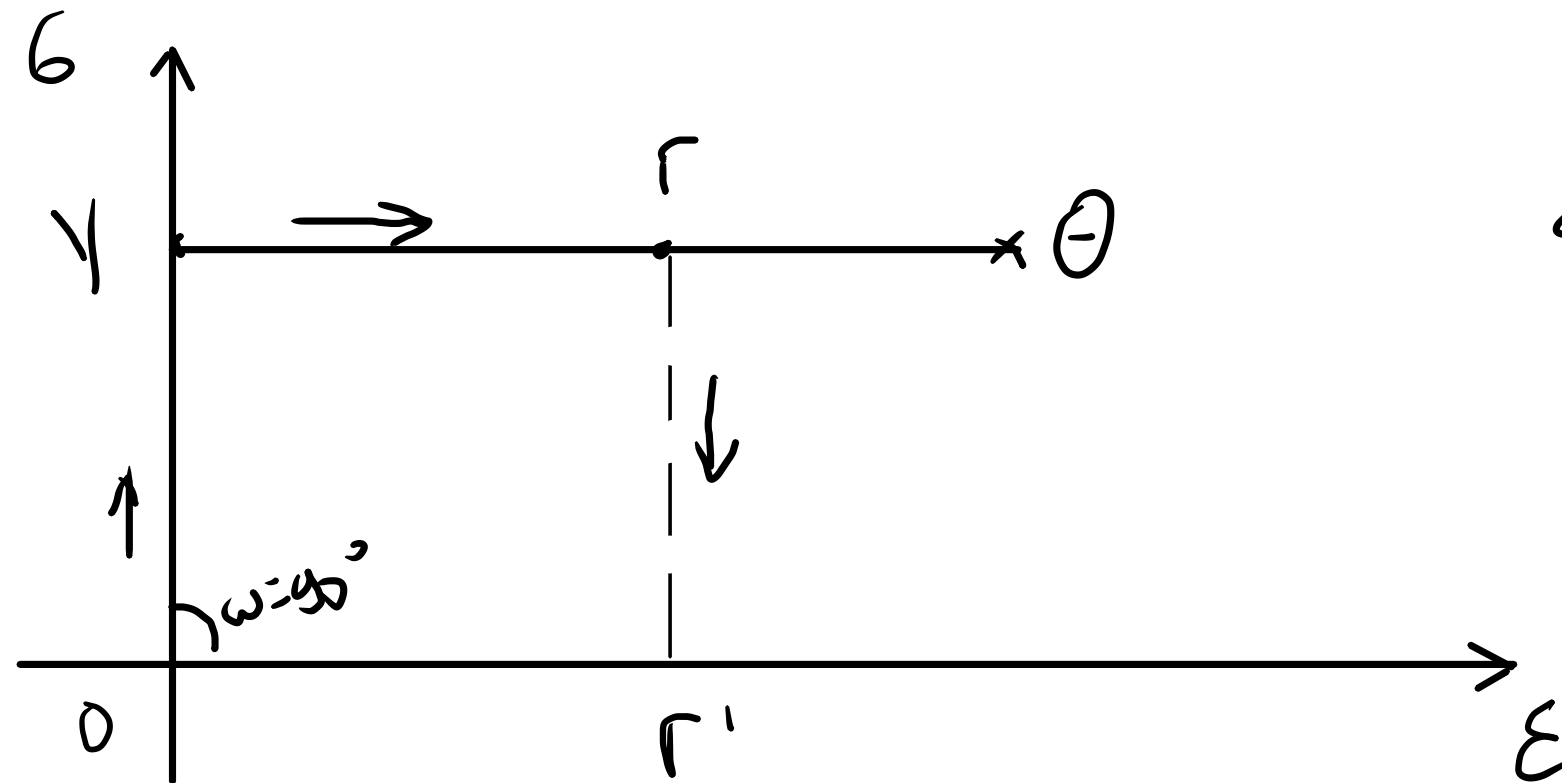
γ) Ελαστικά-απολύτως πλαστικά (ελαβωπλαστικά)



$$\epsilon_{0\rho} = \epsilon_{0\rho'} = \epsilon_{0z} + \epsilon_{z\rho'} = \epsilon_{\pi\lambda} + \epsilon_{ελ}$$

$$\epsilon_{0\rho} = \epsilon_{0\gamma'} + \epsilon_{\gamma'\rho'} = \epsilon_{ελ} + \epsilon_{\pi\lambda}.$$

δ) Έλαστως πλαστικά υλικά



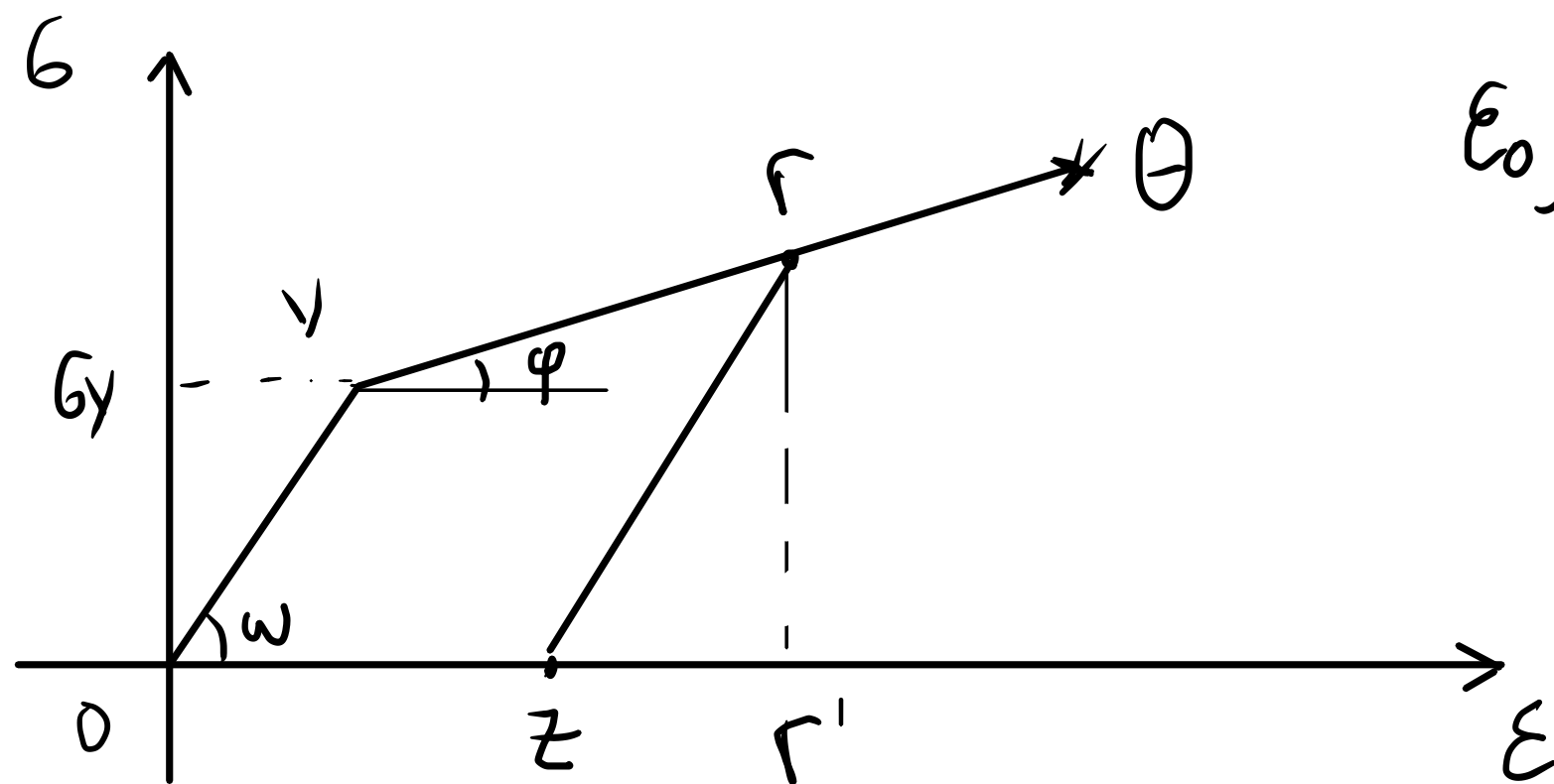
$$\epsilon_{0\lambda} = \epsilon_{0\sigma'} = \epsilon_{\pi\lambda}$$

$$\bar{E} = E \sin^2 \omega \rightarrow \infty$$

$$\sigma = \bar{E} \epsilon \quad \text{Hooker.}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{\bar{E}} = \frac{\sigma}{\infty} \rightarrow 0 = \epsilon_{\lambda}$$

ε) Ελαστικά - γραμμικά κραζυρόμενα υλικά:

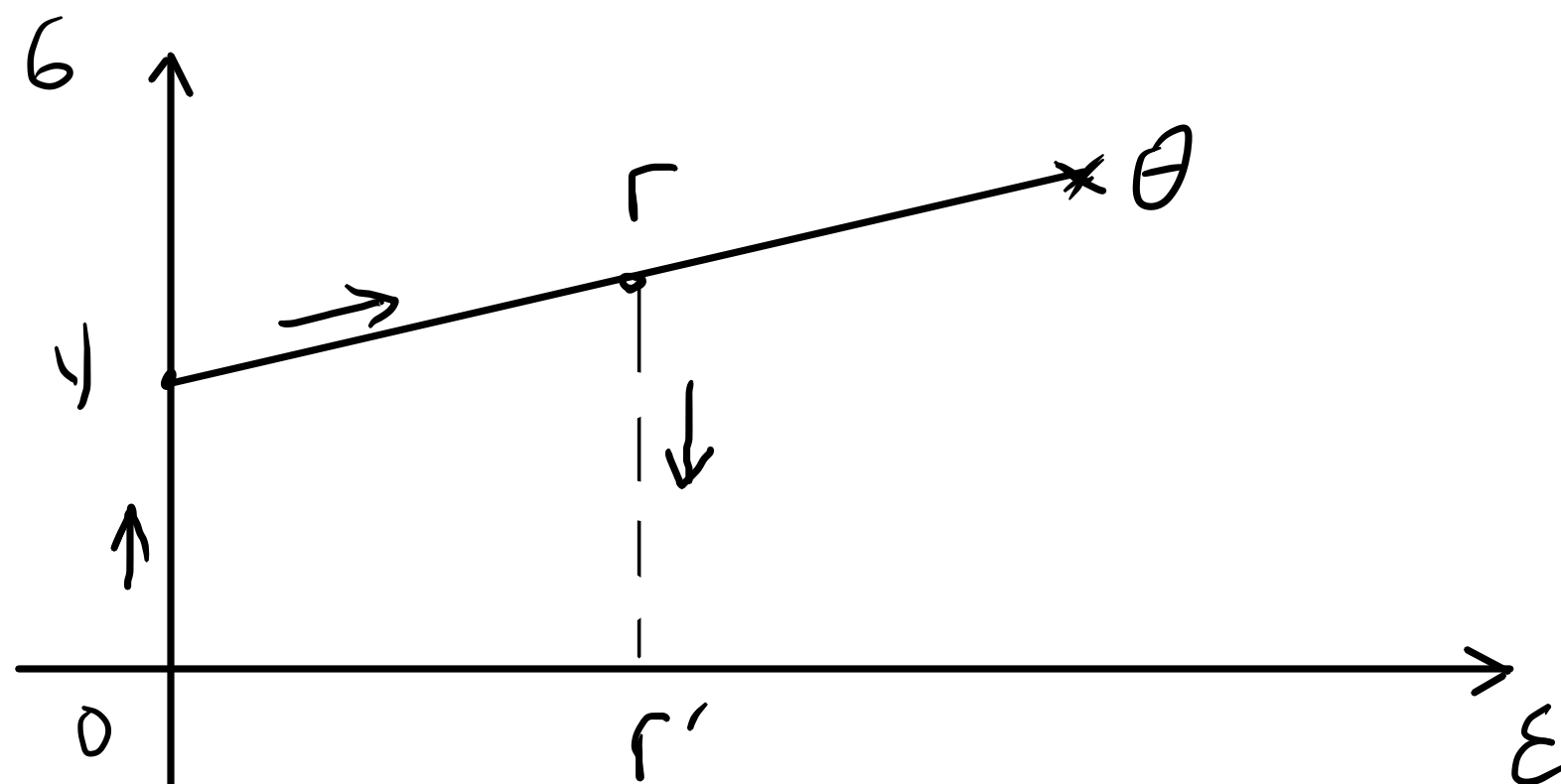


$$\epsilon_{0\lambda} = \epsilon_{0\sigma'} = \epsilon_{0\epsilon} + \epsilon_{\epsilon\sigma'} = \epsilon_{\epsilon\pi\lambda} + \epsilon_{\epsilon\lambda}$$

$\gamma \theta$: γραμμική κραζωω

$\sigma \gamma$: ελαστική γραμμική υπερτεριγ-ρα

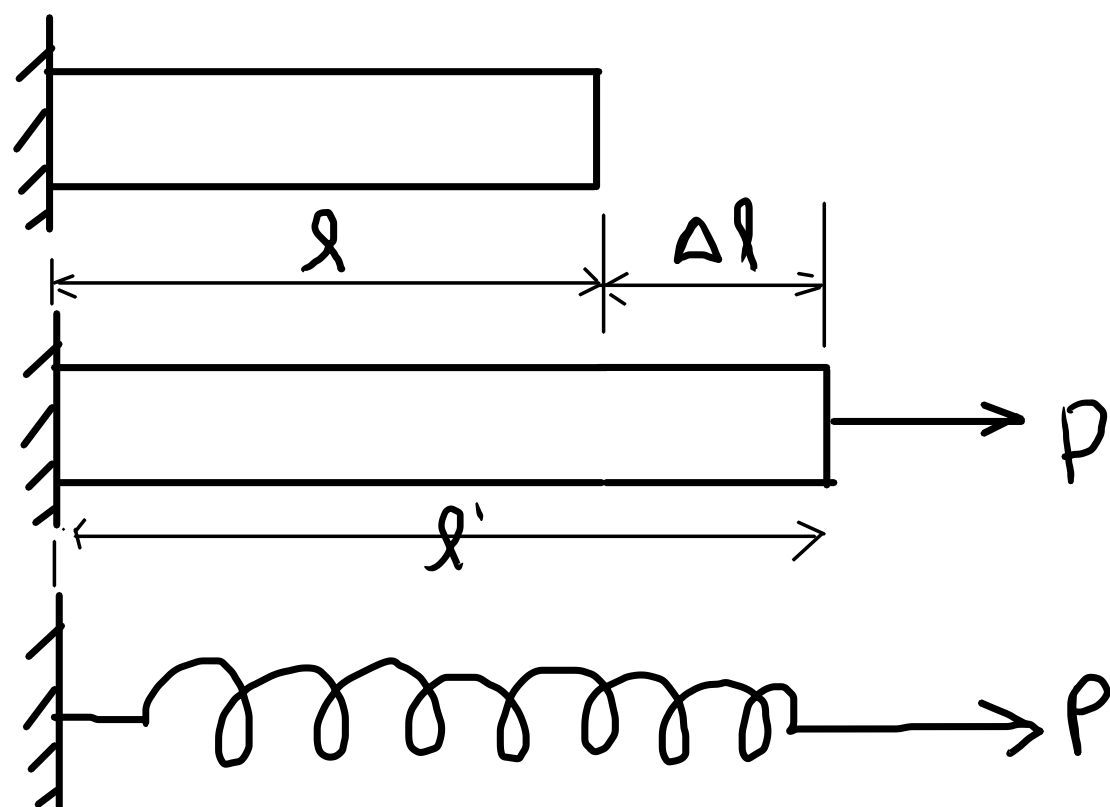
62) Υλικά με γραμμική κρυσάλωση:



$$E \rightarrow \infty, \quad E_{\text{ερ}} = 0$$

$$E_{0\Gamma'} = E_{\pi\lambda}.$$

Αξονικός εφελκυσμός - Θλίψη



Νόμος του Hooke (L678)

$$l' = l + \Delta l, \quad \Delta l = \frac{l}{EA} P \Rightarrow P = \frac{EA}{l} \Delta l$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \bar{\epsilon} \cdot E$$

EA: αξονική αντιστάση

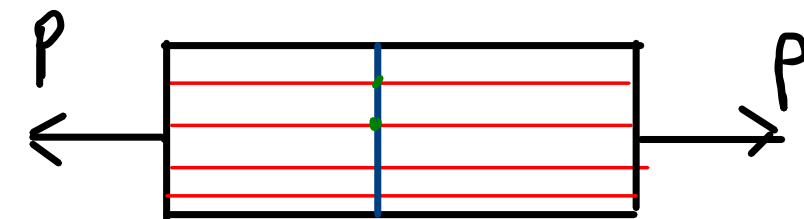
$$P = k_{ελ} \cdot \Delta l$$

για τη δοκίμ $k_{ελ} \equiv \frac{EA}{l}$

$$\sigma = \bar{\epsilon} \cdot E$$

Παραδοχές ισχύος νόμου Hooke:

- Ευθύγραμμος άξονας ράβδου
- Η δύναμη εφαρμόζεται στο κέντρο της διατομής (Saint-Venant, ομοιόμορφη κατανομή τάσεων)
- Στη θλίψη δεν έχω λυγισμό
- Όλες οι καθεγύκτες ίνες της ράβδου επιμηκύνονται το ίδιο
- Οι διατομές παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα μετά τη παραμόρφωση
- $\sigma \leq \sigma_A$ είναι το όριο αναλογίας

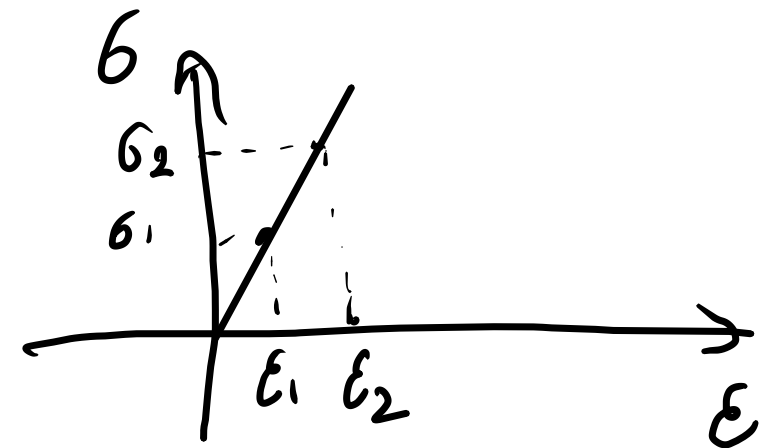


Φυσικό νόημα του μέτρου ελαστικότητας

Το μέτρο ελαστικότητας αντιστοιχείει την τάση σ που αναπτύσσεται σε ένα υλικό που υποβάλλεται σε μοναξονικό εφελκυσμό για ανηγμένη παραμόρφωση $\epsilon = 1$

$$\epsilon = 1, \frac{\Delta l}{l} = 1 \Rightarrow \frac{l' - l}{l} = 1 \Rightarrow l' - l = l \Rightarrow \underline{l' = 2l}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{για } \epsilon = 1 \Rightarrow \sigma = E$$



$$E = E_{\varphi\omega} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon}$$

Χάλυβα: $E = 210 \text{ GPa}$

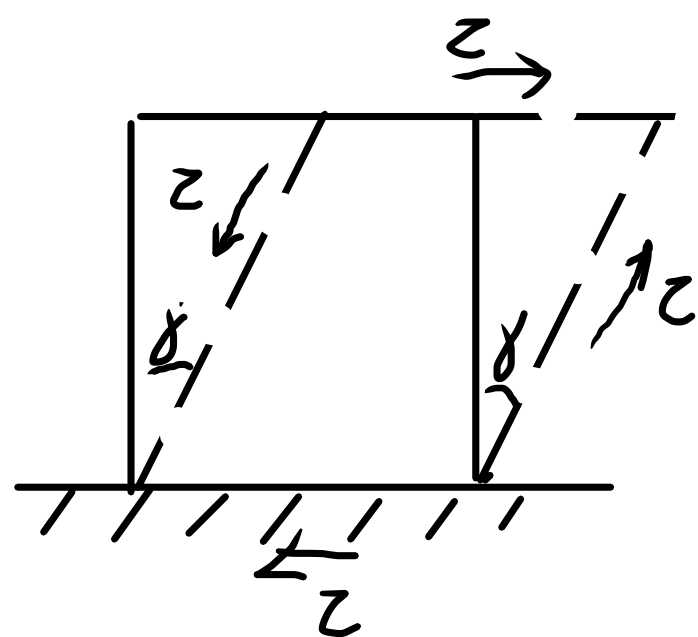
Αλουμίνιο: $E = 70 \text{ GPa}$

Ορείχαλκος: $E = 90 \text{ GPa}$ (65% Cu, 35% Zn)

Σκυρόδεμα: $E = 25 \text{ GPa}$

Θλίψη: συνήθως έχουμε ίδιο μέτρο ελαστικότητας E .

Σχέση διατμητικής τάσης — διατμητικής ερπής



γ : διατμητική ερπή (γωνιακή παραμόρφωση)
 τ : διατμητική τάση

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{ανάρτηση} \quad G = E \cdot \epsilon$$

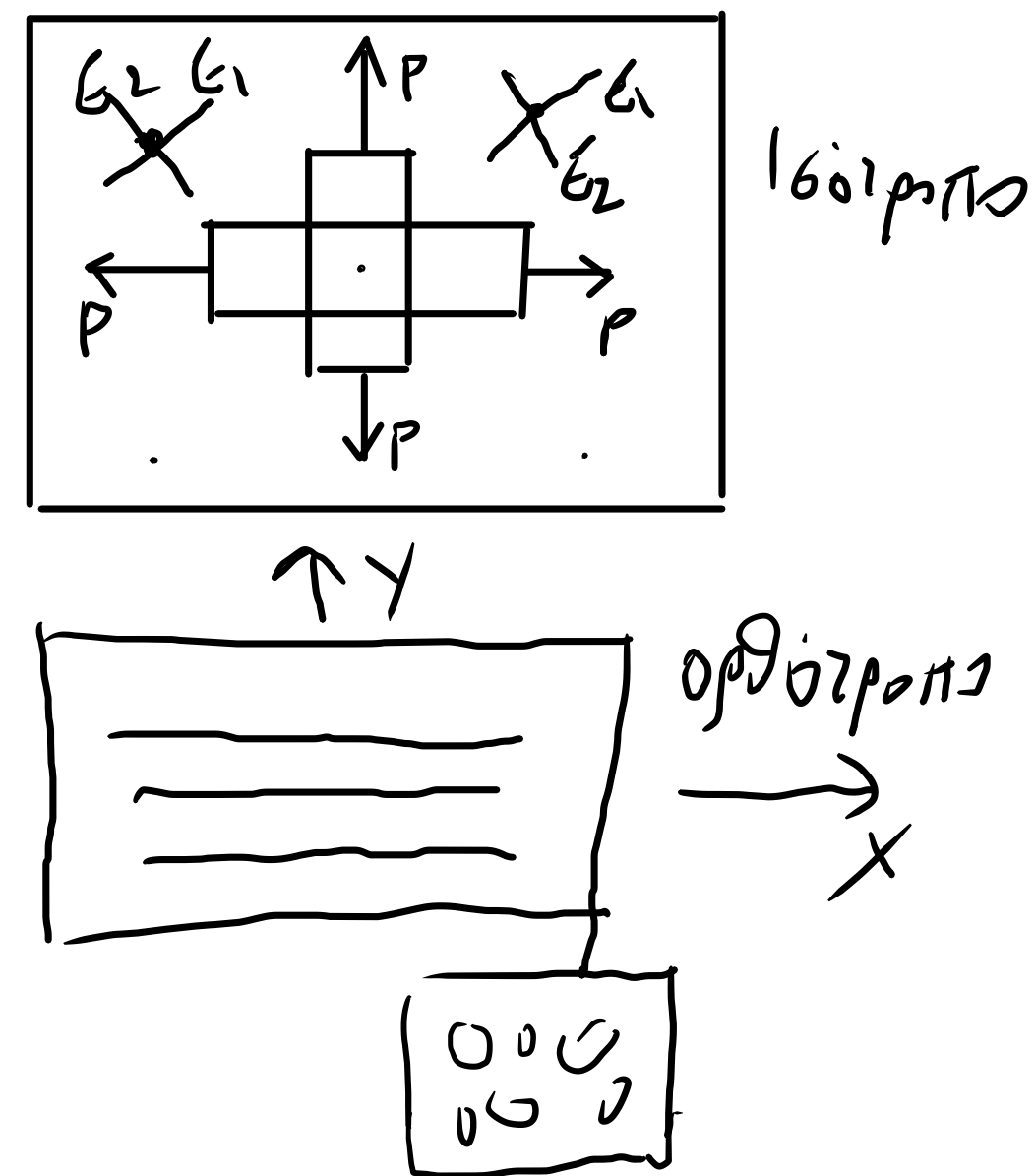
G : μέτρο διατμής (shear modulus)
 ή μέτρο ολισθήσεως

$G, E, \nu \dots$ ελαστικές σταθερές του υλικού
Ισότροπο υλικό: ίδιες ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις.

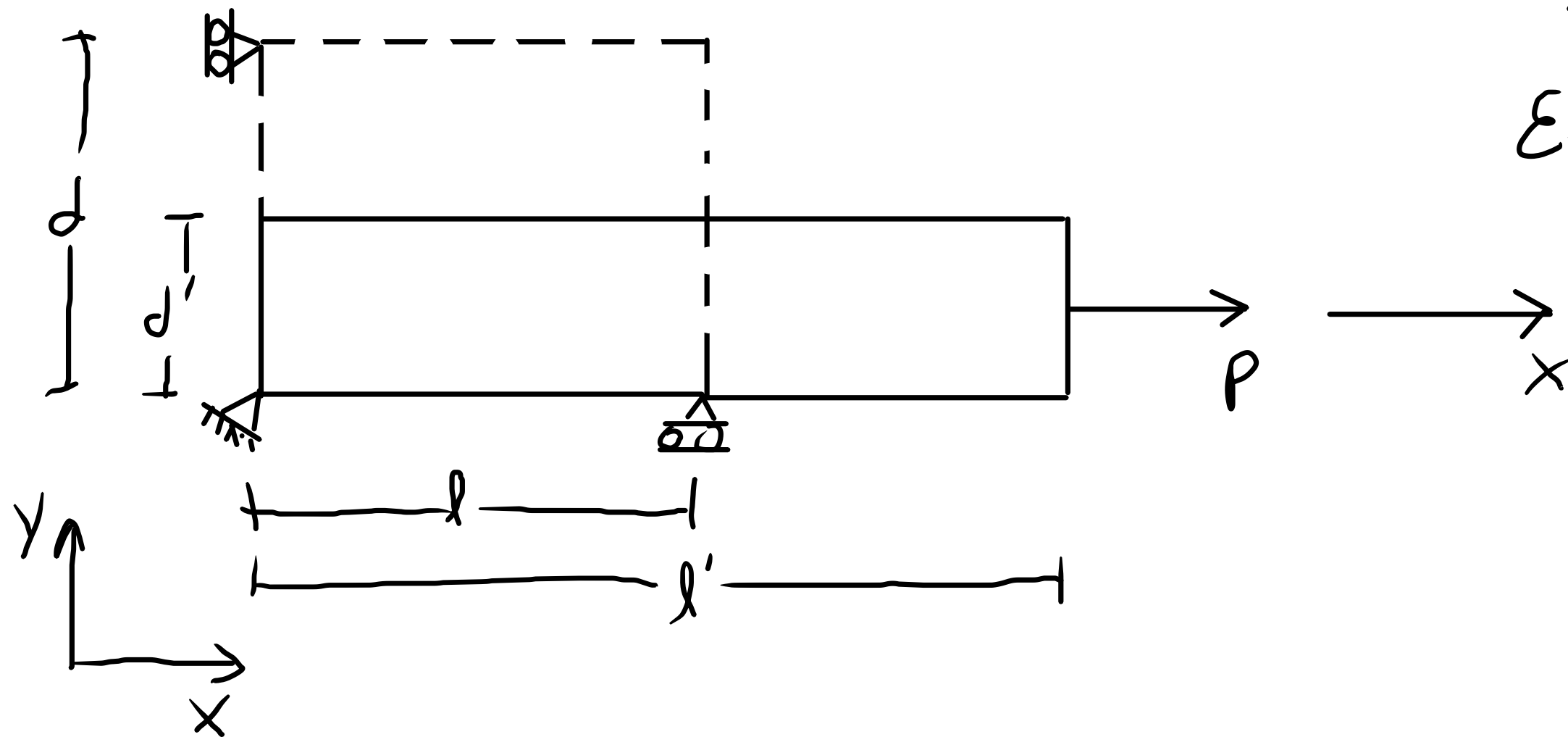
Ομογενές υλικό: τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν : λόγος Poisson
 για πλαστικά $\nu \approx 0,25$ έως $0,35$
 αδιαβάστατο μέγεθος



Λόγος Poisson



$$\epsilon_x = \frac{l' - l}{l} : \text{αξονική τροπή}$$

$$\epsilon_y = \frac{d - d'}{d} : \text{εγκάρσια τροπή}$$

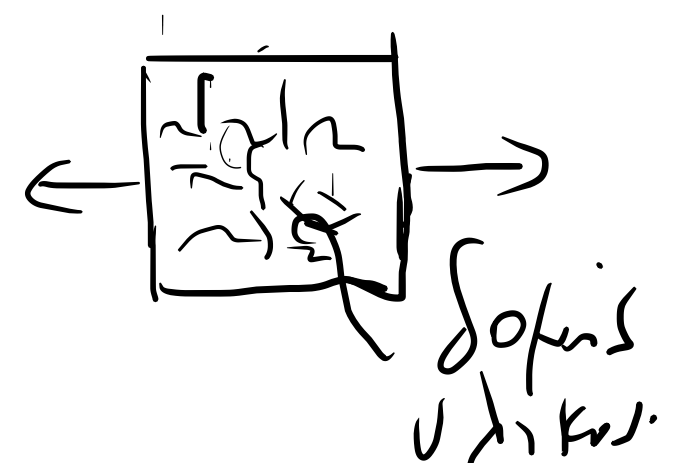
για υδροστατική:

$$\epsilon_y = \epsilon_z$$

$$\text{Λόγος Poisson } \nu = - \frac{\text{εγκάρσια τροπή}}{\text{αξονική τροπή}} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5$$

χαλκός : $\nu = 0,3$
 φελλός : $\nu = 0$
 λάτιχα : $\nu = 0,5$

τεχνητά υλικά (αυχρητικά) $\nu < 0$
 $-1 \leq \nu \leq 0,5$



Διογκωσις εφελκυόμενης ράβδου:

Ανηγμένη μεταβολή όγκου ή ανηγμένη διογκωσις Θ

$$\frac{L_x + \delta_x}{L_x} = \frac{L_x}{L_x} + \frac{\delta_x}{L_x} = 1 + \epsilon_x$$

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{(L_x + \delta_x)(L_y + \delta_y)(L_z + \delta_z)}{L_x \cdot L_y \cdot L_z} - 1 = \frac{L_x + \delta_x}{L_x} \cdot \frac{L_y + \delta_y}{L_y} \cdot \frac{L_z + \delta_z}{L_z} - 1$$

$$= (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \mathcal{O}(\epsilon^2) \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$\left. \begin{array}{l} \Theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ \nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \end{array} \right\} \Rightarrow \Theta = \epsilon_x - \nu \epsilon_x - \nu \epsilon_x = \epsilon_x (1 - 2\nu)$$

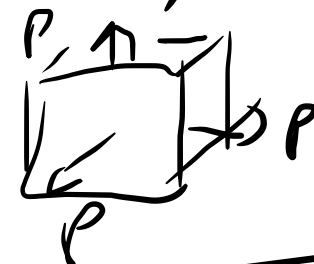
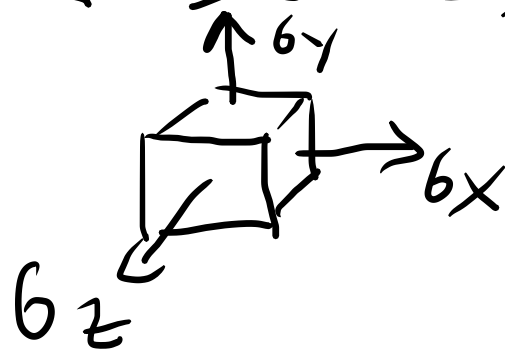
↑
οροι ανώτερης τάξης
≥ 2ης τάξης.

Εφελκυσις: $\epsilon_x > 0$, $\Theta \geq 0$, $1 - 2\nu \geq 0 \Rightarrow \nu \leq 0,5$

$$P = K_p \cdot \Theta$$

$$P = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Πίεση

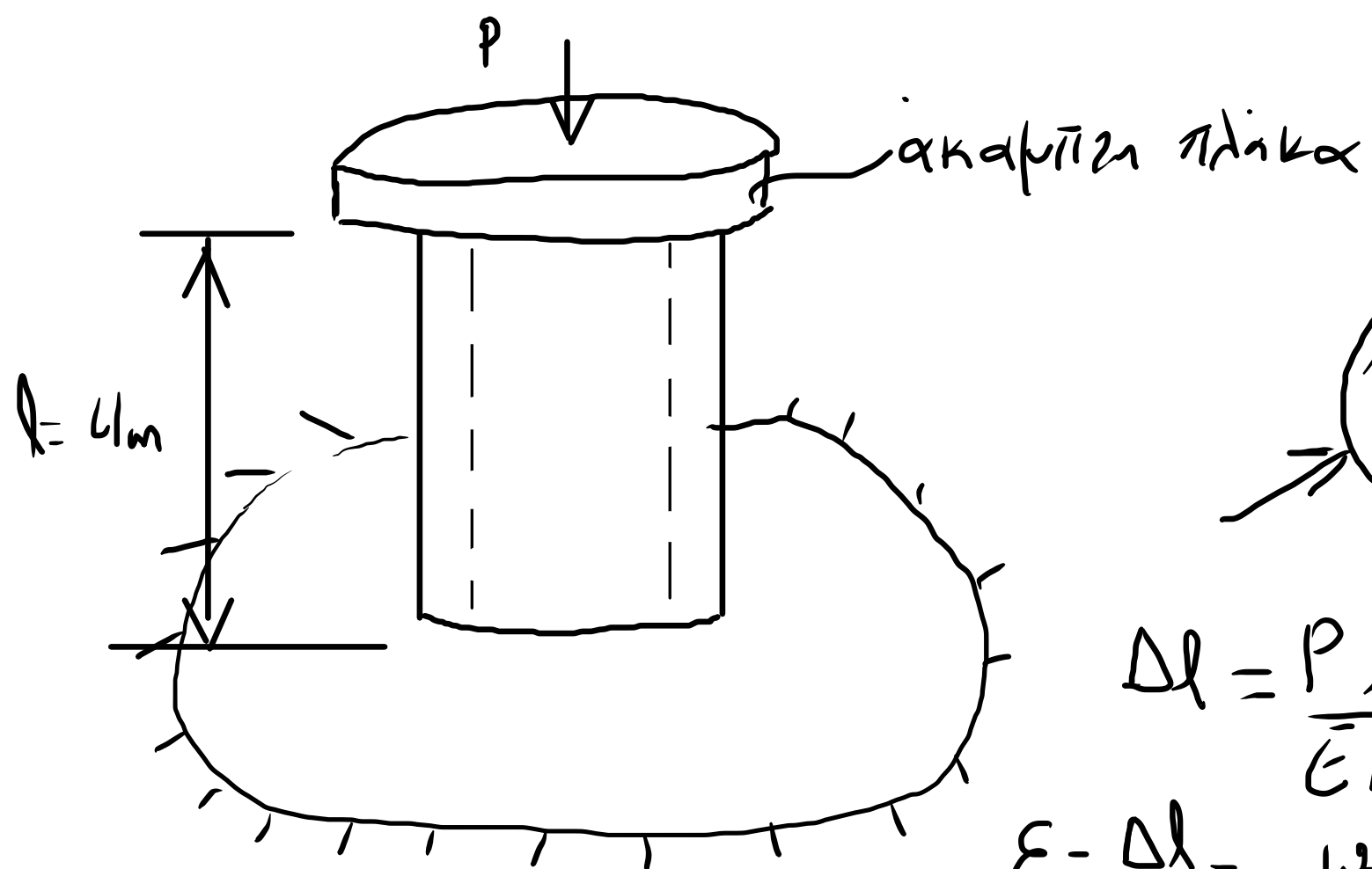


K_p : μέτρο διογκωσις (Bulk modulus) ελαστική σταθερά

$$K_p = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Παράδειγμα:

Χαλύβδινος στύλος ύψους $l=4\text{m}$ (κώλυος κύλινδρος) με διατομή κυκλικού δακτυλίου $D_{\text{εξ}}=100\text{mm}$ (εξωτερ. διάμετρος), πάχος $t=5\text{mm}$. Ασκούμε θλιπτικό φορτίο $P=-10^5\text{N}$ με τη βοήθεια ακαμπτής πλάκας. Ζητείται η παραμόρφωση, το ελκτικό τμήκος του στύλου και η αναπνευσμένη ορθή τάση εάν $E=210\text{GPa}$. (έντος της περιοχής της γραμμικής ελαστικότητας).



$$1\text{GPa} = 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^9 \text{Pa}$$

$$A = \frac{\pi D_{\text{εξ}}^2}{4} - \frac{\pi D_{\text{εβ}}^2}{4} \approx 1491,5 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

$$D_{\text{εβ}} = D_{\text{εξ}} - 2t = 100 - 2 \cdot 5 = 90 \text{mm}$$

$$\Delta l = \frac{P l}{E A} = \frac{-10^5 \cdot 4}{210 \times 10^9 \cdot 1491,5 \times 10^{-6}} = -1,28 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = -\frac{1,28 \cdot 10^{-3}}{4} = -0,032\%$$

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} \Rightarrow l' = l + \varepsilon l$$

$$l' = l(1 + \varepsilon) = 4\left(1 - \frac{0,032}{100}\right) \approx 3,99872 \text{m}$$

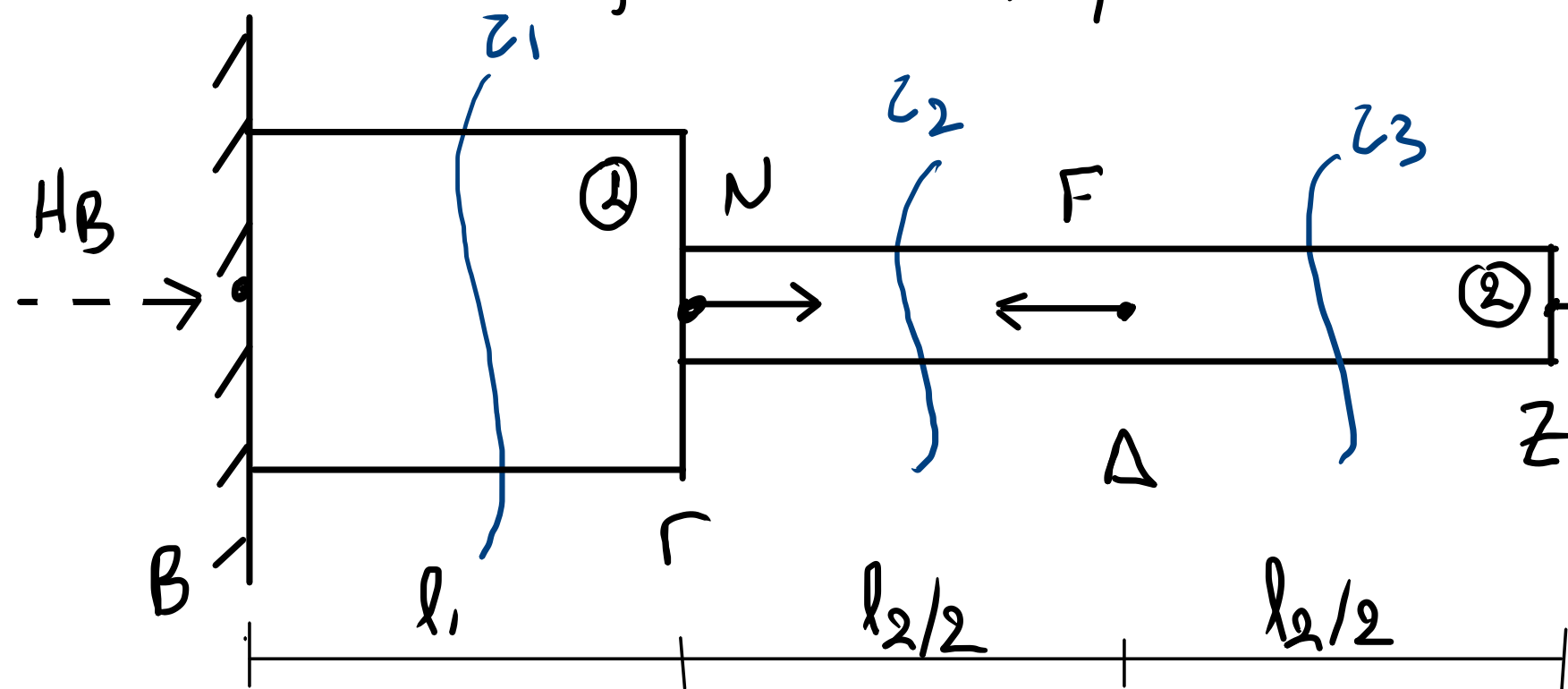
$$l' = l + \Delta l$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{-10^5 \text{N}}{1491,5 \times 10^{-6}} = -67 \times 10^6 \text{Pa} = -67 \text{MPa}$$

Παράδειγμα

Για την σύνθετη ράβδο του σχήματος να υπολογιστεί η παραμόρφωση του άκρου Z.

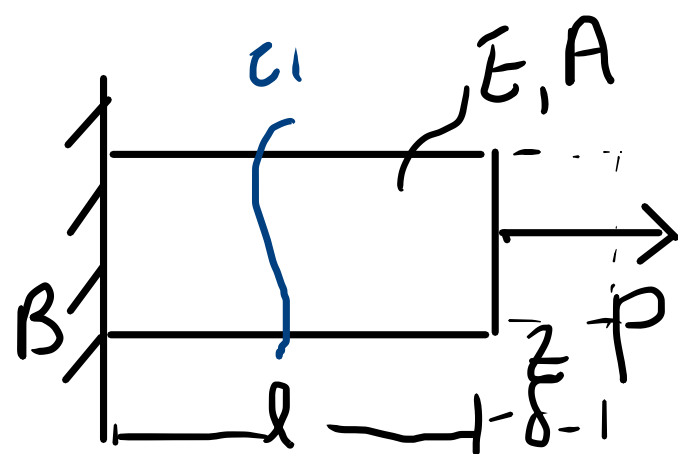


$$N = 5P, F = 4P, l_1 = l, l_2 = 2l$$

$$E_1 = E, E_2 = 2E$$

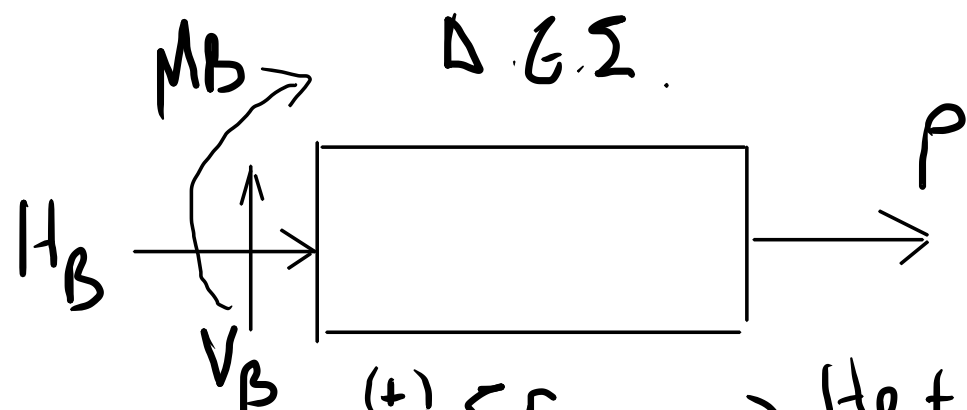
$$A_1 = A, A_2 = A/4$$

Σημείωση:

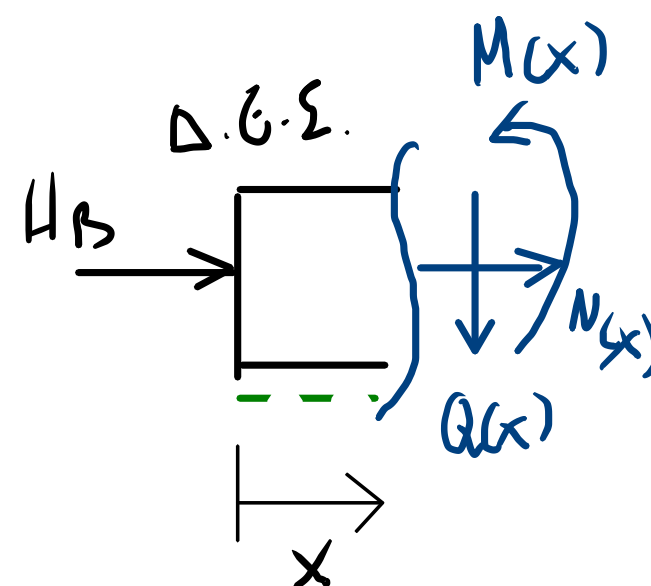


$$\delta = \frac{P}{EA} l$$

$$\delta = \frac{N(x) l}{EA}$$



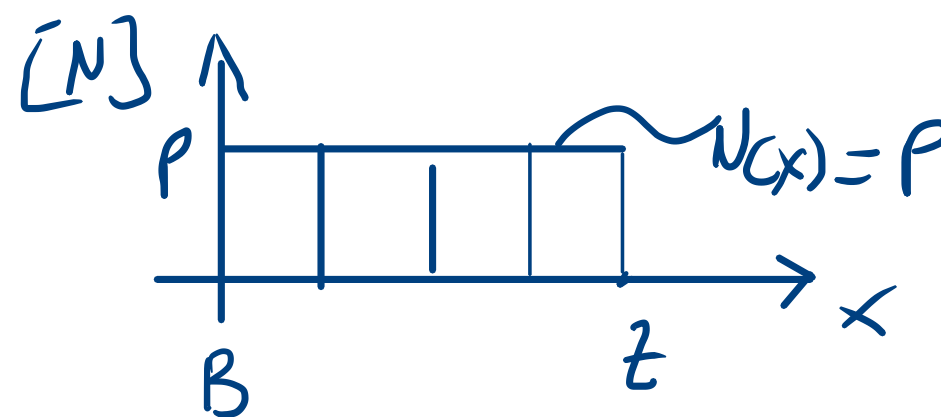
$$\begin{aligned} & (+) \sum F_x = 0 \Rightarrow H_B + P = 0 \Rightarrow H_B = -P \\ & + \uparrow \sum F_y = 0, V_B = 0, \quad (+) \sum M_B = 0, M_B = 0 \end{aligned}$$

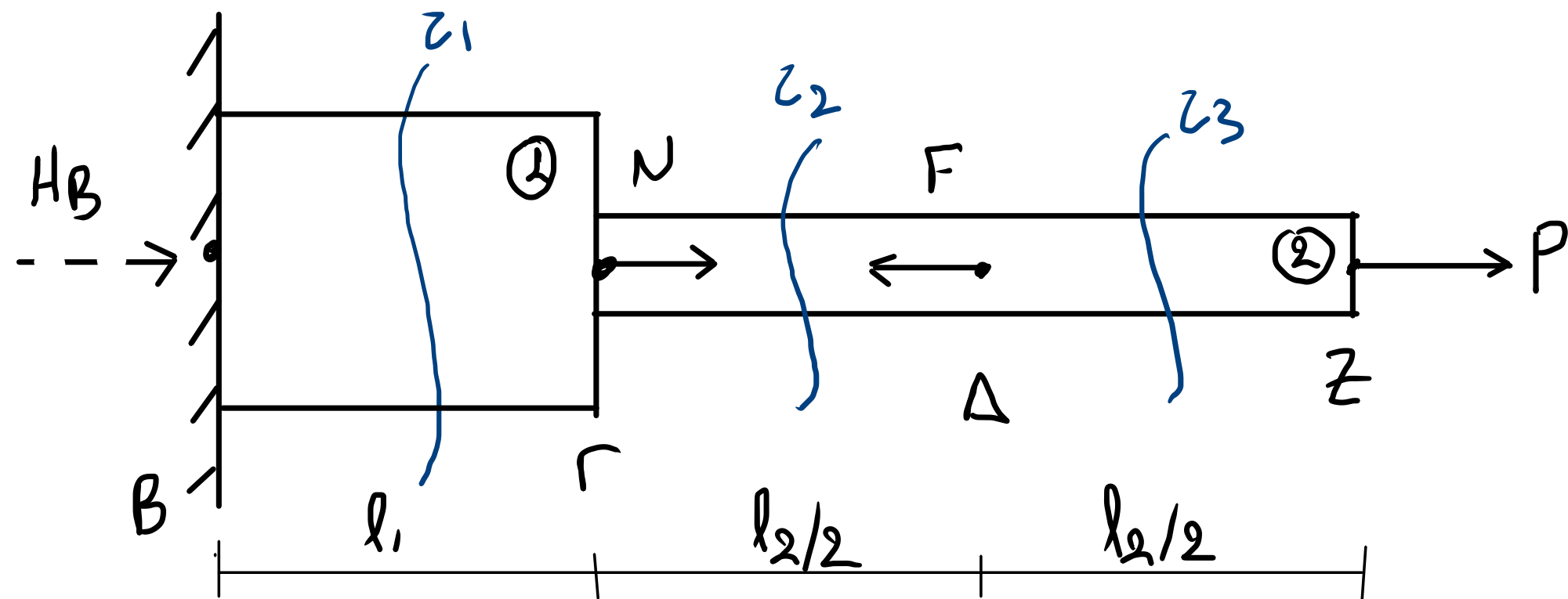


$$0 \leq x \leq l$$

$$+ \sum F_x = 0 \Rightarrow H_B + N(x) = 0$$

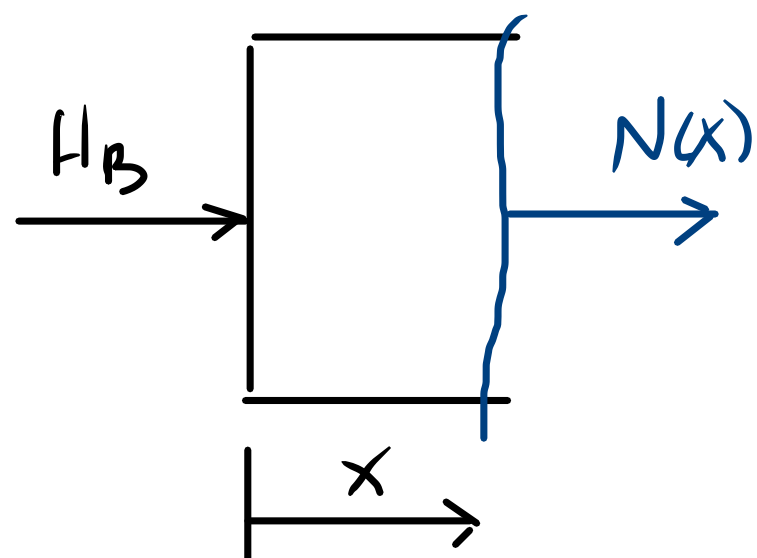
$$\Rightarrow N(x) = -H_B = P$$





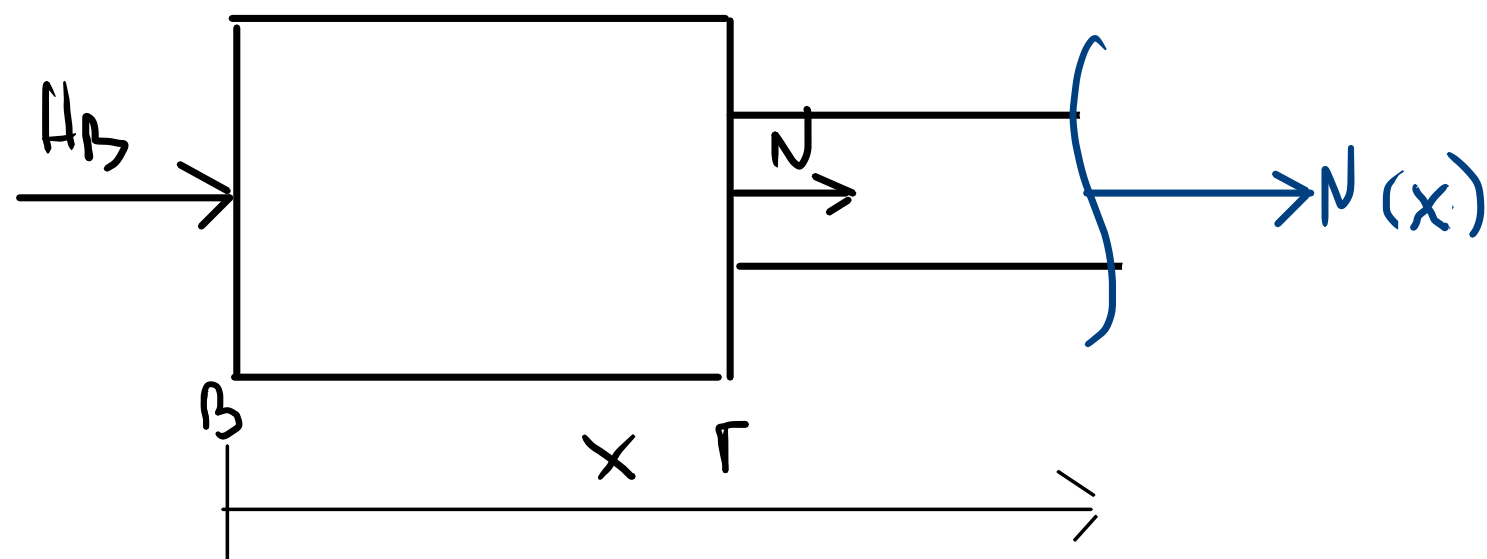
$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{(+)} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \\
 & H_B + N - F + P = 0 \\
 & \Rightarrow H_B = -N + F - P = -5P + 4P - P \\
 & \Rightarrow \underline{H_B = -2P}
 \end{aligned}$$

$z_1: B \rightarrow r: 0 \leq x < l_1$



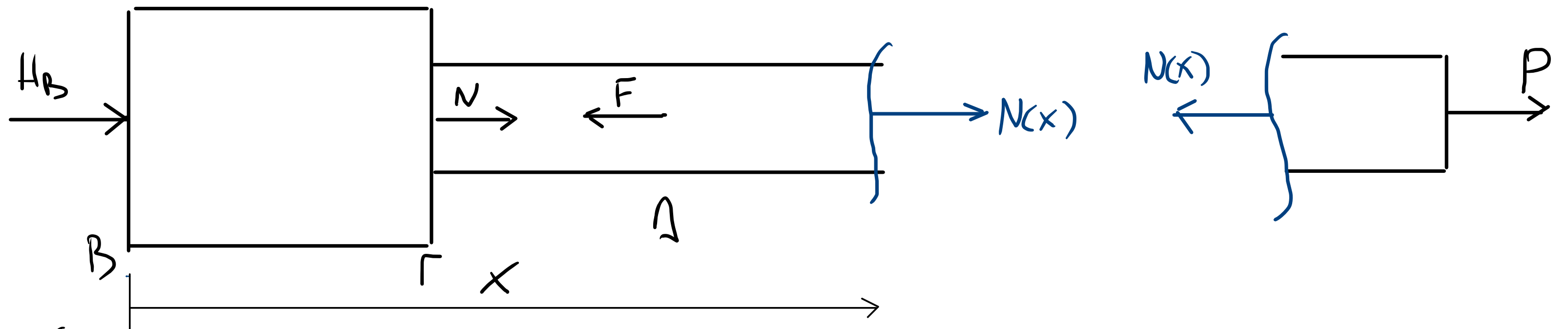
$$\xrightarrow{(+)} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_B + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = -H_B = 2P$$

$z_2: r \rightarrow \Delta: l_1 \leq x < l_1 + \frac{l_2}{2}$



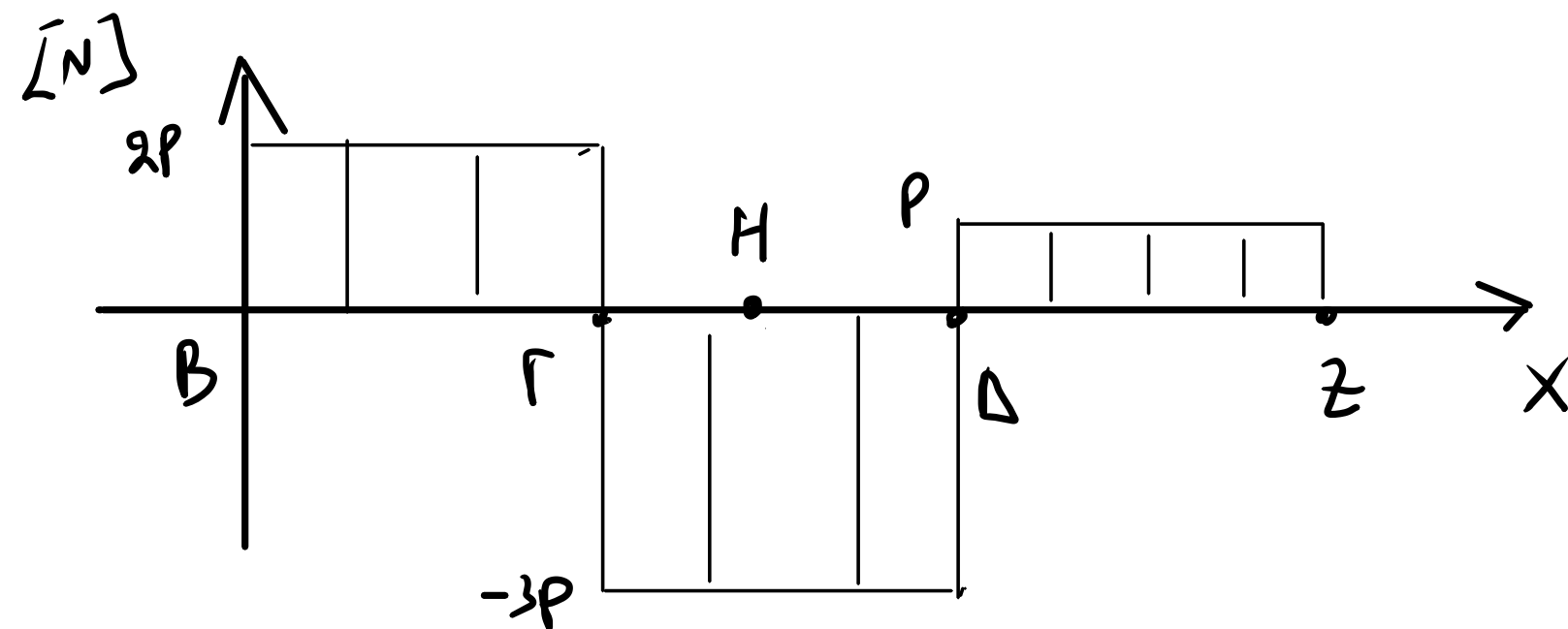
$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{(+)} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_B + N + N(x) = 0 \\
 & \Rightarrow N(x) = -H_B - N = 2P - 5P = -3P
 \end{aligned}$$

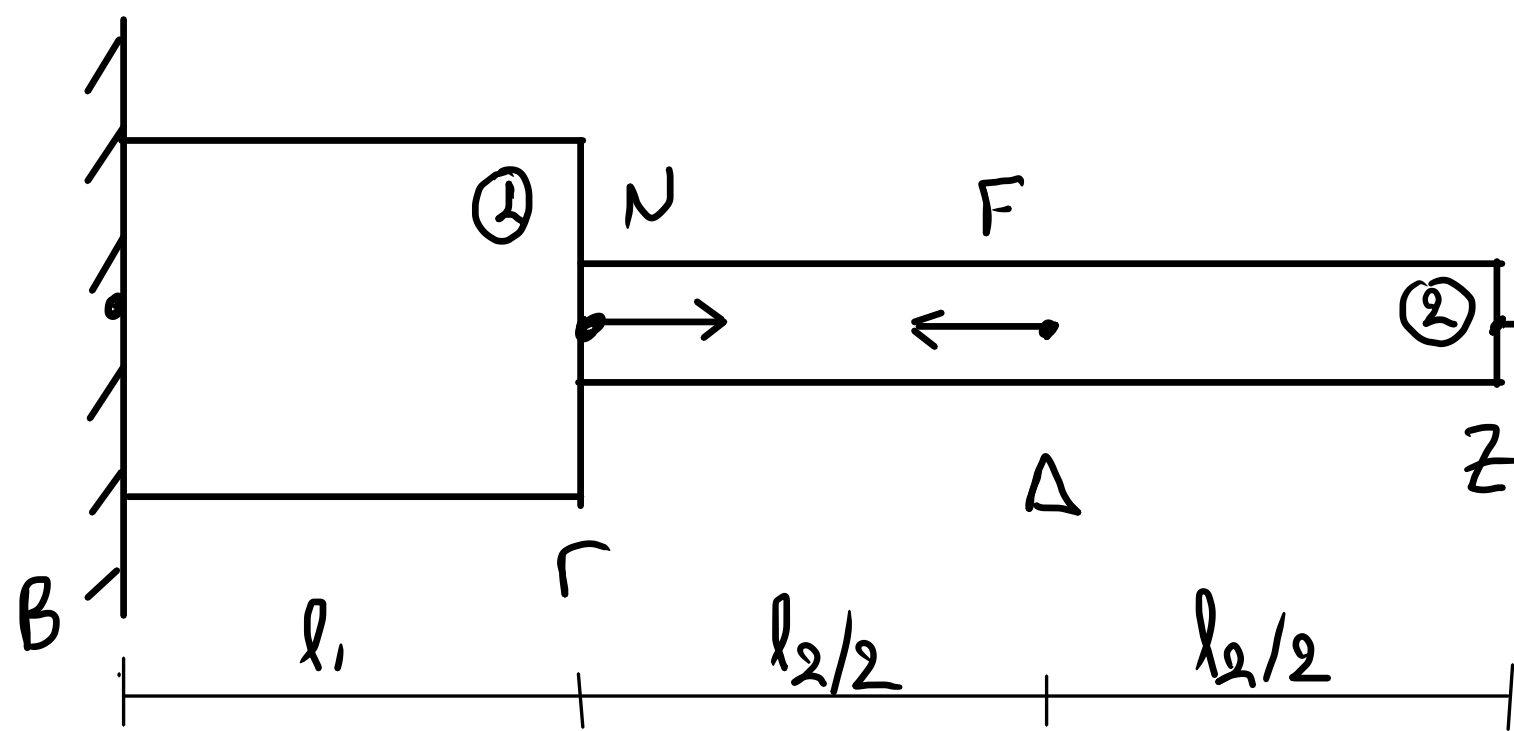
$$z_3: \Delta z, l_1 + \frac{l_2}{2} \leq x \leq l_1 + l_2$$



$$\begin{aligned} \xrightarrow{(+)} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_B + N - F + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = -H_B - N + F = 2P - 5P + 4P \\ &\Rightarrow N(x) = P \end{aligned}$$

Διαγράμμα εσωτερικής αξονικής δύναμης $N(x)$ κατά μήκος της ράβδου





$$B\Gamma: N_{B\Gamma} = 2P, A_{B\Gamma} = A, E_{B\Gamma} = \bar{E}, l_{B\Gamma} = l$$

$$\Gamma\Delta: N_{\Gamma\Delta} = -3P, A_{\Gamma\Delta} = \frac{A}{4}, E_{\Gamma\Delta} = 2\bar{E}, l_{\Gamma\Delta} = l$$

$$\Delta Z: N_{\Delta Z} = P, A_{\Delta Z} = \frac{A}{4}, E_{\Delta Z} = 2E, l_{\Delta Z} = l$$

Συνολική μετατόπιση στο άκρο Z:

$$\begin{aligned} \delta_z = \delta_{B/Z} = \delta_z - \delta_B^{\rightarrow 0} &= (\delta_z - \delta_\Delta) + (\delta_\Delta - \delta_\Gamma) + (\delta_\Gamma - \delta_B) = \delta_{\Delta/Z} + \delta_{\Gamma/\Delta} + \delta_{B/\Gamma} \\ &= \frac{N_{\Delta Z} \cdot l_{\Delta Z}}{E_{\Delta Z} \cdot A_{\Delta Z}} + \frac{N_{\Gamma\Delta} \cdot l_{\Gamma\Delta}}{E_{\Gamma\Delta} \cdot A_{\Gamma\Delta}} + \frac{N_{B\Gamma} \cdot l_{B\Gamma}}{E_{B\Gamma} \cdot A_{B\Gamma}} = \frac{P \cdot l}{2E \cdot \frac{A}{4}} + \frac{-3P \cdot l}{2\bar{E} \cdot \frac{A}{4}} + \frac{2P \cdot l}{\bar{E} A} = -\frac{4Pl}{EA} + \frac{2Pl}{EA} \\ &= -\frac{2Pl}{EA} \end{aligned}$$

Σχετική μετατόπιση $\delta_{\Gamma/Z}$

$$\delta_{\Gamma/Z} = \delta_z - \delta_\Gamma = (\delta_z - \delta_\Delta) + (\delta_\Delta - \delta_\Gamma) = \delta_{\Delta/Z} + \delta_{\Gamma/\Delta} = \frac{P \cdot l}{2E \cdot \frac{A}{4}} + \frac{-3P \cdot l}{2\bar{E} \cdot \frac{A}{4}} = -\frac{4Pl}{EA}$$

Ερώτηση:

Εάν το τμήμα της ράβδου ΓΗ αποξελεόταν από τριτο υλικό με $E_3 = \frac{E}{2}$ πως θα υπολογιζάτε σε αυτή την περίπτωση την συνολική παραμόρφωση του άκρου Ζ;

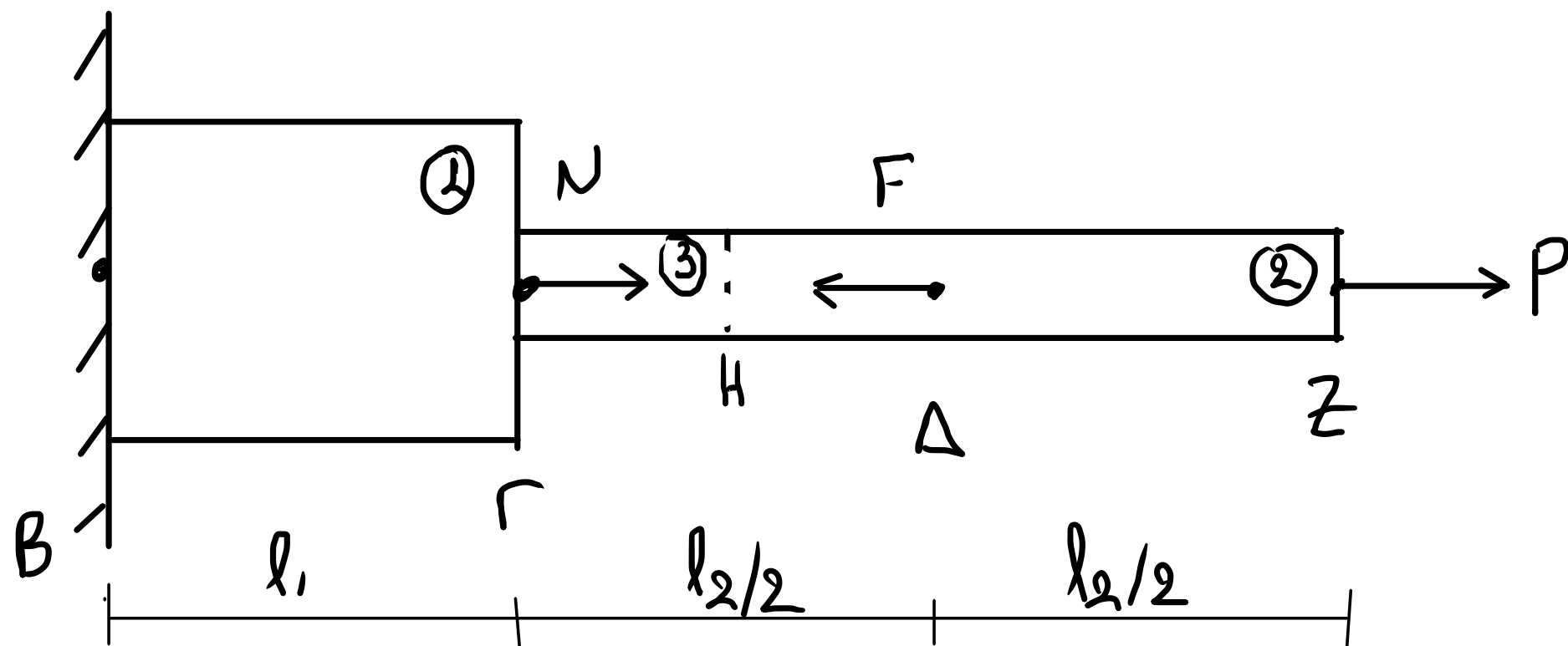
$$\delta_{B/Z} = \delta_Z - \delta_B = (\delta_Z - \delta_\Delta) + (\delta_\Delta - \delta_H) + (\delta_H - \delta_\Gamma) + (\delta_\Gamma - \delta_B)$$

$$N_{\Gamma H} = -3P$$

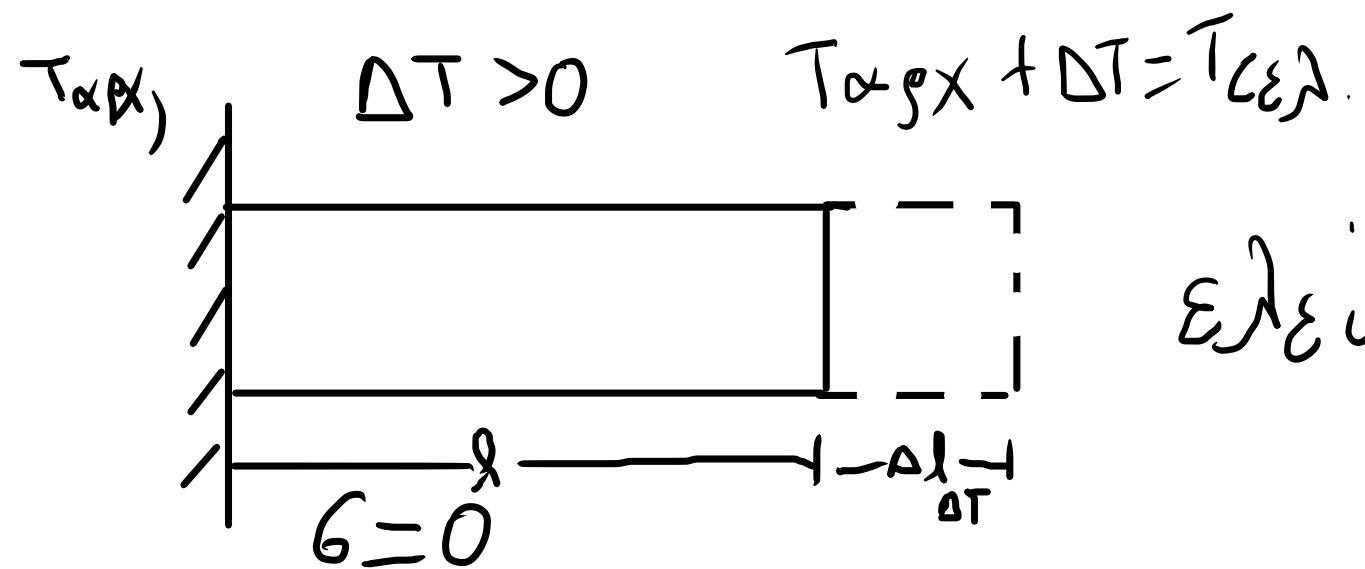
$$A_{\Gamma H} = \frac{A}{4}$$

$$E_{\Gamma H} = E_3 = \frac{E}{2}$$

$$\lambda_{\Gamma H} = \dots$$



Θερμικές τάσεις

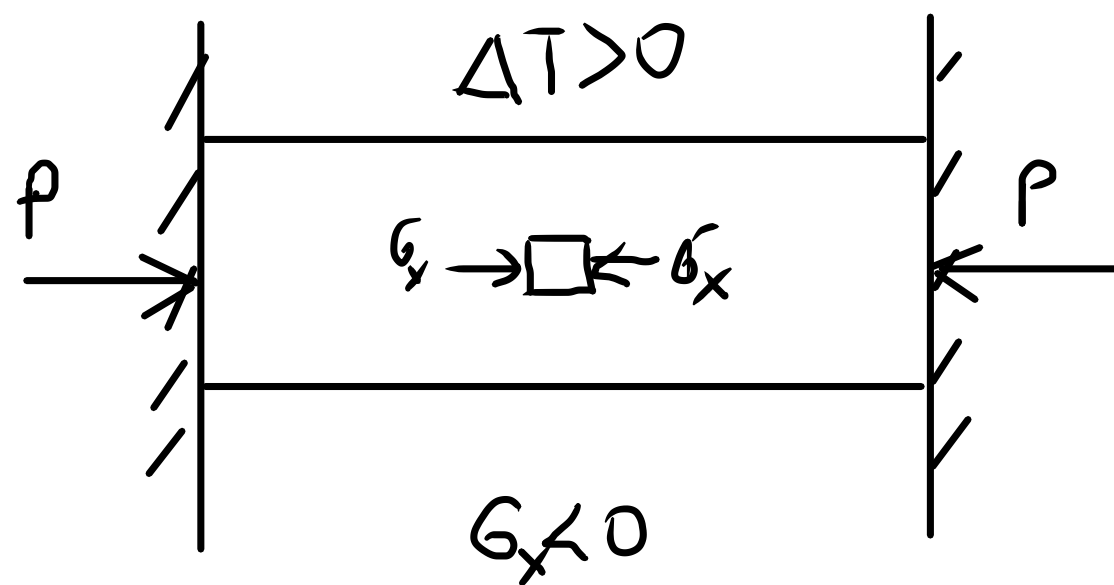


Ελεύθερη διαστολή

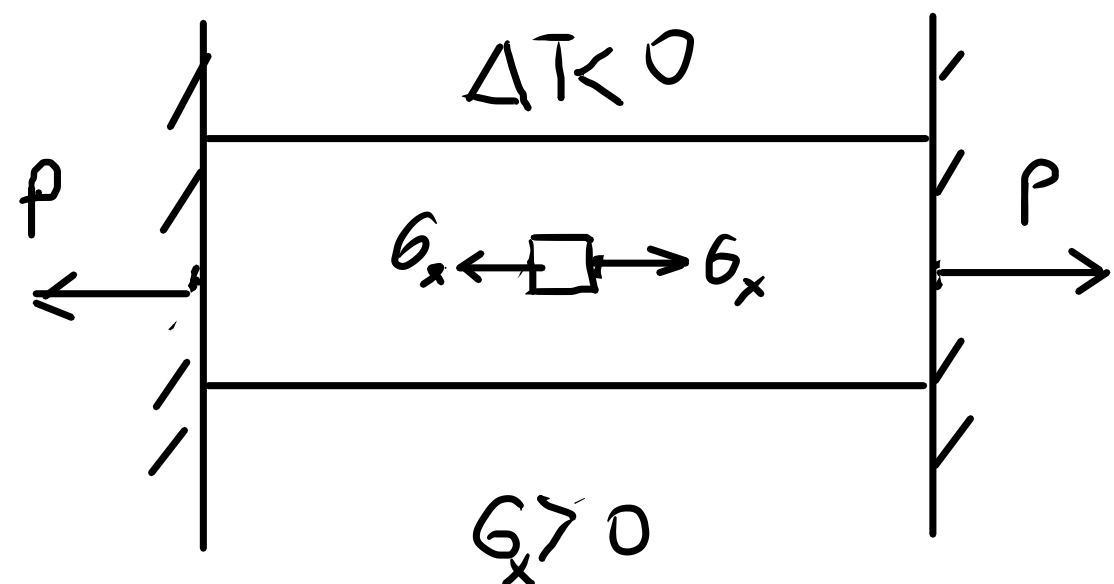
$$\Delta l_{\Delta T} = \alpha l \Delta T$$

α : συντελεστής θερμικής διαστολής

Εμπόδιζόμενη διαστολή



Εμπόδιζόμενη συστολή



$$\sigma_x = -\alpha E \Delta T$$

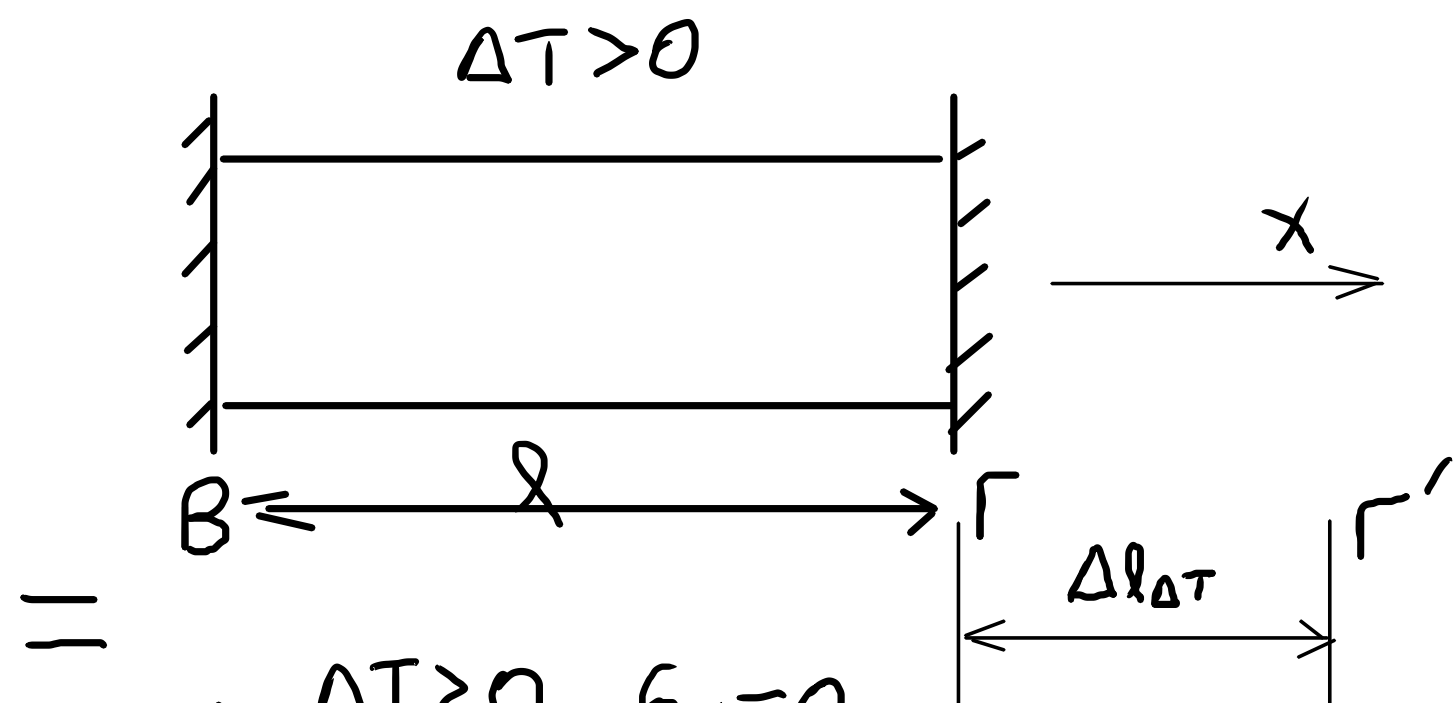
για $\Delta T > 0$, $\sigma_x < 0$

για $\Delta T < 0$, $\sigma_x > 0$

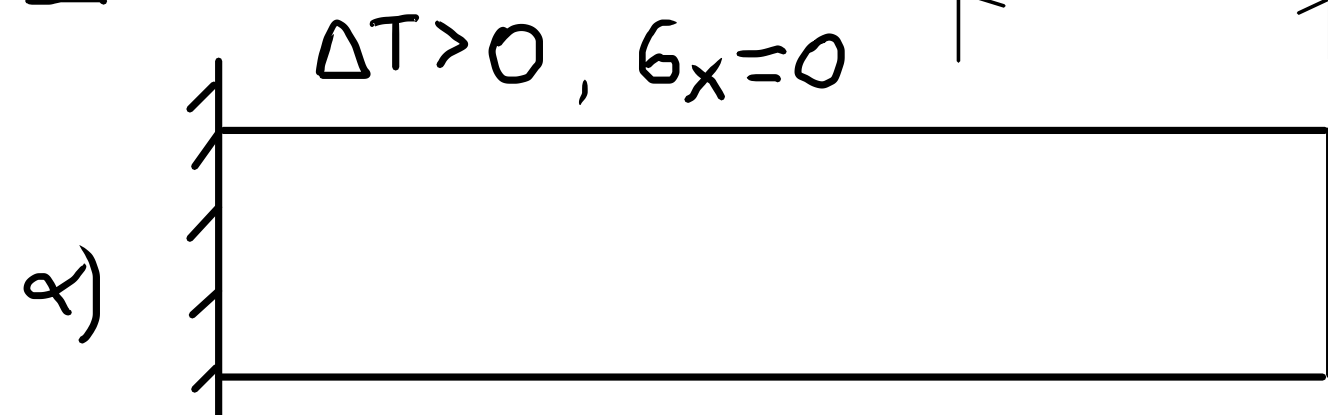
Ανάπτυξη θερμικών τάσεων
λόγω θερμοκρασιακής πέζασης

Αρχή της επαλληλίας γενν εμποδισόμενη διαστολή:

Υπερβαζικό πρόβλημα



=



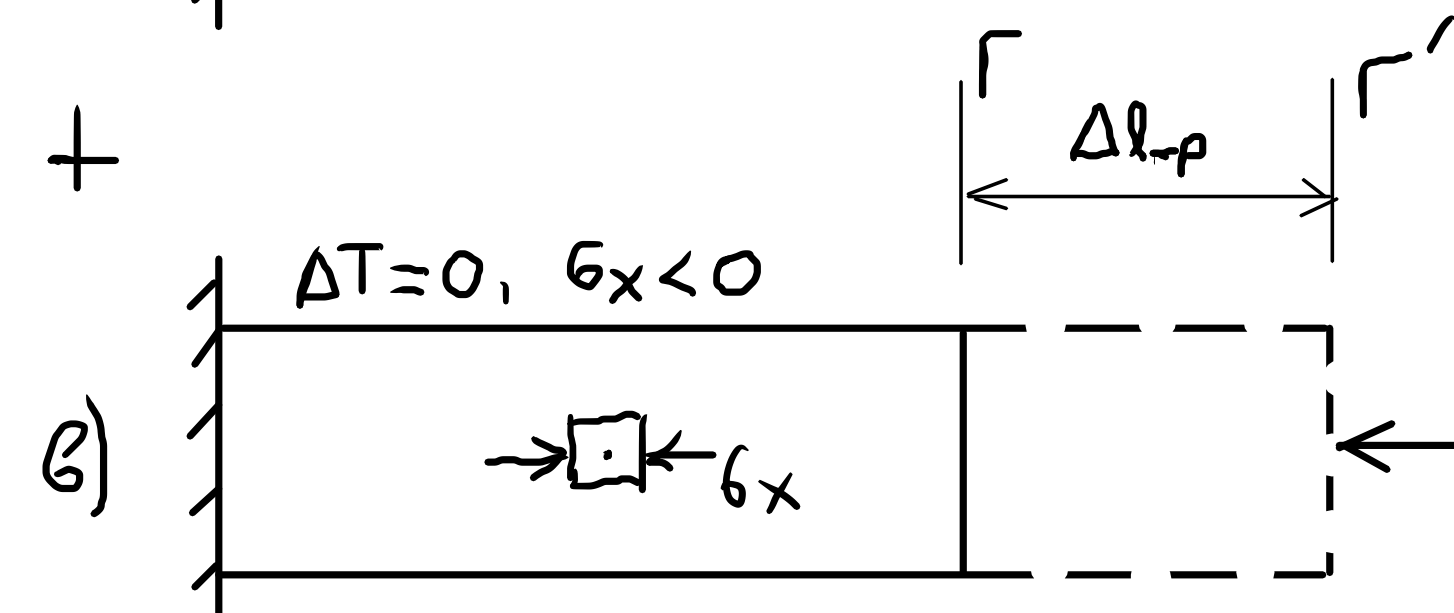
α)

ελεύθερη
διαστολή

$$\Delta l_{\Delta T} = \alpha l \Delta T$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\Delta T} = \frac{\Delta l_{\Delta T}}{l} = \alpha \Delta T$$

+



μυααζαυική
θλίψη

$$\Delta l_P = - \frac{P l}{E A} \quad \text{Hooke.}$$

β)

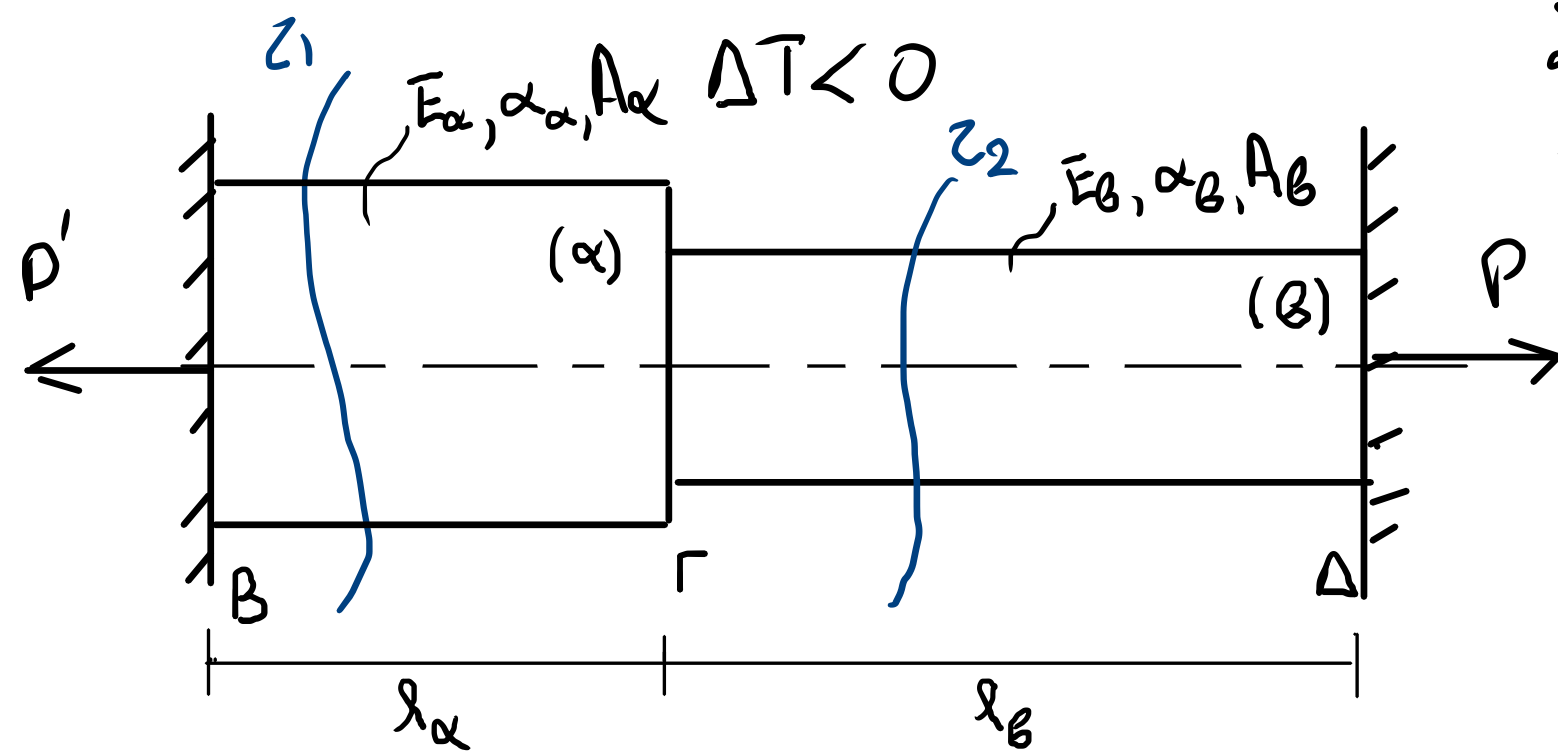
Εξίσωση συμβιβασμού: $\Delta l_{\Delta T} + \Delta l_P = 0$
 (σχύει λόγω της πάκρωσης στο Γ)

$$\alpha l \Delta T - \frac{P l}{E A} = 0 \Rightarrow P = \alpha E A \Delta T \Rightarrow \sigma_x = - \frac{P}{A} = - \alpha E \Delta T$$



$$\epsilon_{\sigma} = \epsilon_P + \epsilon_{\Delta T} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Θερμικές τάσεις σε σύνθετη ράβδο

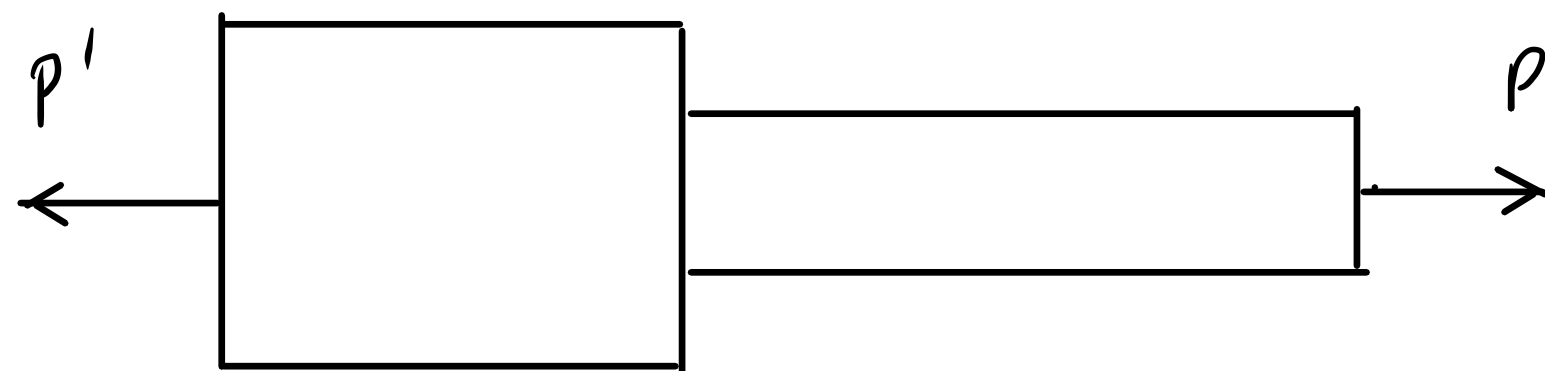


Σύνθετη ράβδος υφίσταται ενιαία θερμοκρασιακή μεταβολή. Από τους αυθόρμητους ζυγούς αναπτύσσεται δύναμη $P = ?$

Εξίσωση συμβιβασμού:

$$\Delta l_{\Delta T}^{\alpha} + \Delta l_P^{\alpha} = 0$$

$$(\Delta l_{\Delta T}^{\alpha} + \Delta l_P^{\alpha}) + (\Delta l_{\Delta T}^{\beta} + \Delta l_P^{\beta}) = 0$$



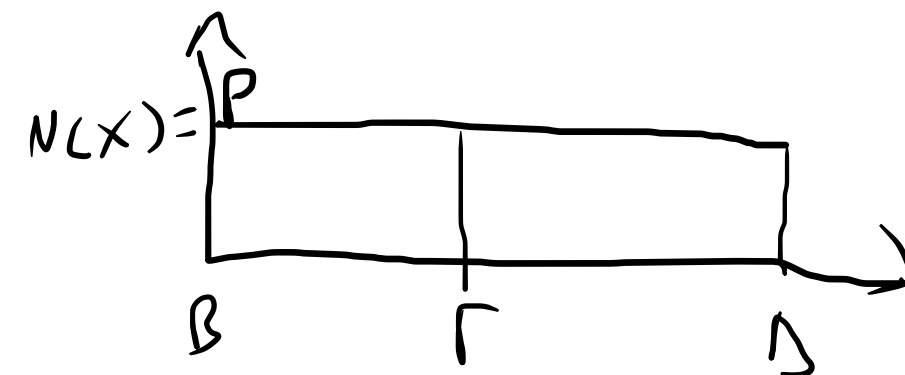
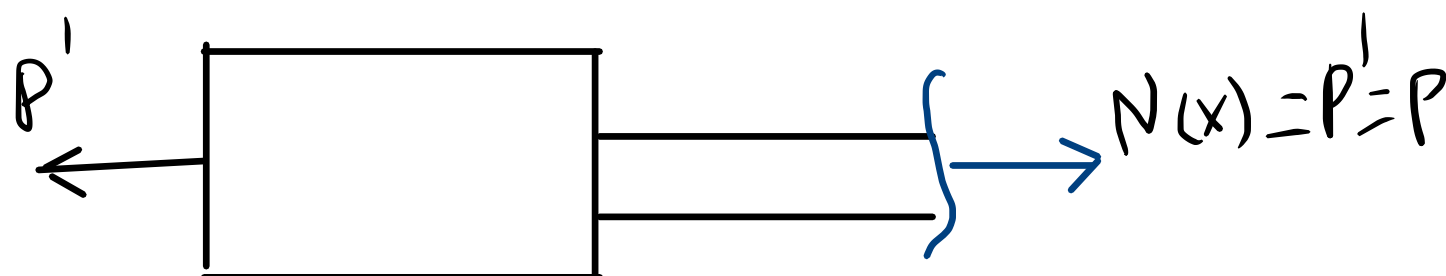
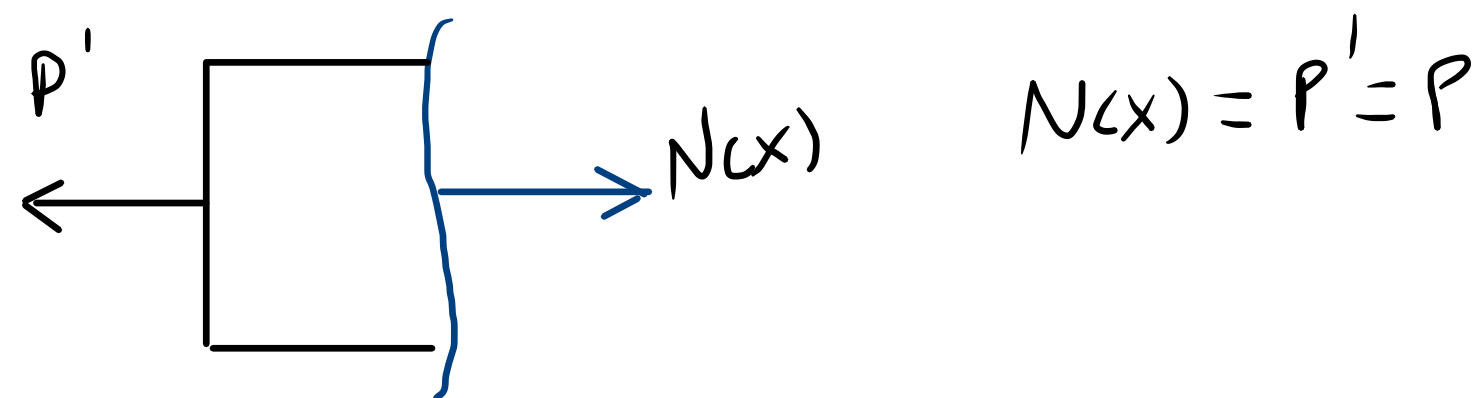
$$P = P'$$

$$\Rightarrow \Delta T (\alpha_{\alpha} l_{\alpha} + \alpha_{\beta} l_{\beta}) + P \left(\frac{l_{\alpha}}{E_{\alpha} A_{\alpha}} + \frac{l_{\beta}}{E_{\beta} A_{\beta}} \right) = 0$$

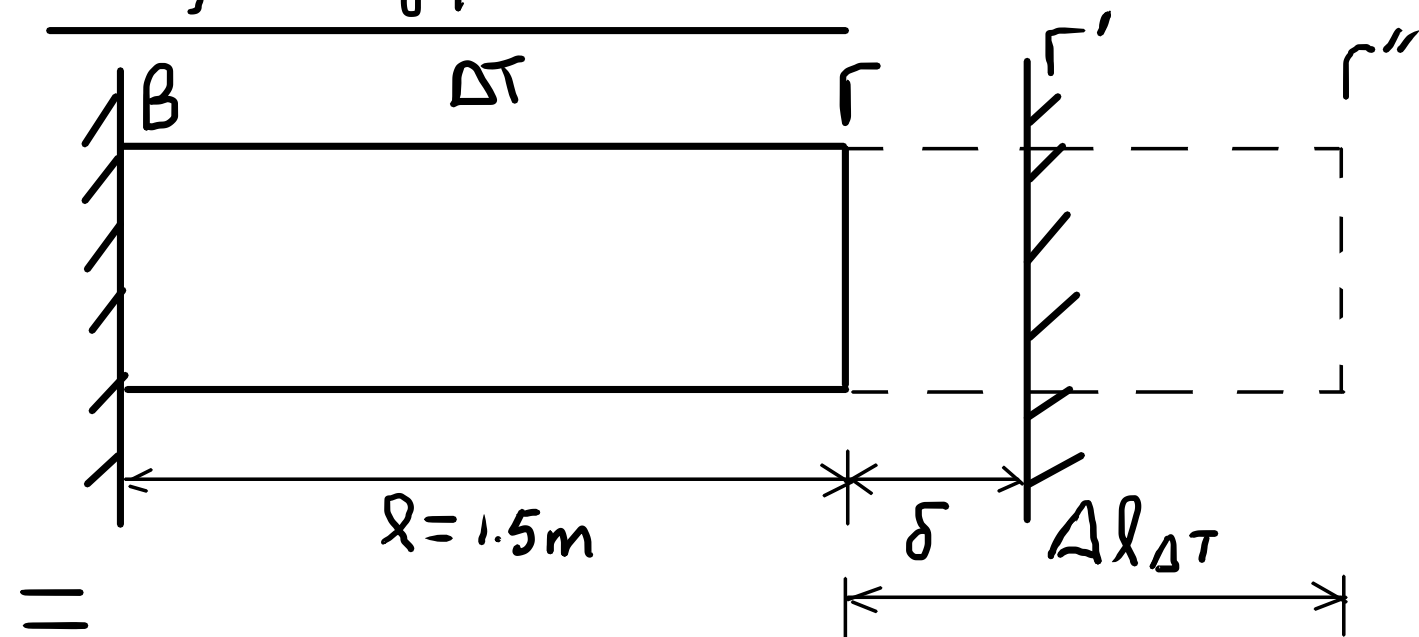
$$\Rightarrow P = \dots$$

$$(B\Gamma): \sigma_{\alpha} = \frac{P}{A_{\alpha}}$$

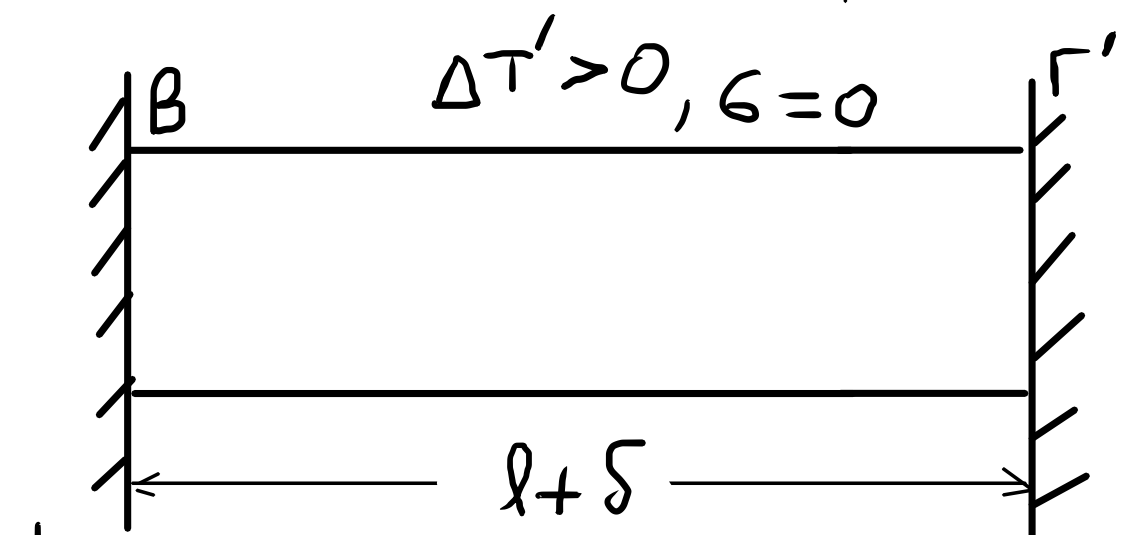
$$(\Gamma\Delta): \sigma_{\beta} = \frac{P}{A_{\beta}}$$



Παράδειγμα

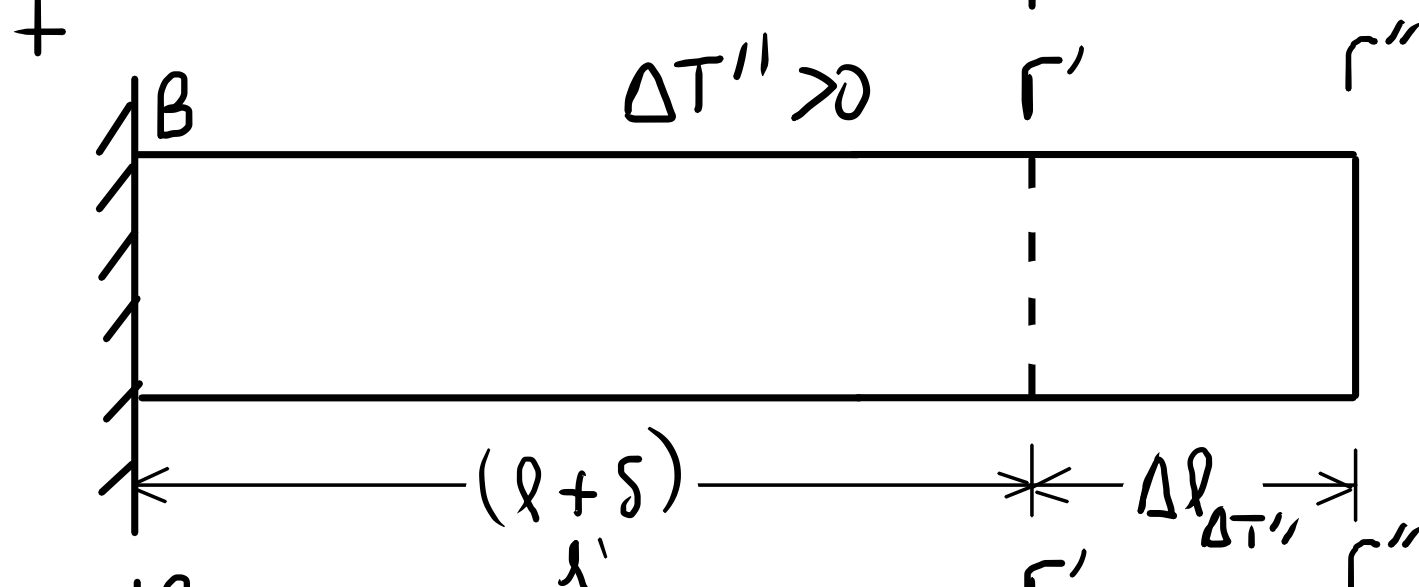


Αν η ράβδος απέχει από τον δεξιό τοίχο μικρή απόσταση $\delta = 1,2\text{mm}$ και η θερμοκρασιακή αύξηση είναι $\Delta T = 70^\circ\text{C}$, Ποια είναι η τάση στη;
 $\alpha = 20 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$



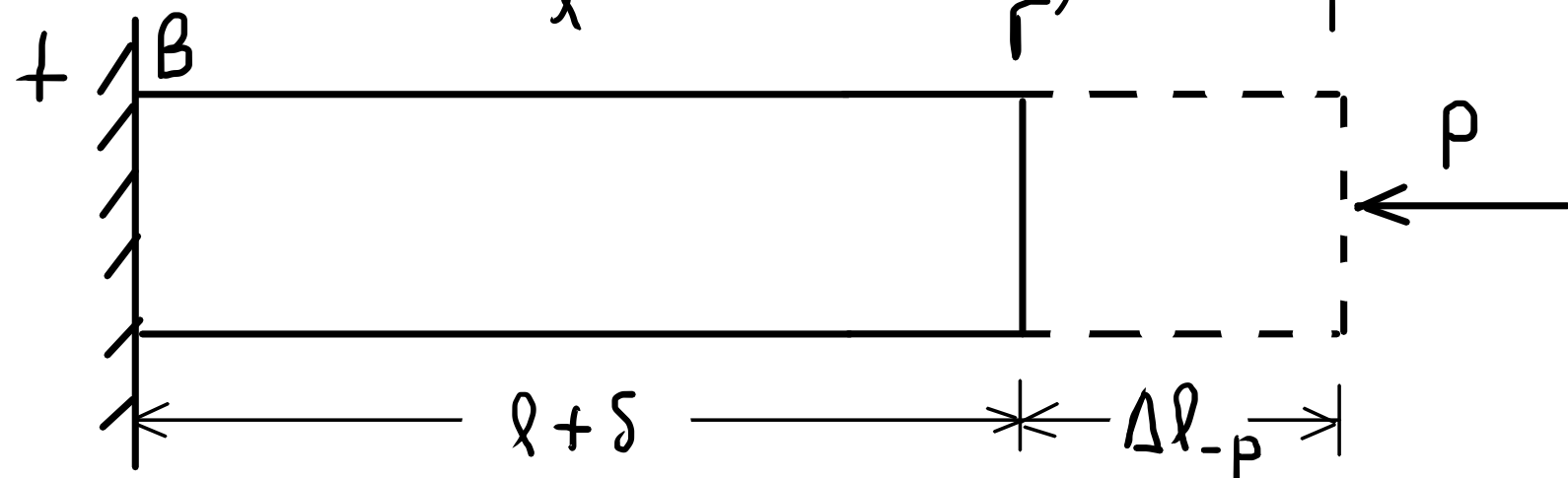
$$\delta = \alpha l \Delta T' \Rightarrow \Delta T' = \frac{\delta}{\alpha l} = \frac{1,2 \times 10^{-3} \text{m}}{20 \times 10^{-6} \cdot 1,5 \frac{\text{m}}{^\circ\text{C}}} = 40^\circ\text{C}$$

$$\Delta T'' = \Delta T - \Delta T' = 70 - 40 = 30^\circ$$



$$\Delta l_{\Delta T''} = \alpha (l + \delta) \Delta T'' = 20 \times 10^{-6} (1,5 + 1,2 \times 10^{-3}) \cdot 30^\circ\text{C}$$

$$= \dots$$



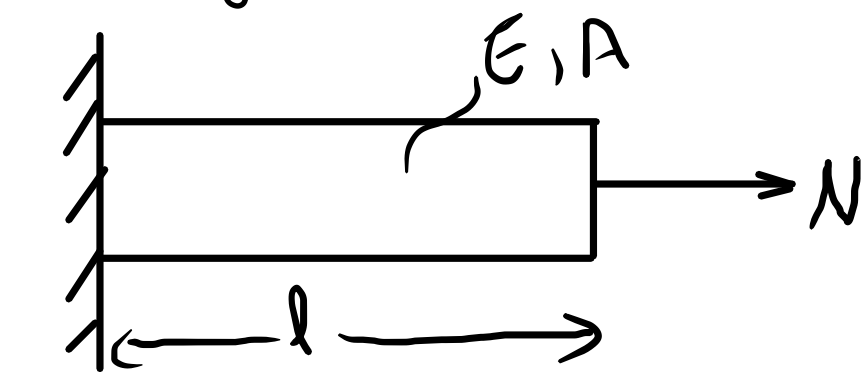
$$\Delta l_P = - \frac{P(l + \delta)}{EA}$$

Εξίσωση συμβιβασμού:

$$\Delta l_{\Delta T''} + \Delta l_P = 0$$

$$\Delta l_{\Delta T} - \delta + \Delta l_P = 0$$

Ενέργεια παραμόρφωσης εφελκυσμένης ράβδου:



$$N = k \Delta l, \quad k = \frac{EA}{l}$$

$$U = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} EA \frac{\Delta l^2}{l}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA}$$

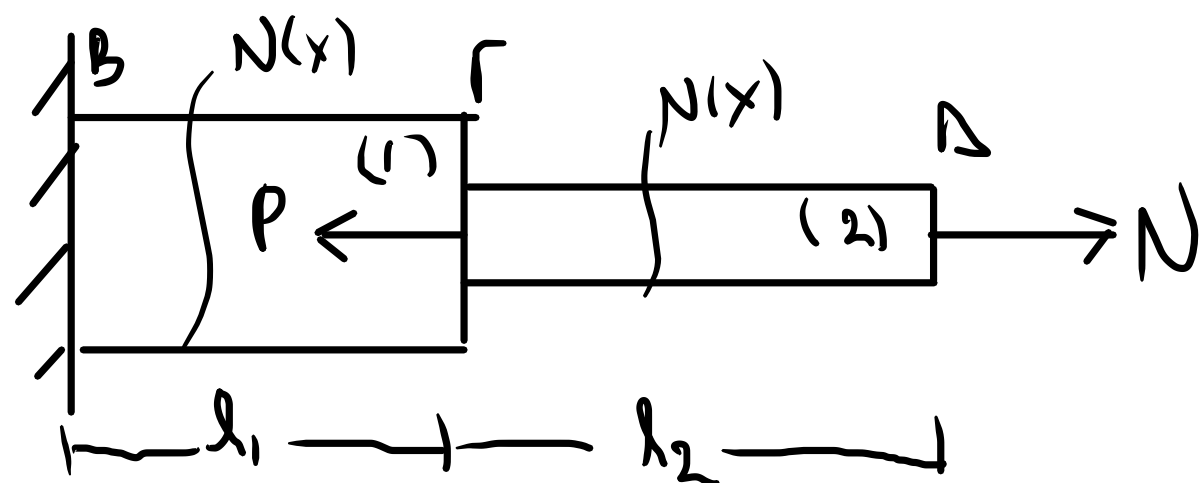
$$U = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{1}{2} \frac{N^2}{k} = \frac{1}{2} N^2 \frac{l}{EA}$$

$$U = \int_0^{\Delta l} dW_N = \int_0^{\Delta l} y dx = \tan \varphi \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{N}{\Delta l} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\Delta l} = \frac{1}{2} N \Delta l$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{N}{\Delta l}$$

$$dW_N = y dx$$

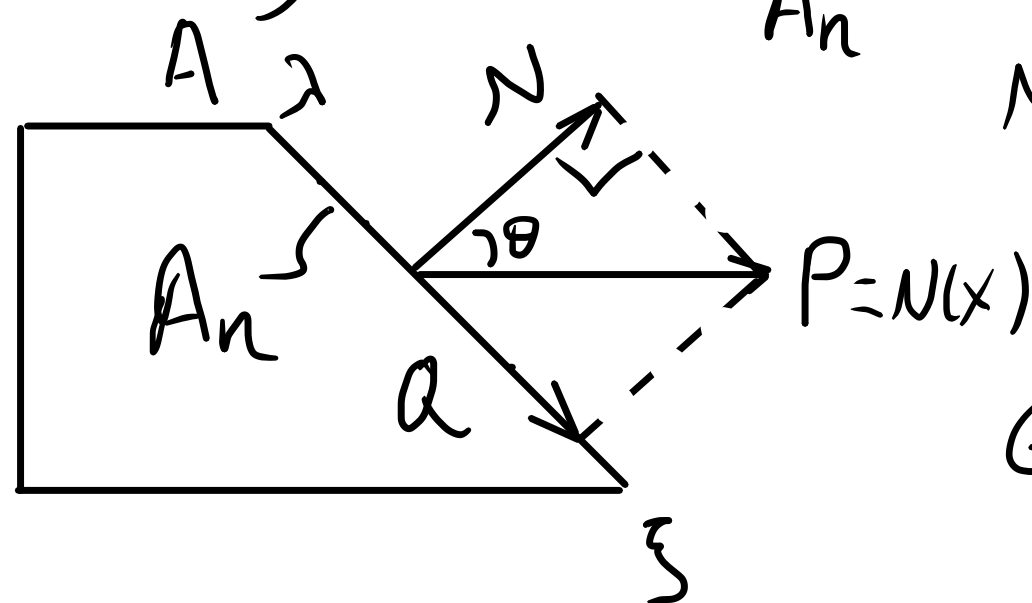
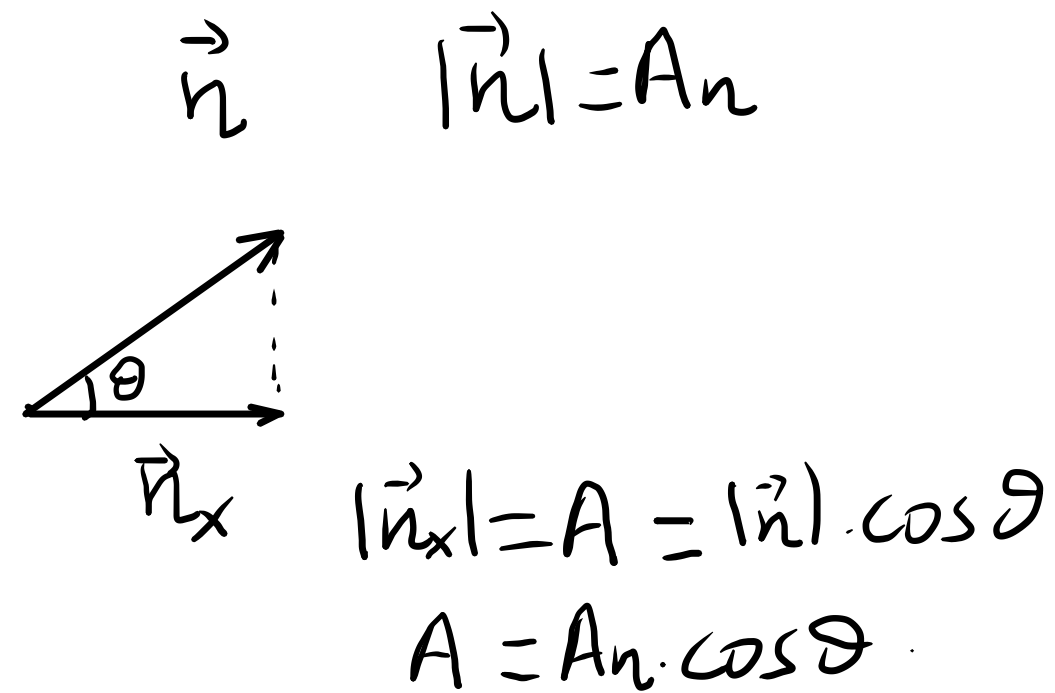
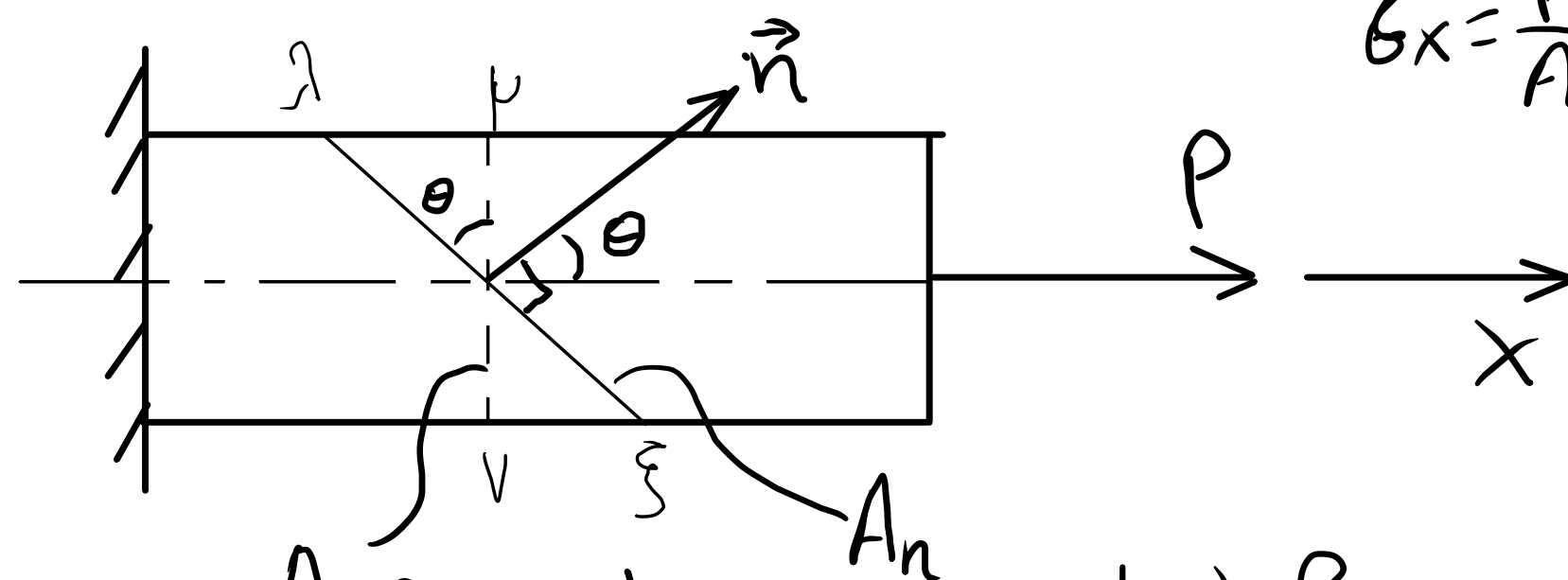
Συνολική ενέργεια παραμόρφωσης σύνθετης ράβδου:



$$N_1 = N - P, \quad N_2 = N$$

$$U = \sum_{i=1}^2 U_i = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \frac{N_i^2 l_i}{E_i A_i}$$

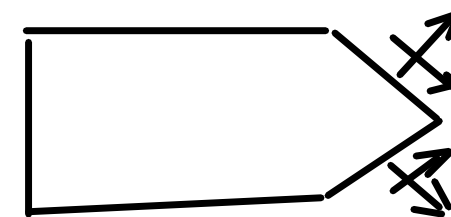
Τάσεις σε πλάγιες κοπές:



$$N(x) = P$$

$$N = P \cos \theta$$

$$Q = P \sin \theta$$



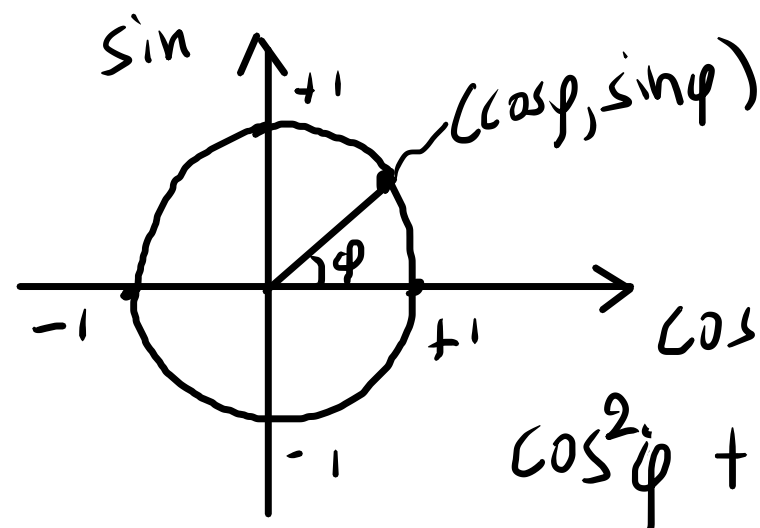
$$G_n = \frac{N}{A_n} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = G_x \cos^2 \theta = \frac{G_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\tau_n = \frac{Q}{A_n} = \frac{P \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = G_x \sin \theta \cos \theta = \frac{G_x}{2} \sin 2\theta$$

Τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

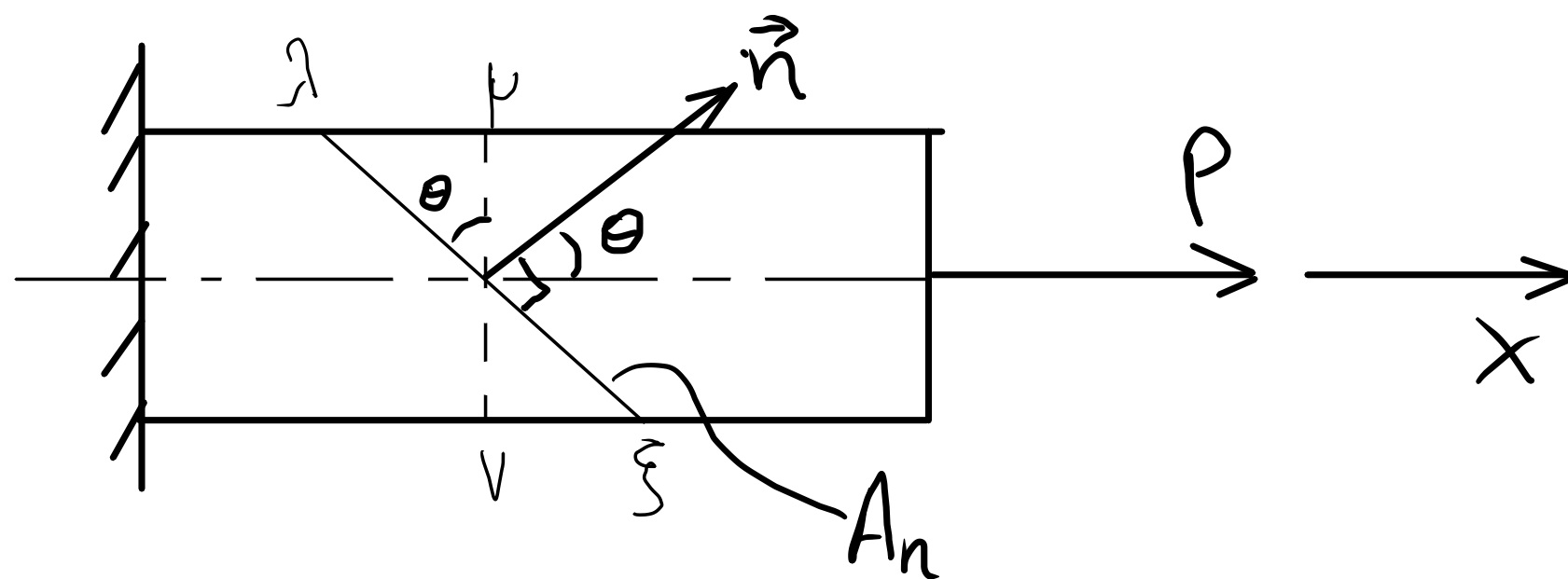


Διεργασίες:

α) $\theta = 0^\circ$, $\sin 2\theta = 0$, $\cos 2\theta = 1$, $G_n = G_x$, $\tau_n = 0$

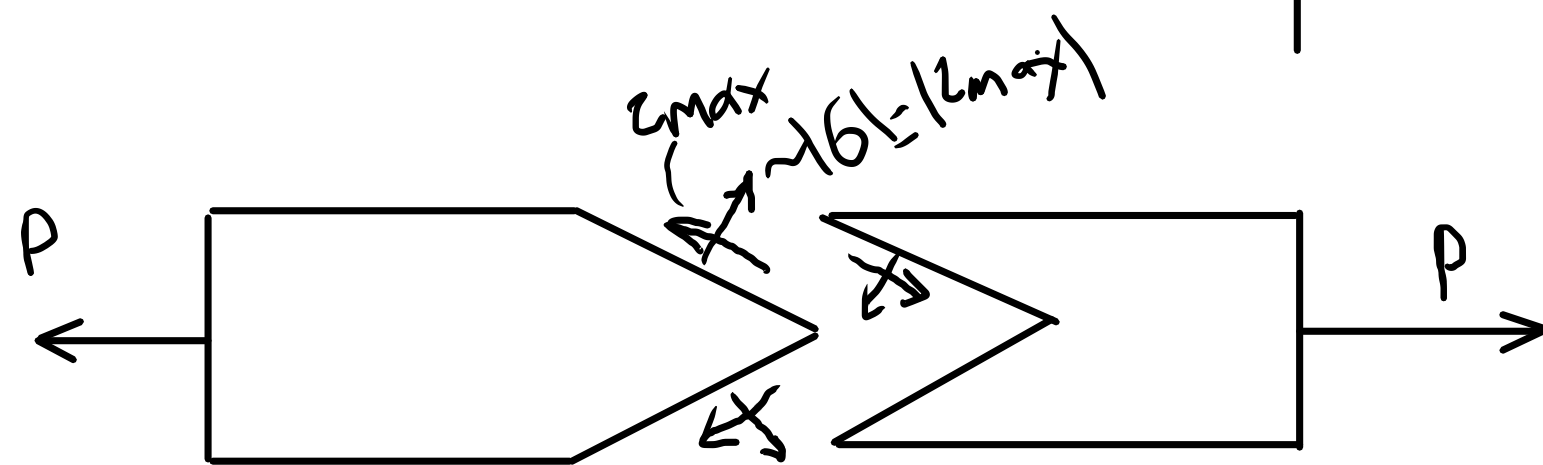
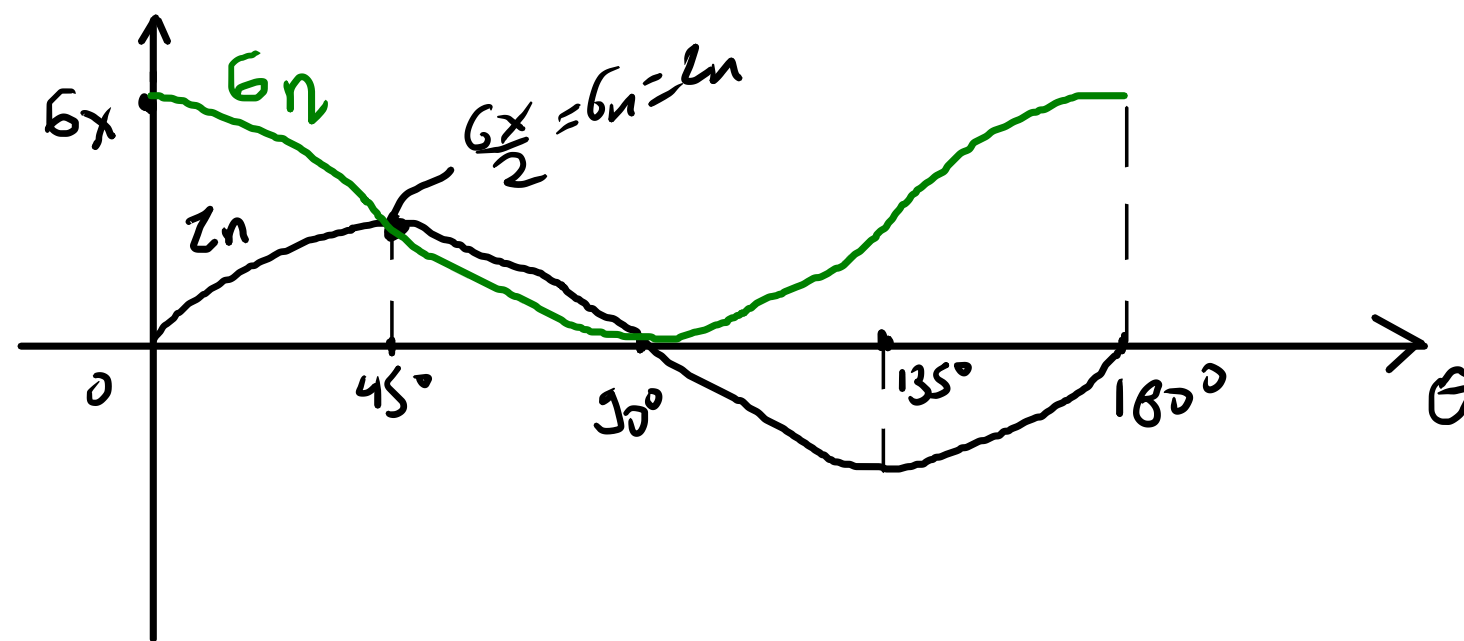
β) $\theta = 45^\circ$, $\sin 2\theta = 1$, $\cos 2\theta = 0$, $G_n = \frac{G_x}{2}$, $\tau_n = \frac{G_x}{2}$

γ) $\theta = 90^\circ$, $\sin 2\theta = 0$, $\cos 2\theta = -1$, $G_n = 0$, $\tau_n = 0$

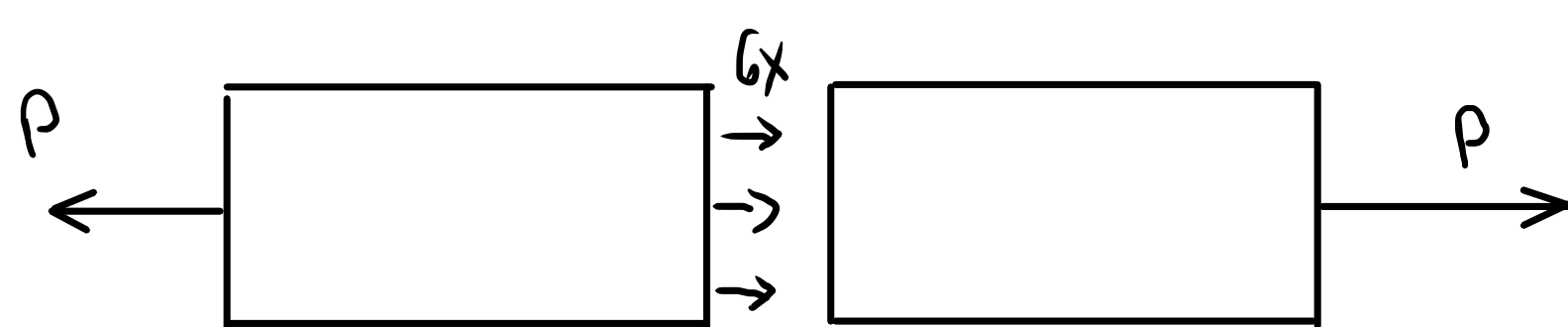


$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

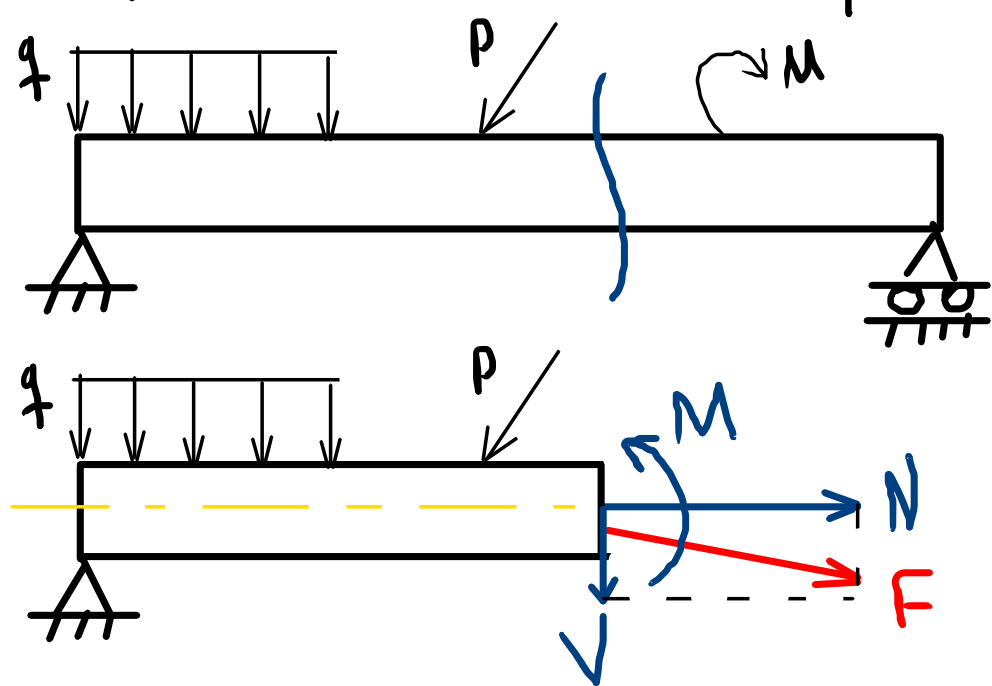
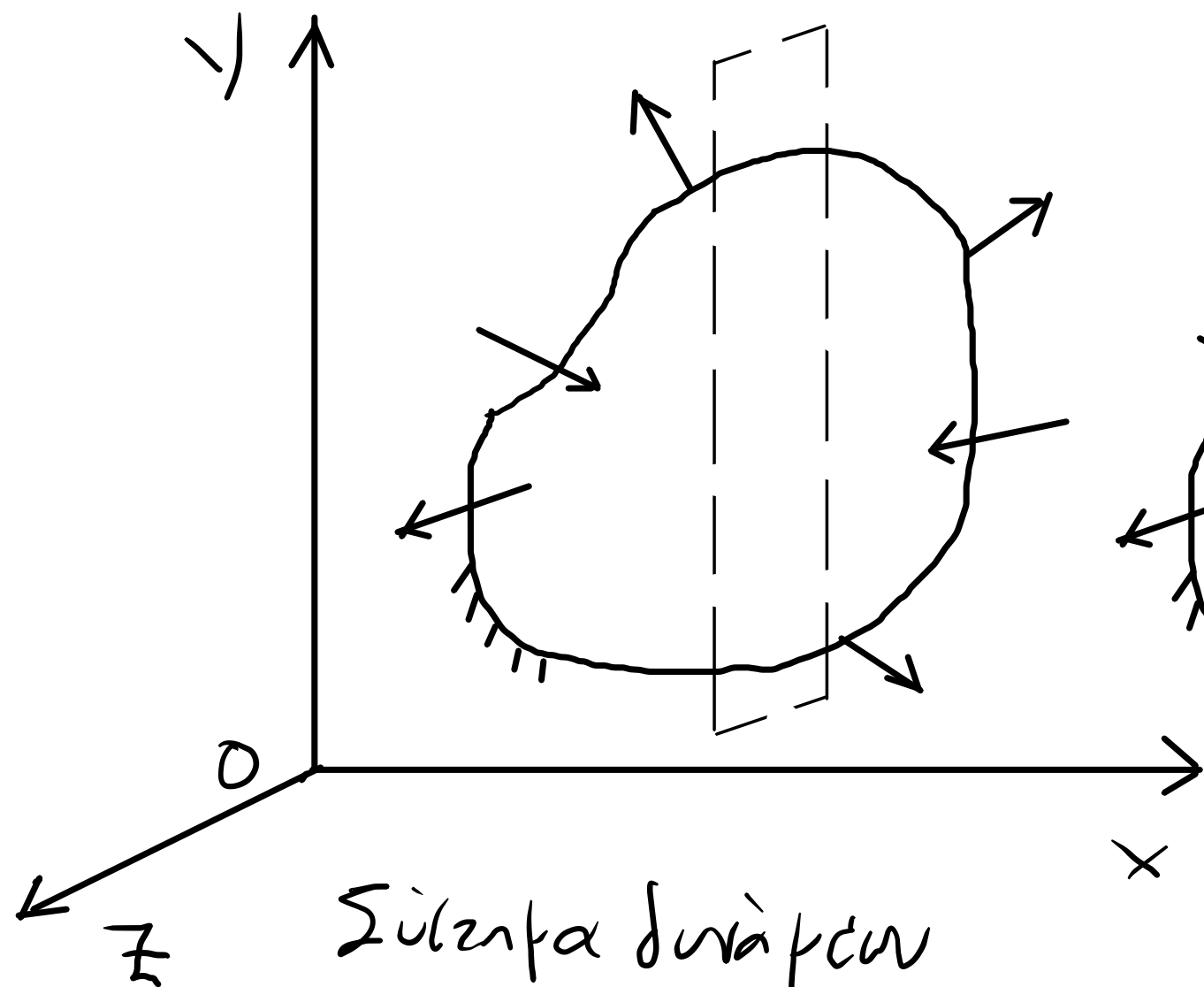


ο ληκυρο



γασθυρο

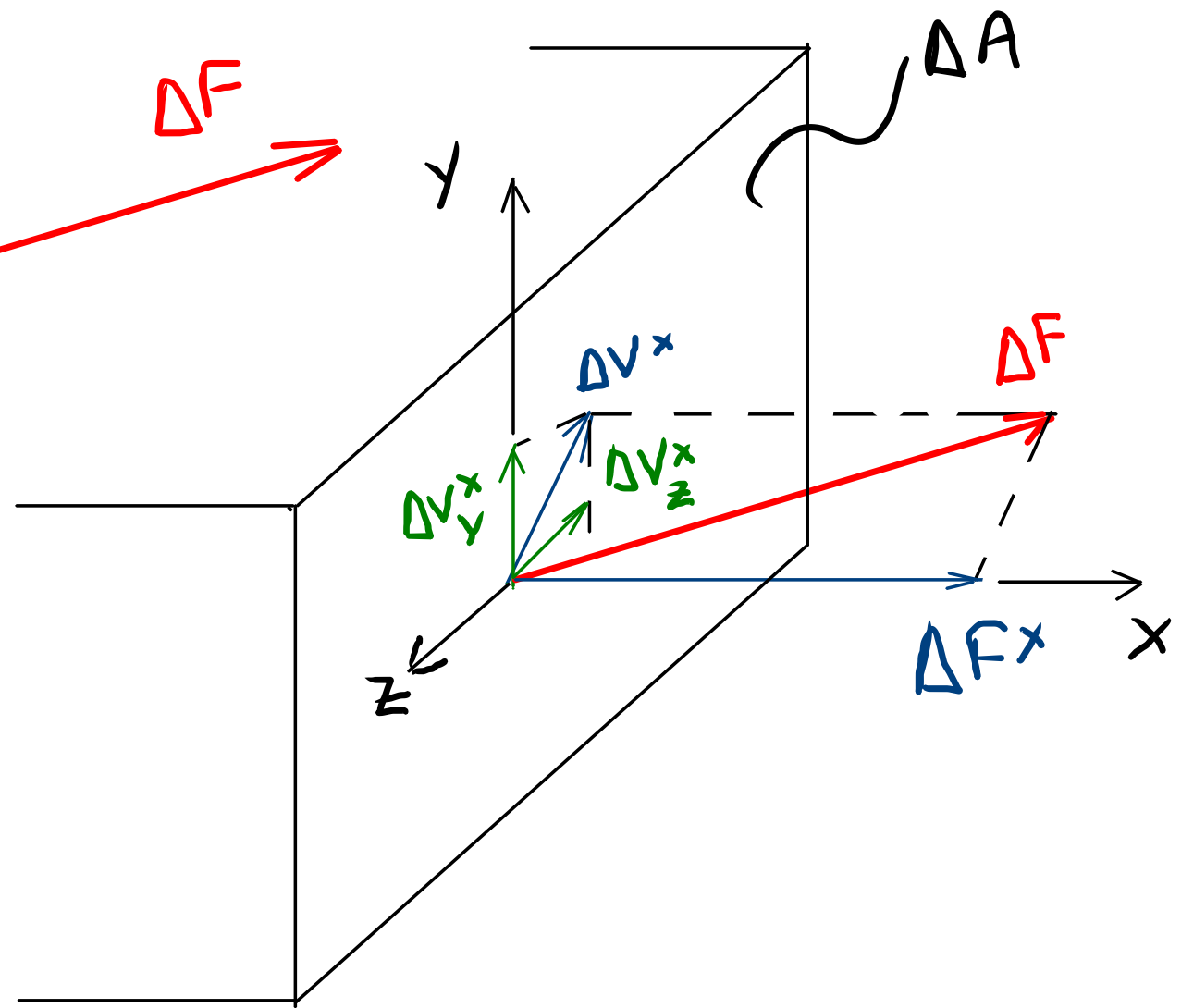
Ταβείς υπό γενικές συνθήκες φόρτισης



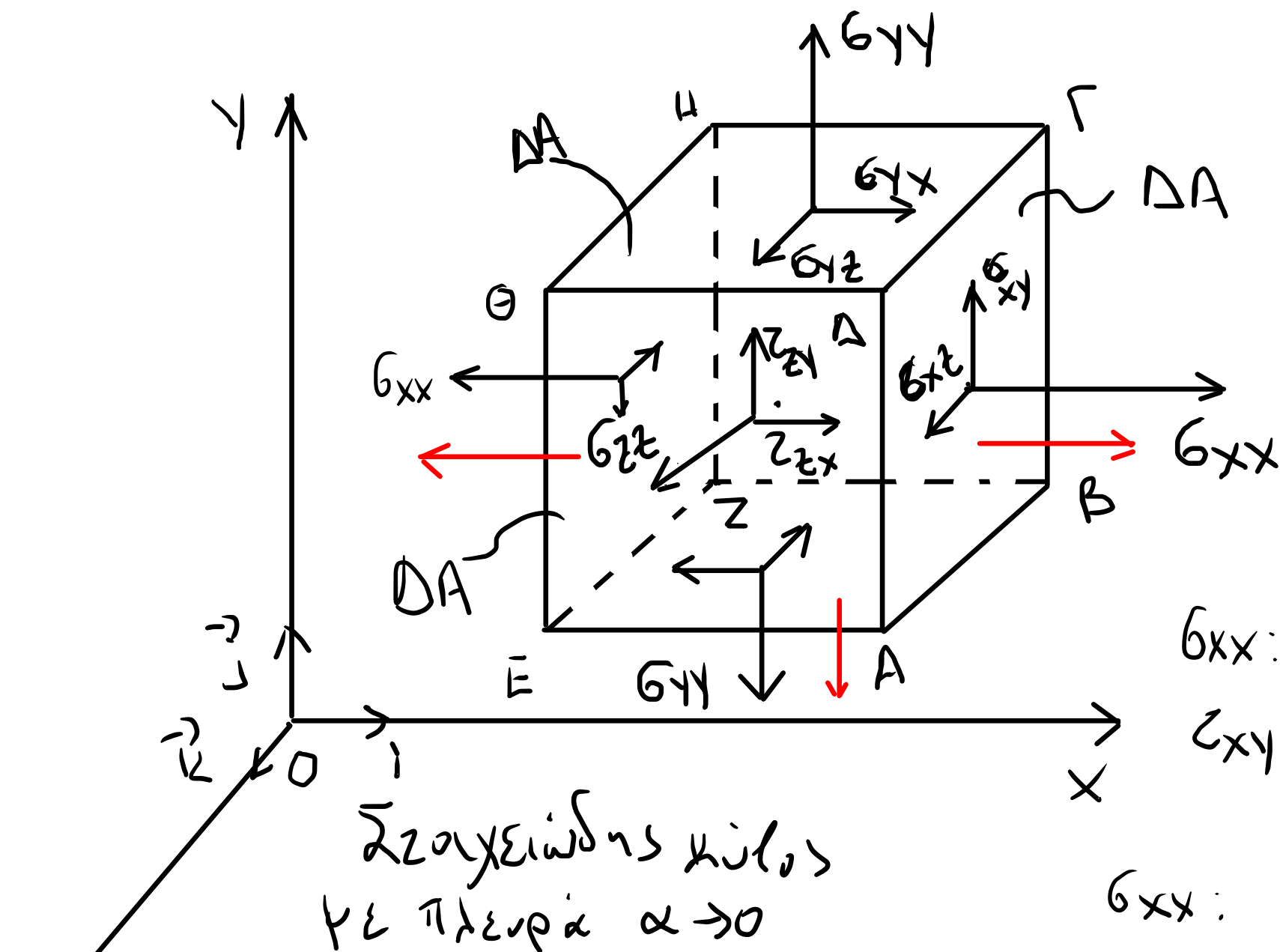
$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\sigma_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A}$$

$$\sigma_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$



2ος δείκτης: δηλώνει το επίπεδο πάνω στο οποίο ασκούνται οι τάσεις
 3ος δείκτης: δηλώνει τη διεύθυνση της συνιστώσας της τάσης.



ΘΕΤΙΚΕΣ ΖΑΒΕΙΣ:

ΘΕΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΔΕΥΔΗΝ
ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΤΙΚΑ ΤΩΝ ΑΞΩΝΩΝ

ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΔΕΥΔΗΝ
ΚΑΙ ΤΑ ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΤΩΝ ΑΞΩΝΩΝ

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx}: + * + = + \\ \tau_{xy}: + * + = + \end{array} \right\} \text{ΑΒΓΔ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx}: - * - = + \end{array} \right\} \text{ΕΖΗΘ}$$

2 ΤΑΥΟΒΕΙΣ ΤΩΝ ΖΑΒΕΩΝ 2^{ns} ΕΙΔΗΣ ΕΞ ΠΡΩΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 3 \end{array} \quad [G_{ij}] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$\text{για } n=2, \quad 3^2 = 9 \text{ συνιστώσες}$$

$$G_{ij} = G_{ji} \text{ για } i \neq j$$

συμμετρικές ταυοβεις

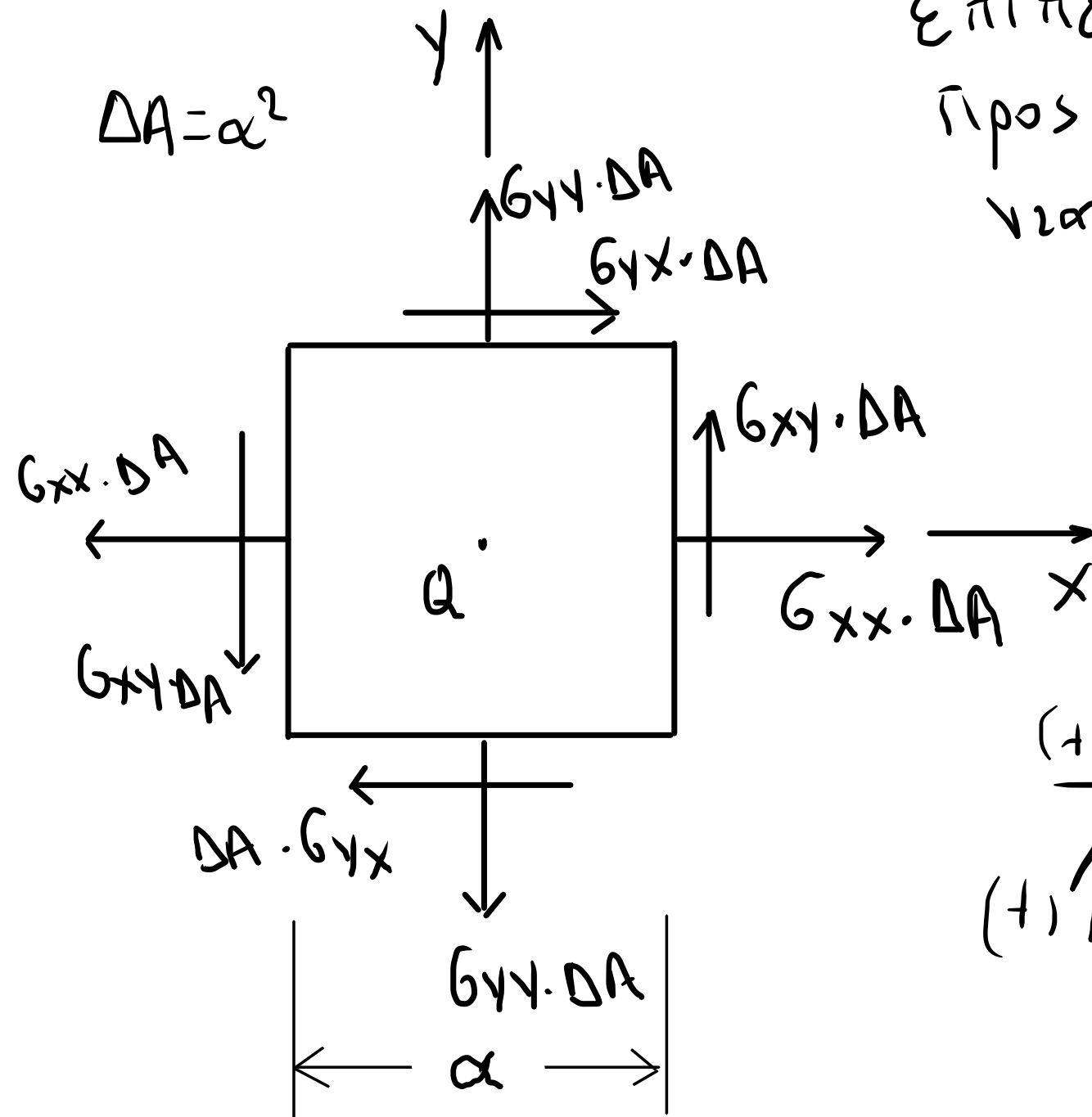
Ενας ταυοβεις ηείγης
620 3d χώρο έχει

$$3^n \text{ συνιστώσες}$$

για $n=0$, $3^0 = 1$ συνιστώσα (βαθμωτά πεχέθν)
για $n=1$, $3^1 = 3$ (δυναμικά πεχέθν)
π.χ. θερμότητα
π.χ. δύναμη

Πρόταση Cauchy:

Οι διατμητικές τάσεις που ασκούνται σε δύο κάθετα επίπεδα είναι ίσες ^{και κατεύρση} και η κατεύθυνση και οι δύο προς την κοινή ακμή των επιπέδων ή απομακρύνονται από αυτήν.



Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\overset{(+)}{\rightarrow} \sum F_x = 0, \quad \overset{(+)}{\uparrow} \sum F_y = 0, \quad \curvearrowright \sum M_Q = 0$$

$$\overset{(+)}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow \cancel{G_{xx} \Delta A} - \cancel{G_{xx} \Delta A} + \cancel{G_{yx} \Delta A} - \cancel{G_{yx} \Delta A} = 0$$

$$\overset{(+)}{\uparrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow \cancel{G_{yy} \Delta A} - \cancel{G_{yy} \Delta A} + \cancel{G_{xy} \Delta A} - \cancel{G_{xy} \Delta A} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_Q = 0 \Rightarrow (G_{xy} \Delta A) \cdot \frac{\alpha}{2} + (G_{xy} \Delta A) \cdot \frac{\alpha}{2} - (G_{yx} \Delta A) \cdot \frac{\alpha}{2} - (G_{yx} \Delta A) \cdot \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2G_{xy} - 2G_{yx} = 0 \Rightarrow G_{xy} = G_{yx}$$

$$\underline{G_{ij} = G_{ji} \quad \text{για } i \neq j}$$

Καταστατικές σχέσεις:

$x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$

$1 \rightarrow x_1(x), 2 \rightarrow x_2(y), 3 \rightarrow x_3(z)$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3$

k, l : άεργοι δείκτες, δεν εμφανίζονται στο αριστερό μέλος και υπονοείται άθροισμα γνωστών.

i, j : ενεργοί δείκτες

Γενικευμένος νόμος Hooke

C_{ijkl} : 4ος τάξης τανυστής

$3^4 = 81$ συνιστώσες

π.χ. $\sigma_{11} = ?$, $i=1, j=1$: $\sigma_{11} = C_{11kl} \epsilon_{kl} = C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1122} \epsilon_{22} + C_{1133} \epsilon_{33} =$

π.χ. $\sigma_{12} = ?$, $i=1, j=2$

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{1111} \underline{\epsilon_{11}} + C_{1121} \underline{\epsilon_{21}} + C_{1131} \underline{\epsilon_{31}} + C_{1112} \underline{\epsilon_{12}} + C_{1122} \underline{\epsilon_{22}} + C_{1132} \underline{\epsilon_{32}} + C_{1113} \underline{\epsilon_{13}} + C_{1123} \underline{\epsilon_{23}} + C_{1133} \underline{\epsilon_{33}}$$

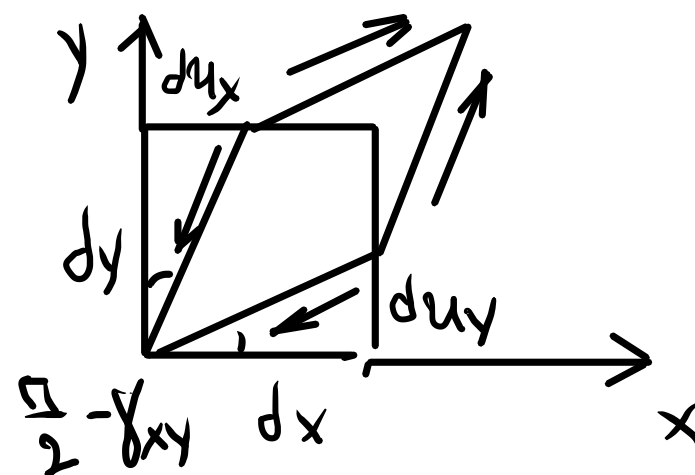
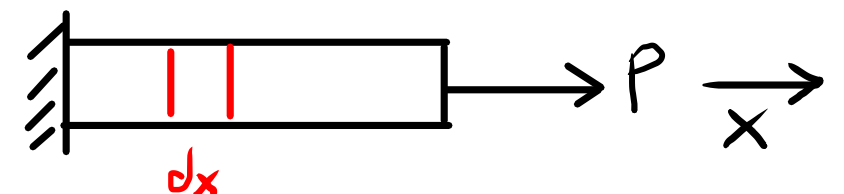
μονοαξονικοί εφελκυσμοί: $\sigma_{11} = E \epsilon_{11} \rightarrow$ Hooke

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

για $i=j=1$: $\epsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$

για $i=1, j=2$: $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{12}$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{du_x}{dx}$$



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Λόγω συμμετρίας των τάσεων και παραμορφώσεων $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$
 για $i \neq j$

- $(1,1) \rightarrow 1$
- $(2,2) \rightarrow 2$
- $(3,3) \rightarrow 3$
- $(3,2) \text{ ή } (2,3) \rightarrow 4$
- $(1,3) \text{ ή } (3,1) \rightarrow 5$
- $(2,1) \text{ ή } (1,2) \rightarrow 6$

$$\sigma_1 = C_{11} \epsilon_1 + C_{16} \epsilon_6 + C_{15} \epsilon_5 + C_{16} \epsilon_6 + C_{12} \epsilon_2 + C_{14} \epsilon_4 + C_{15} \epsilon_5 + C_{14} \epsilon_4 + C_{13} \epsilon_3$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

από 36 ανεξ. συνιστώσες
 καταλήγουμε σε
 36 ανεξ. συνιστώσες

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \text{ τάση λόγω γινώμενου}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Sym

$$\Rightarrow \sigma = C \cdot \epsilon$$

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \text{ για } i, j = 1, \dots, 6$$

Γενικευμένος νόμος του Hooke.

$$\sigma_i = E \cdot \epsilon_i \quad E \rightarrow C_{11}$$

από 36 καταλήγουμε λόγω συμμετρίας του C
 σε 21 ανεξ. ελαστικές σταθερές

Ισοζύγιο υλικό

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{11}-C_{12} & 0 & 0 \\ & & & & C_{11}-C_{12} & 0 \\ & & & & & C_{11}-C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

Sym

$$\epsilon = \frac{1}{2} \gamma$$

$$\tau = G \gamma = 2G \epsilon = 2\mu \epsilon$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$E, \nu \rightarrow \lambda, \mu$$

$$\bar{E}, G \rightarrow \lambda, \mu$$

C_{11}, C_{12} 2 ανεξ. ελ. C12
 όπου $C_{12} = \lambda$, $C_{11} - C_{12} = 2\mu$

(λ, μ) παράμετροι Lamé.
 $\mu = G$

$$\sigma_x = E (\epsilon_{xx} - \nu \epsilon_{yy} - \nu \epsilon_{zz})$$

$$\sigma_1 = C_{11} \epsilon_1 + C_{12} \epsilon_2 + C_{12} \epsilon_3$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

Sym

$$G_{11} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda\Theta$$

$$G_{22} = 2\mu\epsilon_{22} + \lambda\Theta$$

$$G_{33} = 2\mu\epsilon_{33} + \lambda\Theta$$

$$G_{23} = 2\mu\epsilon_{23}$$

$$G_{31} = 2\mu\epsilon_{31}$$

$$G_{12} = 2\mu\epsilon_{12}$$

καταστατικές σχέσεις για ισορροπία υλικού

$$\Theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

$$P = \frac{1}{3}(G_{11} + G_{22} + G_{33})$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{για } i=j \\ 0, & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

δείκτη Kronecker

$$G_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}G_{ij} - \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}P\delta_{ij}$$

γραφή
σε
δείκτες

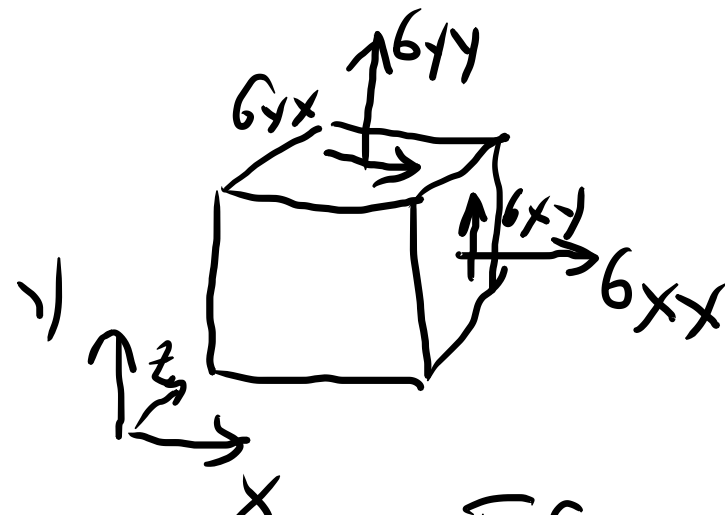
$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

Επίπεδη εντατική κατάσταση

α) Επίπεδη ένταση στο επίπεδο xy

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

ταυτοχρόνως τάσεων: $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

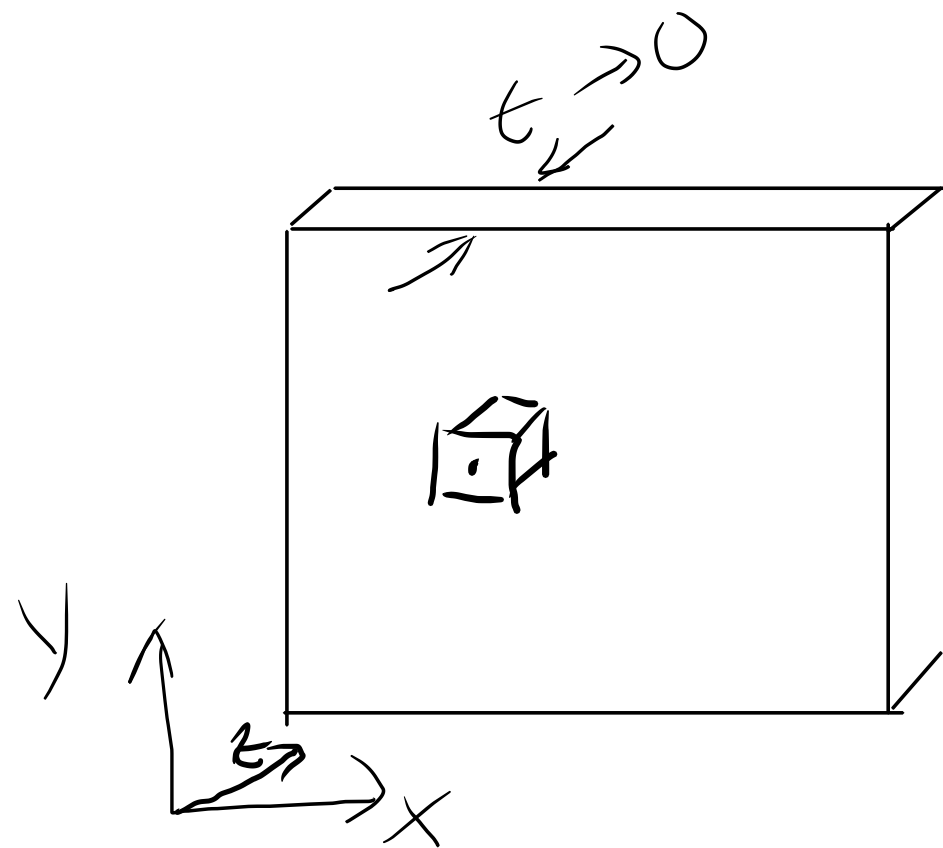
Ισοζύγιο υλικού

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{3\lambda}{2\lambda + 2\mu} P \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{33} = \frac{1}{2\mu} \cancel{\sigma_{33}}^0 - \frac{3\lambda}{2\lambda + 2\mu} P \cancel{\delta_{33}}^1 \neq 0$$

$$P = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \cancel{\sigma_{33}}^0)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{13} = \frac{1}{2\mu} \cancel{\sigma_{13}}^0 - \frac{3\lambda}{2\lambda + 2\mu} P \cancel{\delta_{13}}^0 = 0$$



β) Επίπεδα παραμορφωμένα στο επίπεδο xy :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

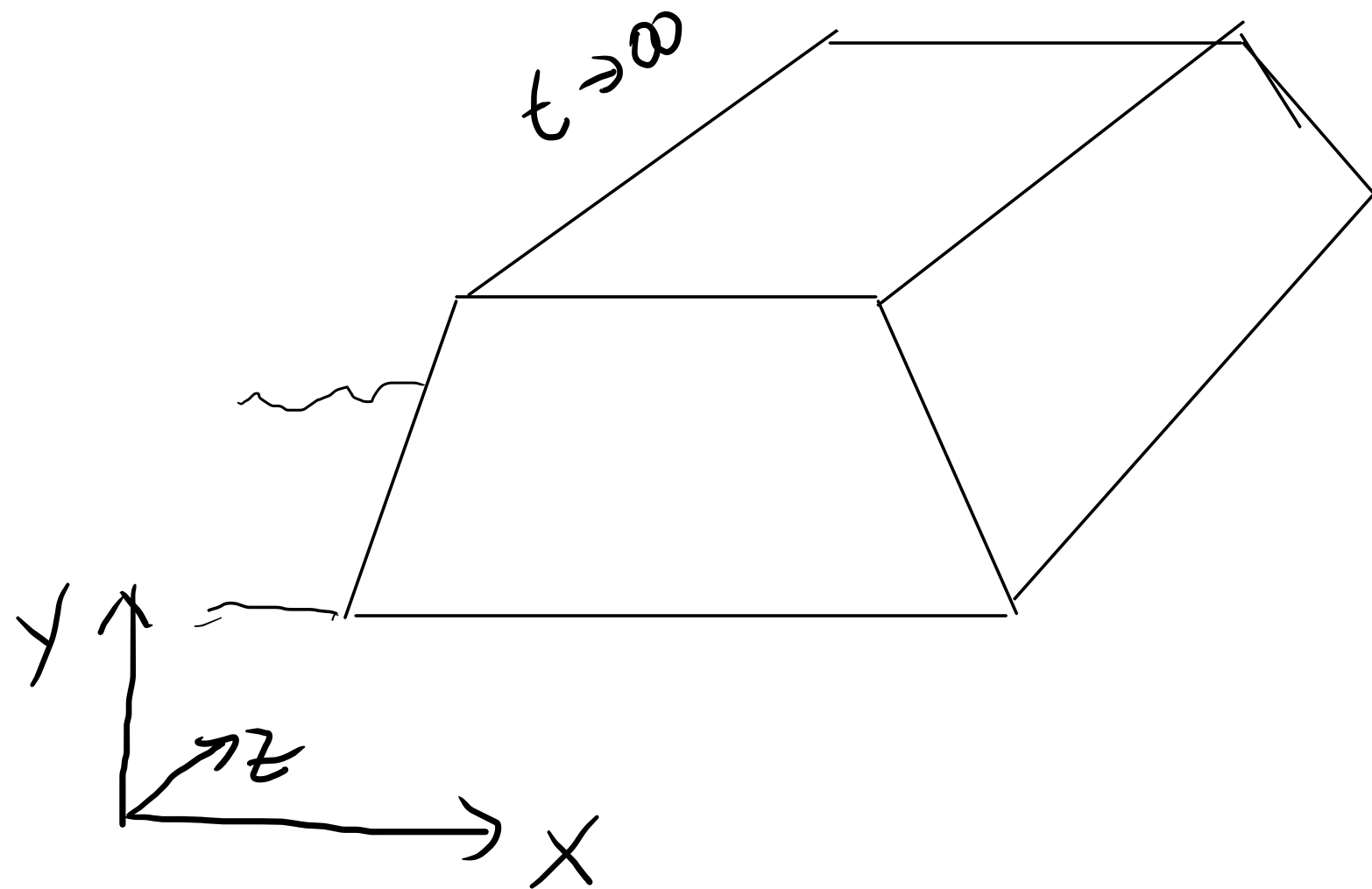
Ισοτροπία υλικά

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \Theta \delta_{ij}$$

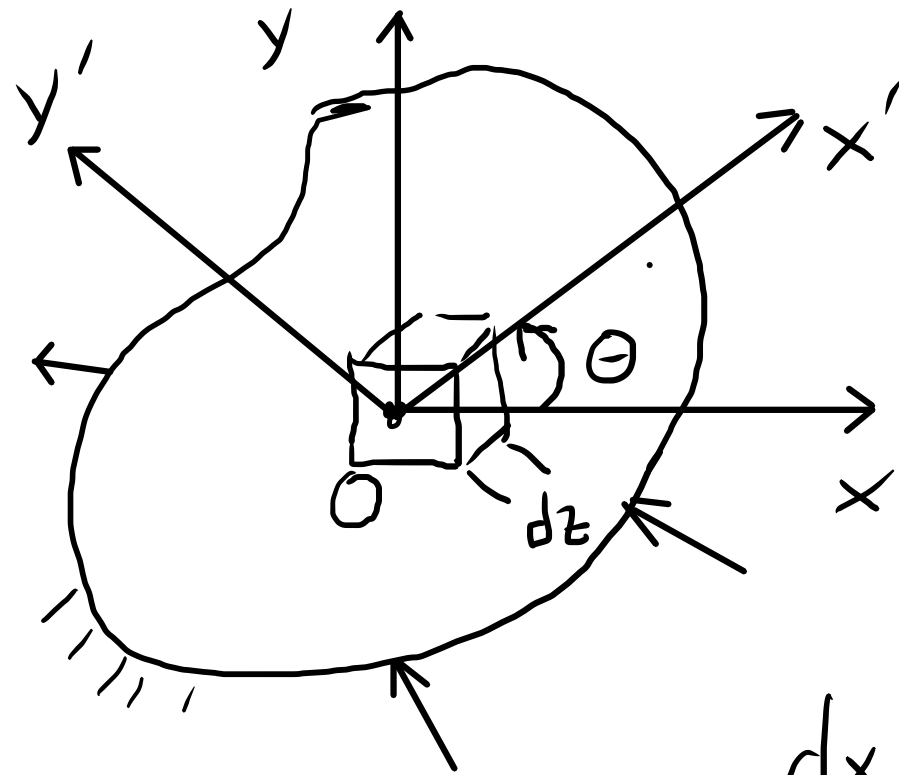
$$\sigma_{zz} = \sigma_{33} = 2\mu \cancel{\varepsilon_{33}}^{\rightarrow 0} + \lambda \Theta \cancel{\delta_{33}}^{\rightarrow 1} \neq 0$$

$$\Theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \cancel{\varepsilon_{33}}^{\rightarrow 0}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{13} = 2\mu \cancel{\varepsilon_{13}}^{\rightarrow 0} + \lambda \Theta \cancel{\delta_{13}}^{\rightarrow 0} = 0$$



Στοιχεία του γεννημένου αξόνων

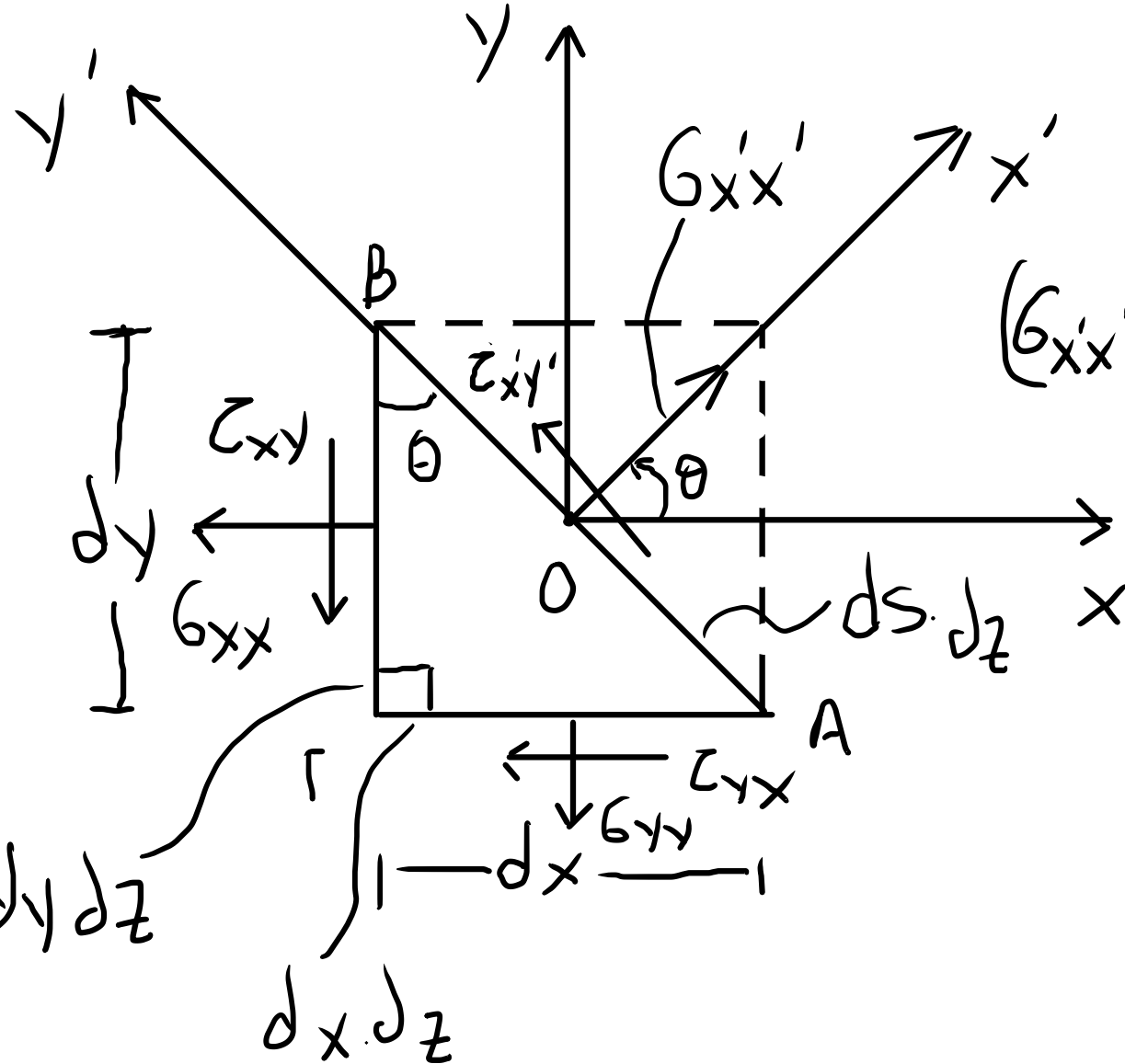


$$Oxy: [G_{ij}] = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{bmatrix}$$

$$Ox'y': [G'_{ij}] = \begin{bmatrix} G'_{xx'} & G'_{xy'} & G'_{xz'} \\ G'_{yx'} & G'_{yy'} & G'_{yz'} \\ G'_{zx'} & G'_{zy'} & G'_{zz'} \end{bmatrix}$$

ΟΧΕΙΣ
ΥΕΛΑΧΗΡΑΙΟΤΗ
ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ
ΤΟΥ ΣΑΝΟΥ

$$dx = ds \cdot \sin \theta, dy = ds \cdot \cos \theta$$



$$(+)\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$(G'_{xx'} \cdot ds \cdot dz) \cdot \cos \theta - (z'_{xy'} \cdot ds \cdot dz) \cdot \sin \theta = G_{xx} \cdot dy \cdot dz + z_{yx} \cdot dx \cdot dz \quad (1)$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$(G'_{yy'} \cdot ds \cdot dz) \cdot \sin \theta + (z'_{xy'} \cdot ds \cdot dz) \cdot \cos \theta = G_{yy} \cdot dx \cdot dz + z_{xy} \cdot dy \cdot dz \quad (2)$$

$$G_{x'x'} \cos \vartheta - Z_{x'y'} \sin \vartheta = G_{xx} \cos \vartheta + Z_{yx} \sin \vartheta \quad (1)$$

$$G_{x'x'} \sin \vartheta + Z_{x'y'} \cos \vartheta = G_{yy} \sin \vartheta + Z_{xy} \cos \vartheta \quad (2)$$

Τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = 2\cos^2 \vartheta - 1$$

$$\sin 2\vartheta = 2\sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$$

$$(1) * \cos \vartheta + (2) * \sin \vartheta: G_{x'x'} = G_{xx} \cos^2 \vartheta + G_{yy} \sin^2 \vartheta + 2Z_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$-(1) * \sin \vartheta + (2) * \cos \vartheta: Z_{x'y'} = -(G_{xx} - G_{yy}) \sin \vartheta \cos \vartheta + Z_{xy} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$$

$$\Rightarrow G_{x'x'} = \frac{G_x + G_y}{2} + \frac{G_x - G_y}{2} \cos 2\vartheta + Z_{xy} \sin 2\vartheta$$

$$Z_{x'y'} = -\frac{G_x - G_y}{2} \sin 2\vartheta + Z_{xy} \cos 2\vartheta$$

$$\gamma \propto \vartheta' = \vartheta + 90^\circ \leadsto G_y'$$

$$\cos(2\vartheta') = \cos(2\vartheta + 180^\circ) = -\cos 2\vartheta$$

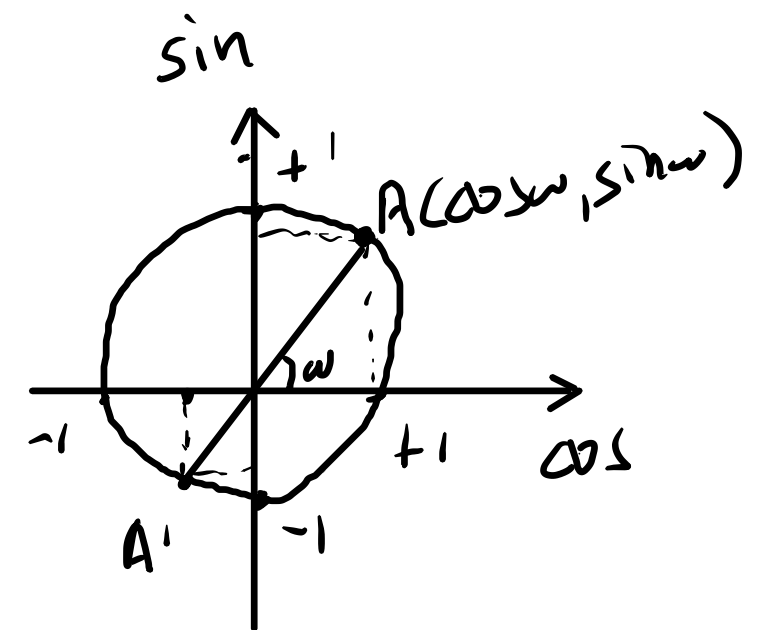
$$\sin(2\vartheta') = \sin(2\vartheta + 180^\circ) = -\sin 2\vartheta$$

$$\cos(\omega) = -\cos(\omega + 180^\circ)$$

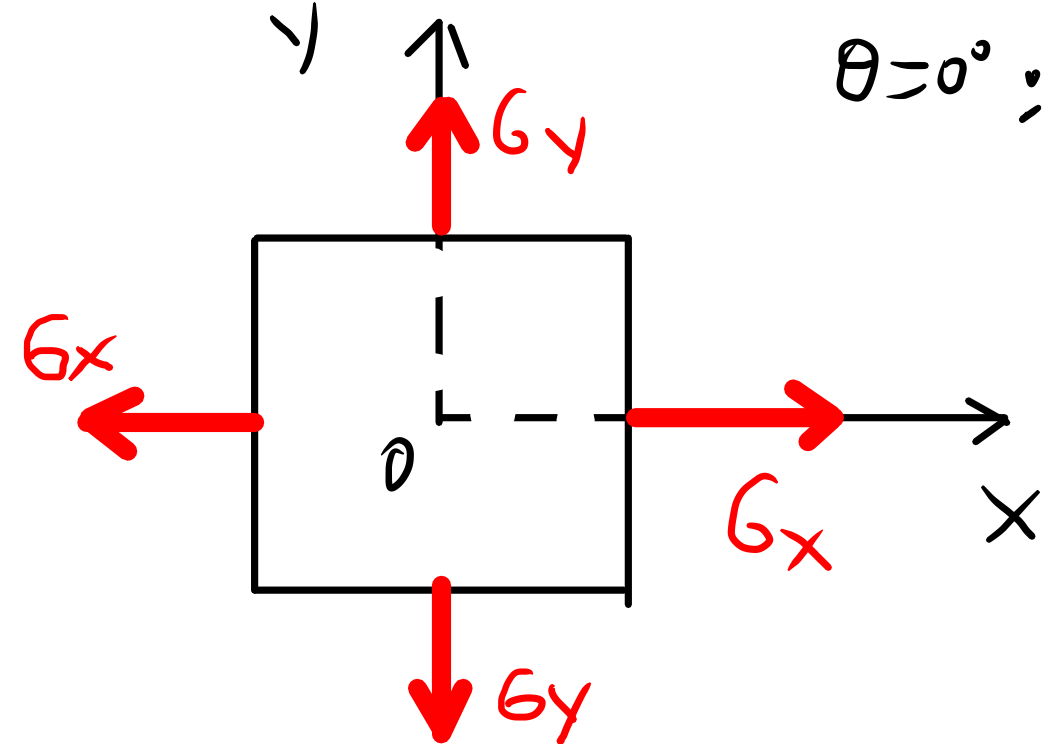
$$\sin \omega = -\sin(\omega + 180^\circ)$$

$$\tan \omega = \tan(\omega + 180^\circ)$$

$$G_y' = \frac{G_x + G_y}{2} - \frac{G_x - G_y}{2} \cos 2\vartheta - Z_{xy} \sin 2\vartheta$$



Διαζωνικός Εγερτή Κυβτός:



$\theta = 0^\circ$; $\tau_{xy} = 0$, σ_x, σ_y κύριες τάσεις που αποκτούνται στα κύρια επίπεδα

για $\theta \neq 0$, $\tau_{x'y'} \neq 0$, $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}$

βελτιστό τάσης

Εάν $|\sigma_x| = |\sigma_y|$ και $\tau_{xy} = 0$ υδροστατική πίεση

για $\theta \neq 0$, $|\sigma_{x'x'}| = |\sigma_x| = |\sigma_{y'y'}| = |\sigma_y|$ και $\tau_{x'y'} = 0$

Ευρεση κύριων τάσεων - κύριων επιπιδων

Αναζητούμε ακρόαα για την $G_{x'x'}$

$$\frac{dG_{x'x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{G_x - G_y}{2} 2\sin 2\theta_0 + \tau_{xy} 2\cos 2\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{x'y'} = 0$$

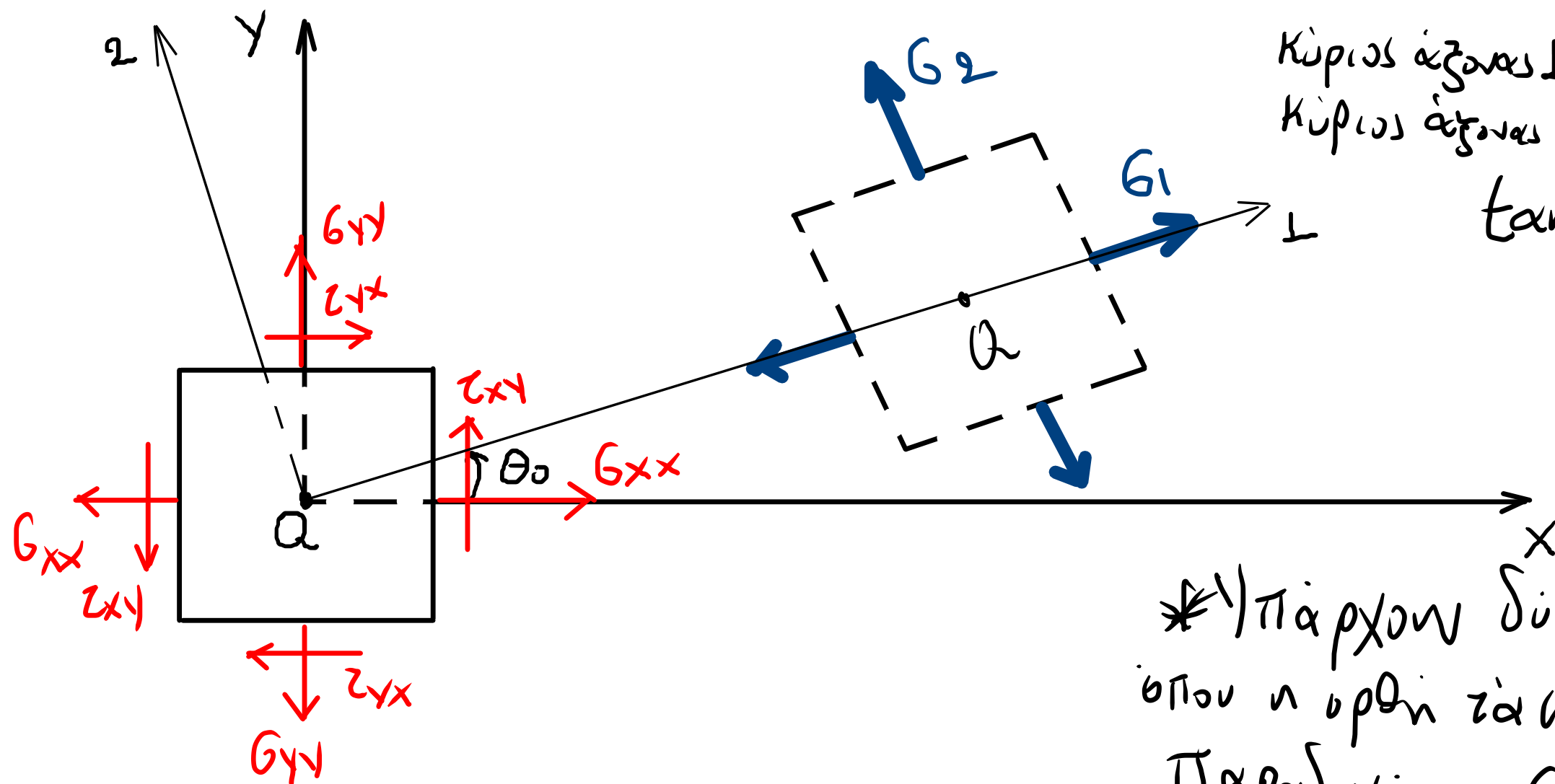
$$\tan 2\theta_0 = \frac{\sin 2\theta_0}{\cos 2\theta_0} = \frac{2\tau_{xy}}{G_x - G_y}, \quad -45^\circ \leq \theta_0 \leq 45^\circ$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta, \quad \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{d f(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(\cos 2\theta)}{d\theta} = \frac{d(\cos 2\theta)}{d(2\theta)} \cdot \frac{d(2\theta)}{d\theta} = -\sin 2\theta \cdot 2$$

$$\tan[2(\theta_0 + 90^\circ)] = \tan(2\theta_0)$$



Κύριος άξωνας 1 για θ_0

Κύριος άξωνας 2 για $\theta_0 + 90^\circ$

$$\tan[2(\theta_0 + 90^\circ)] = \tan(2\theta_0)$$

*1) Πάραχουν δύο κάθετα πελαφι τωτ επιριδα
όπου η ορθή τάση έχει ακρόαα την τιμή G_1, G_2

Παράδοχη: $G_1 = G_{max} > G_2 = G_{min}$

→ Κύρια επιπέδα: τα επίπεδα όπου οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται

→ Κύριες τάσεις: όρθες τάσεις που ακαίνονται στα κύρια επίπεδα ($\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$).

→ Κύριοι άξονες: οι κάθετοι άξονες στα κύρια επίπεδα

Καθορισμός των κυρίων επιπέδων: Παραδοχή $\sigma_1^{\max} > \sigma_2^{\min}$ $\sigma_1 \perp \sigma_2$

• Αν $\sigma_x > \sigma_y$ τότε $\theta_0 \equiv (\sigma_x, \sigma_1) = \theta_1$ πιο κοντά στον άξονα x

• Αν $\sigma_y > \sigma_x$ τότε $\theta_0 \equiv (\sigma_x, \sigma_2) = \theta_2$, $\theta_1 = 90^\circ + \theta_0$ πιο κοντά στον άξονα y

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{\max}$$

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Ευρείν τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και των επιπέδων σ - τ :

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{6x-6y}{2} 2\cos 2\theta_s - \tau_{xy} 2\sin 2\theta_s = 0 \Rightarrow \tan(2\theta_s) = \frac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} = -\frac{6x-6y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tan(2\theta_0) \cdot \tan(2\theta_s) = -1 \Rightarrow \frac{\sin 2\theta_0}{\cos 2\theta_0} \cdot \frac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} = -1$$

$$\tan(2\theta_0) = \frac{2\tau_{xy}}{6x-6y}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_s + \cos 2\theta_0 \cdot \cos 2\theta_s = 0 \Rightarrow \cos(2\theta_0 - 2\theta_s) = 0$$

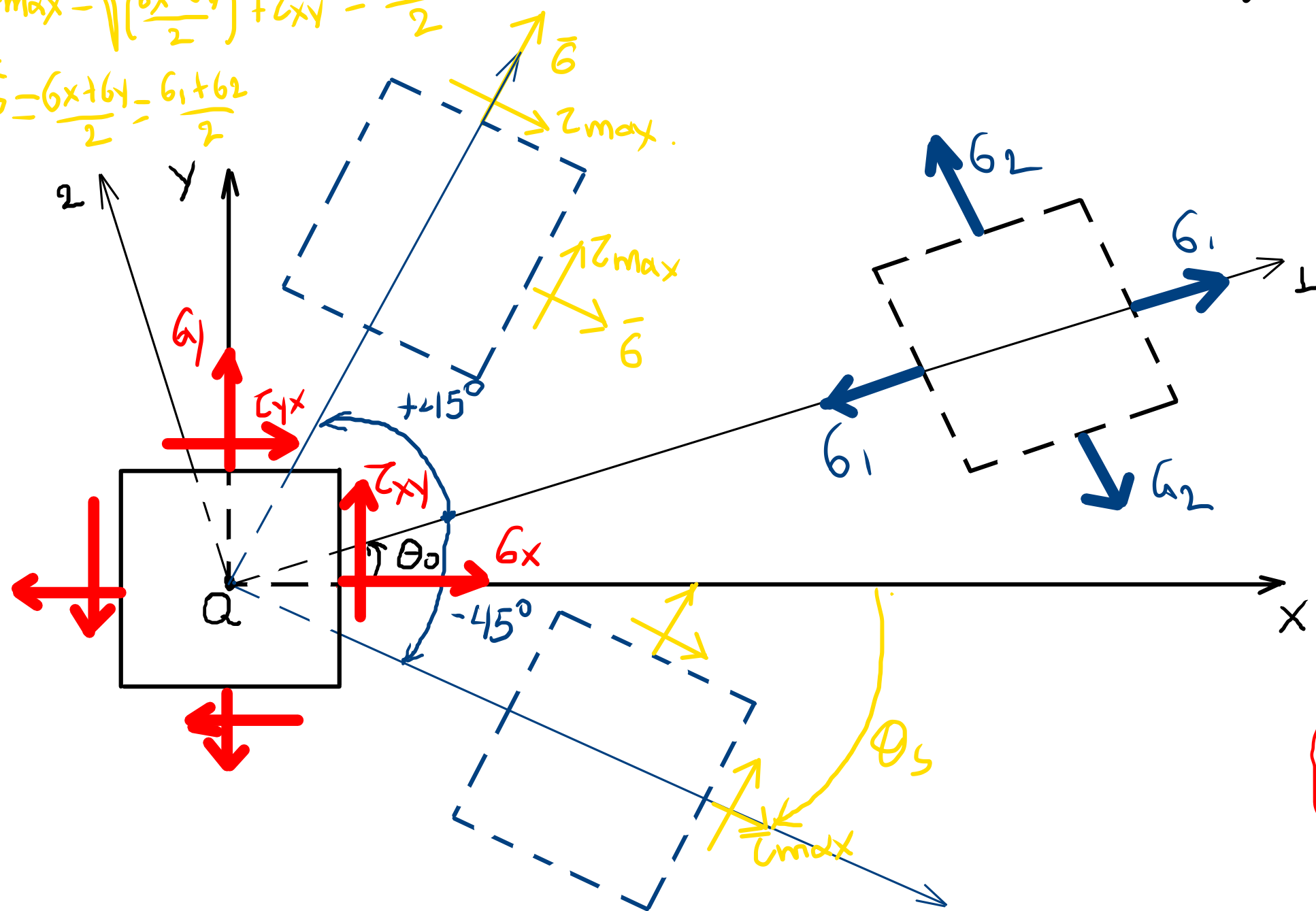
$$\Rightarrow 2\theta_0 - 2\theta_s = \pm 90^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_0 - \theta_s = \pm 45^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_s = \theta_0 \mp 45^\circ}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{6x-6y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{6_1-6_2}{2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{6x+6y}{2} = \frac{6_1+6_2}{2}$$



$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

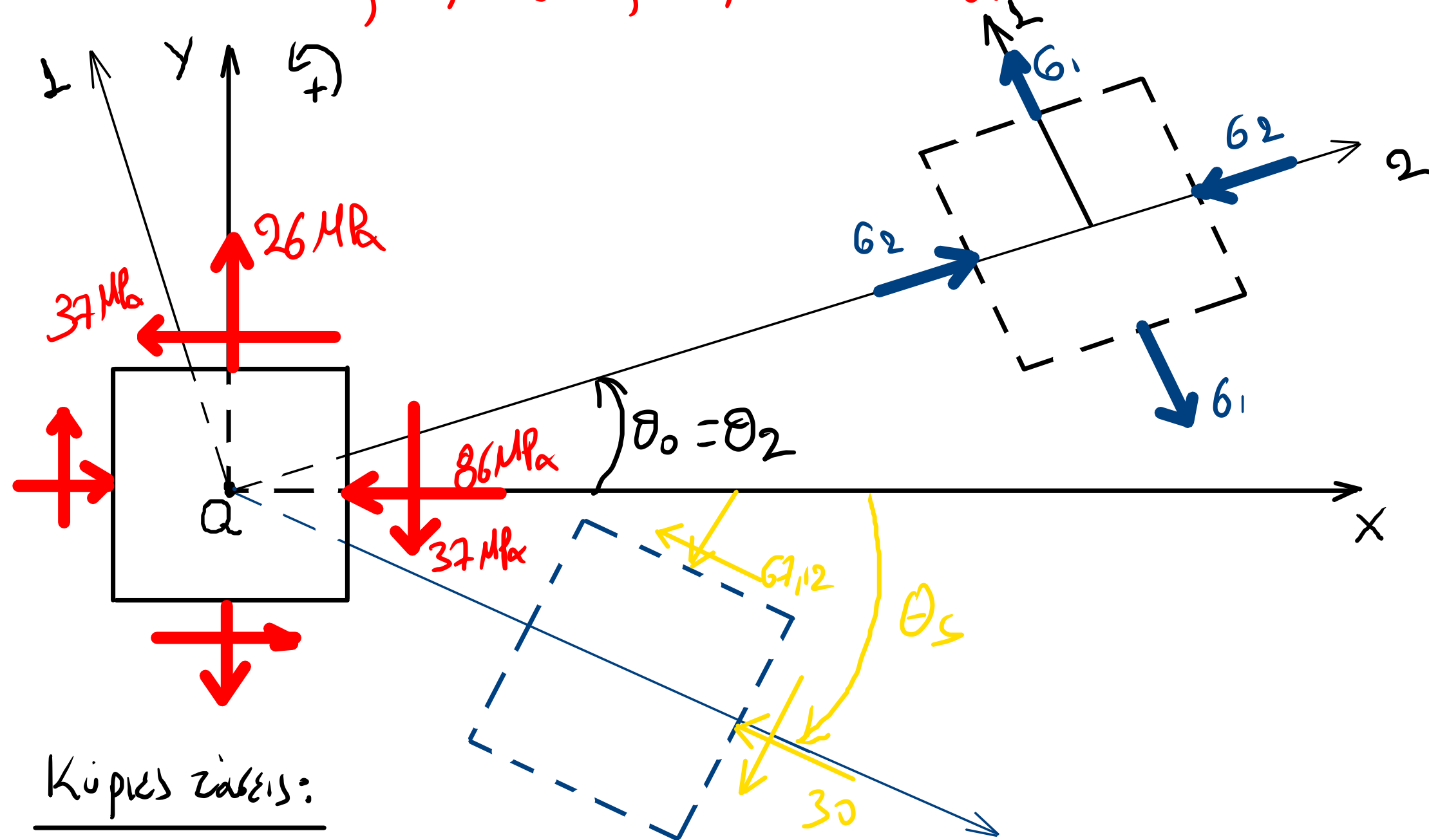
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$y = \cos x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y = \sin x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$$

Παράδειγμα: Στο σχήμα της τάσης του σχήματος συζούνται οι κύριες τάσεις, οι διεθύνσεις των κυρίων επιπέδων και η ακρόατη διατμητική τάση

$$\sigma_x = -86 \text{ MPa}, \sigma_y = 26 \text{ MPa}, \tau_{xy} = -37 \text{ MPa}$$



Κύριες τάσεις:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-86 + 26}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-86 - 26}{2}\right)^2 + (-37)^2} = \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{\max} = 37.12 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \sigma_{\min} = -97.12 \text{ MPa} \end{cases}$$

Κύρια επίπεδα:

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-37)}{-86 - 26} = 0.661 \Rightarrow 2\theta_0 = 33.46^\circ \Rightarrow \theta_0 = 16.73^\circ$$

$\theta_0 = \theta_2 = 16.73^\circ, \theta_1 = \theta_0 + 90^\circ = 106.73^\circ$

Παραδοχή $\sigma_1 > \sigma_2$

Επειδή $\sigma_x < \sigma_y$

ο κύριος άξωνας είναι πιο κοντά στον ογ άξονα

Ακρότατα Διατετακτικότητας:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{37,12 - (-97,12)}{2} = 67,12 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_s = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = - \frac{-86 - 26}{2 \cdot (-37)} = -1,514$$

$$\Rightarrow 2\theta_s = -56,55^\circ \Rightarrow \theta_s = -28,275^\circ$$

$$\theta_s = \theta_0 \mp 45^\circ = 16,75 \mp 45^\circ$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{37,12 - 97,12}{2} = -30 \text{ MPa}$$

Κύκλος Mohr - Γραφικός μετασχηματισμός τάσεων:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \quad (1)$$

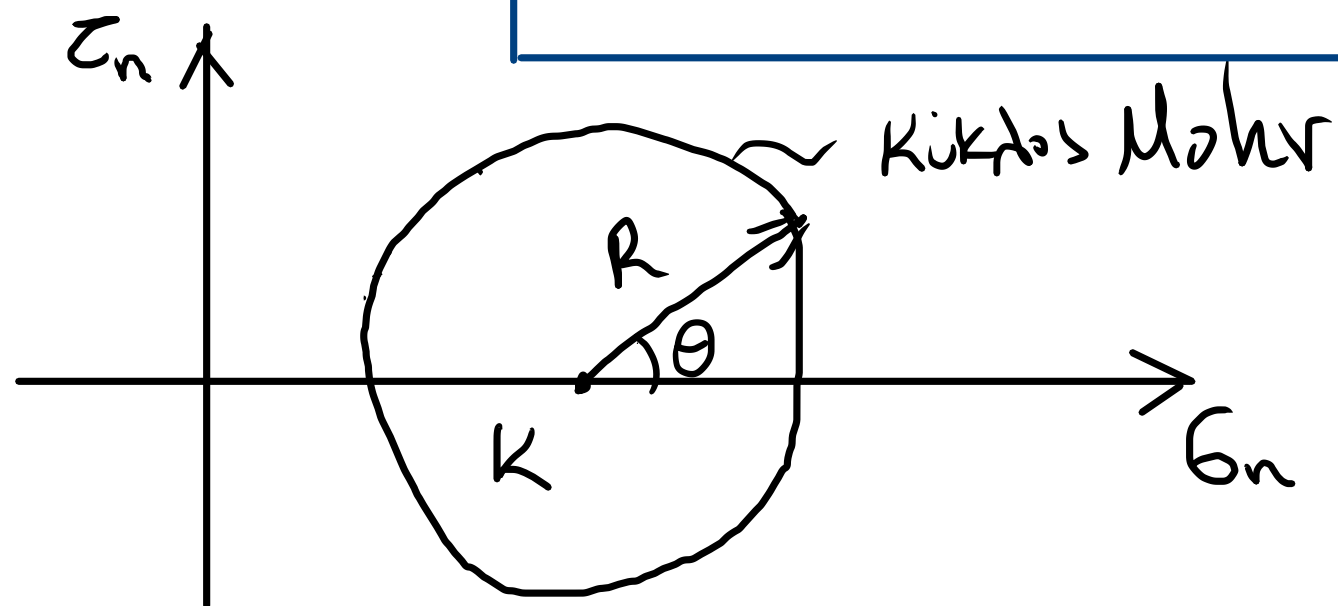
$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \quad (2)$$

$$(1)^2: \left(\sigma'_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \right)^2 \quad (3)$$

$$(2)^2: (\tau'_{xy})^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \right)^2 \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow \left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

όπου $\sigma_n \rightarrow \sigma'_x$
 $\tau_n \rightarrow \tau'_{xy}$

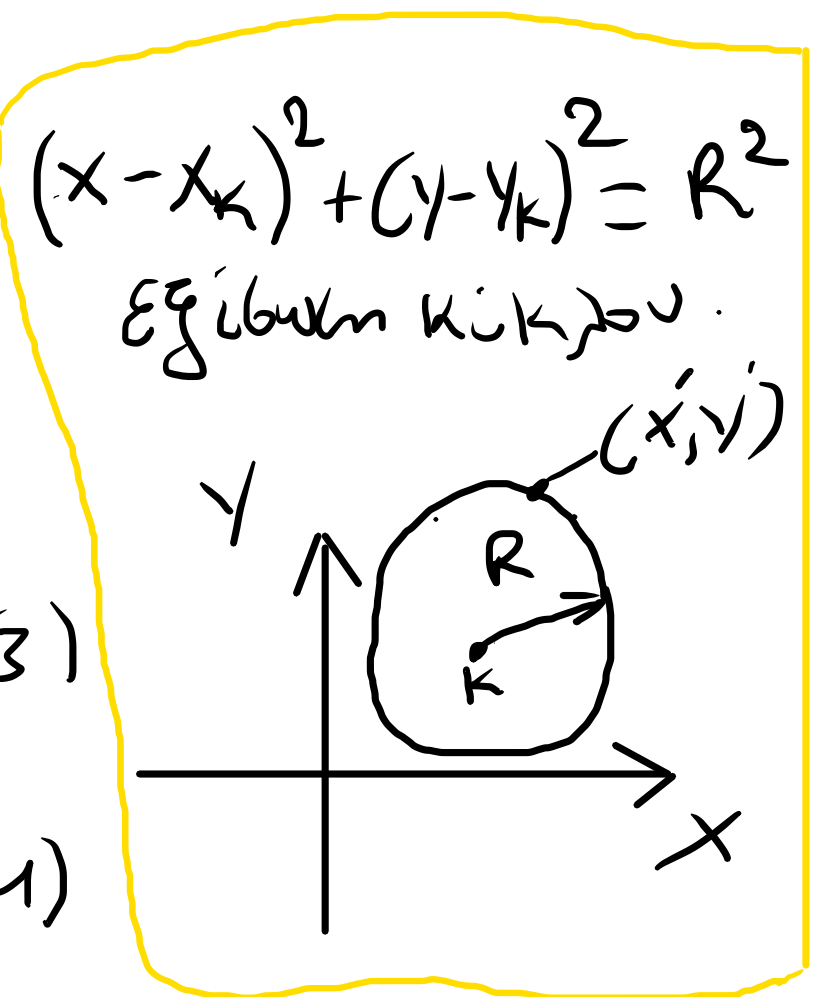


κέντρο

$$K \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

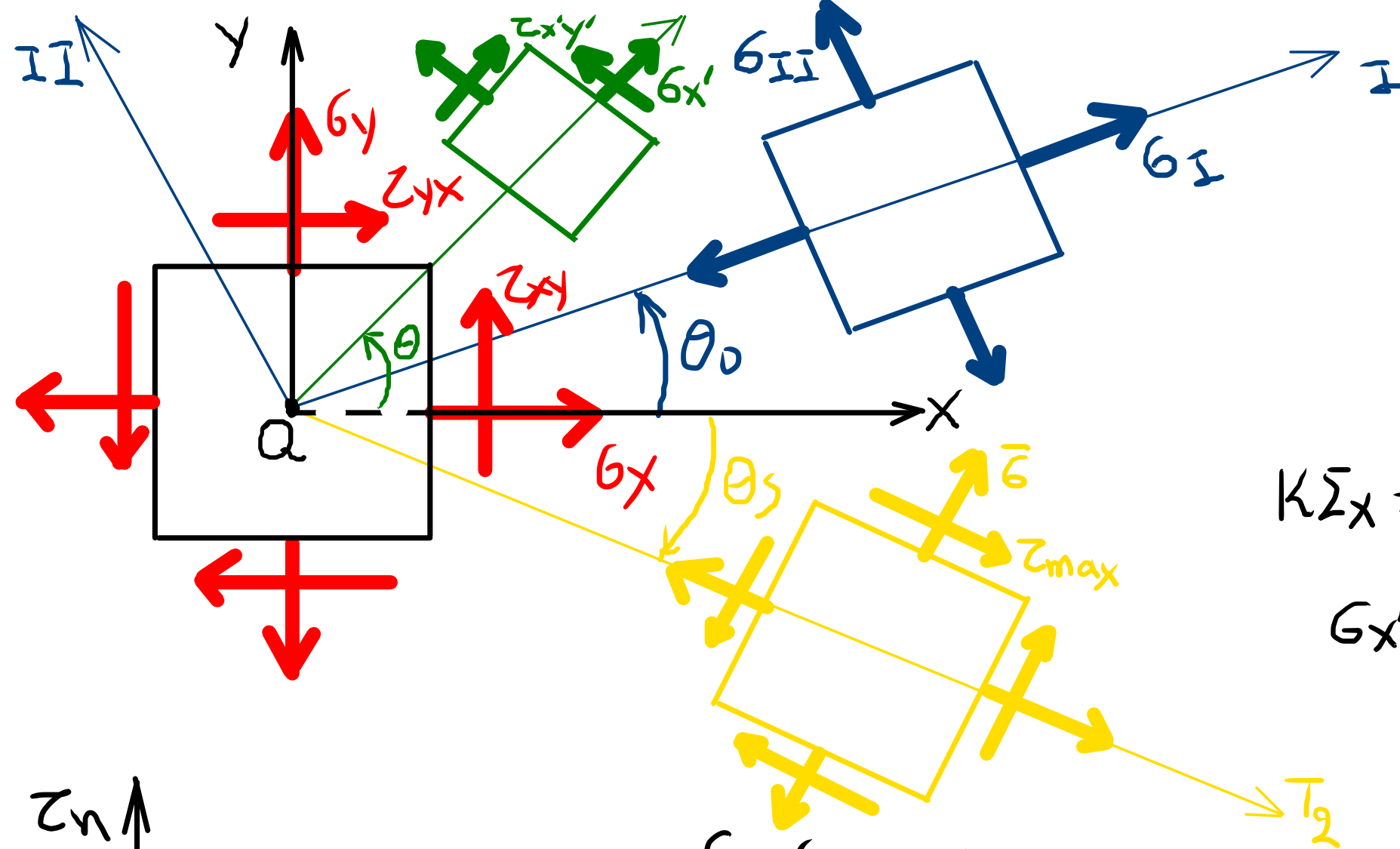
ακτίνα

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Βήματα σχεδίασης κύκλου Mohr:

- 1) Μεταφέρω τις τάσεις που αποκούνται στην πλευρά του δεδομένου στοιχείου των τάσεων όπου ο άξονας σ_x είναι κάθετος, άξονες σ_{θ} όπου θα σχεδιάσω τον κύκλο του Mohr.
 $\sigma_x = \sigma_x$ και $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$, $\times (\sigma_x, -\tau_{xy})$
Προσοχή: μόνο για αυτό το επίπεδο η διατμητική τάση αν είναι θετική σημειώνεται στα αρνητικά του σ_{θ} , αν είναι αρνητική στο στοιχείο τάσεων σημειώνεται στα θετικά του σ_{θ} .
- 2) Μεταφέρω τις τάσεις που αποκούνται στην πλευρά του δεδομένου στοιχείου των τάσεων όπου ο άξονας σ_y είναι κάθετος, άξονες σ_{θ} όπου θα σχεδιάσω τον κύκλο του Mohr.
 $\sigma_y = \sigma_y$ και $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\gamma (\sigma_y, \tau_{yx})$
- 3) Ενώνω τα σημεία X Y με ευθεία γραμμή η οποία θα τέμνει τον άξονα σ_{θ} στο σημείο $K (\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ που είναι το κέντρο του κύκλου
- 4) Σχεδιάζουμε τον κύκλο με ακτίνα $R = KX = \sqrt{(K\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$
- 5) Οι κύριες τάσεις και τα κύρια επίπεδα περιλαμβάνονται από τα σημεία A_I και A_{II} με γωνίες $2\theta_0$ και $2\theta_0 + 180^\circ$ αντίστοιχα
 $\sigma_I = \sigma_{A_I} = OK + KA_I = \bar{\sigma} + R = \sigma_{\max}$, $\sigma_{II} = \sigma_{A_{II}} = OK - KA_{II} = \bar{\sigma} - R = \sigma_{\min}$
 $\tan(2\theta_0) = \tau_{xy} / K\sigma_x = \tau_{xy} / \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)$, $\theta_I = \theta_0$, $\theta_{II} = \theta_0 + 90^\circ$



$$\tan 2\theta_0 = \frac{\Sigma_x X}{1 - \Sigma_x} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{K \Sigma_x}{\Sigma_x} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

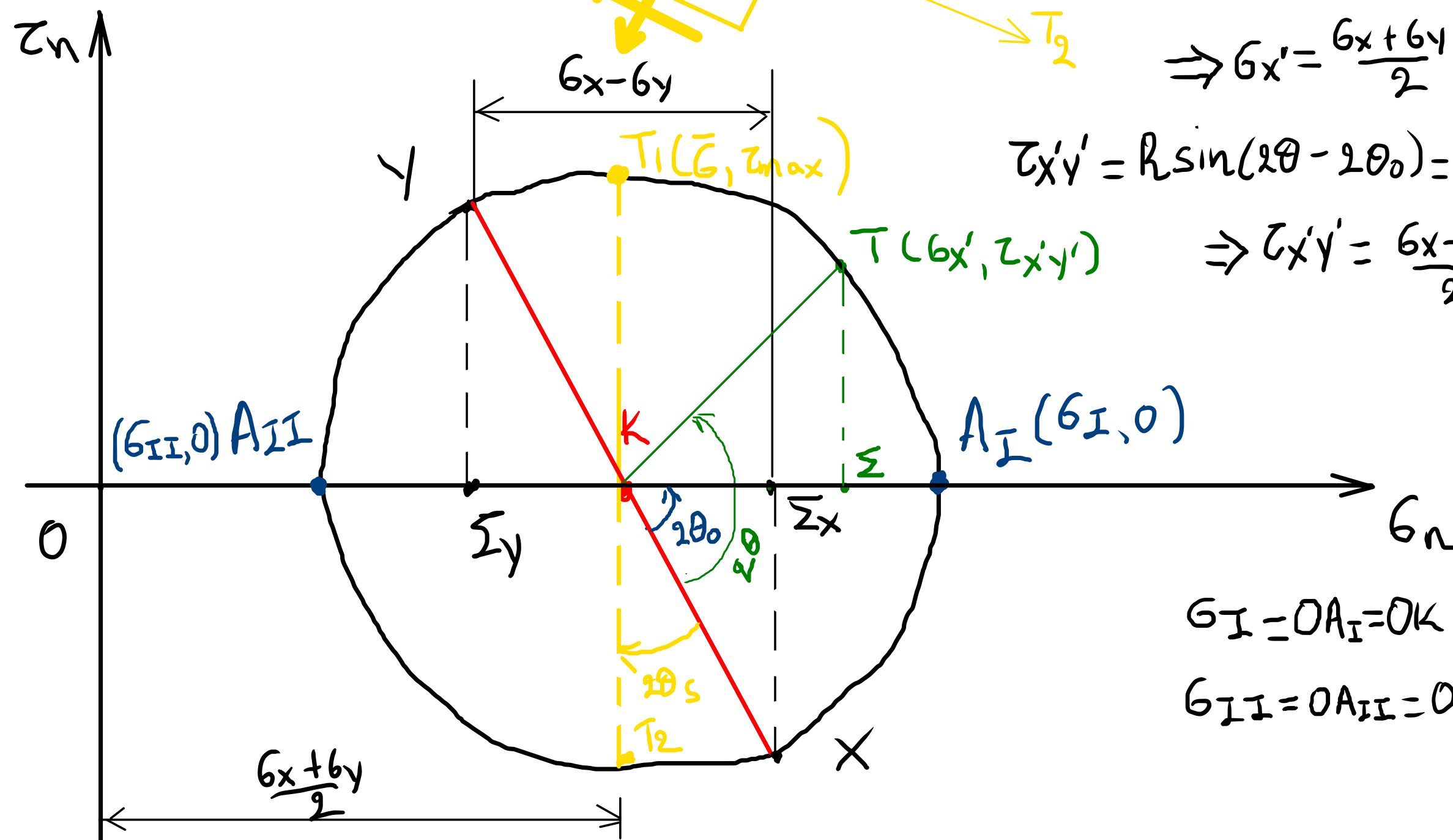
$$K \Sigma_x = R \cos 2\theta_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad \Sigma_x X = R \sin 2\theta_0 = \tau_{xy}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= O\Sigma = OK + K\Sigma = \bar{\sigma} + R \cos(2\theta - 2\theta_0) = \\ &= \bar{\sigma} + R \cos 2\theta_0 \cos 2\theta + R \sin 2\theta_0 \sin 2\theta = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = R \sin(2\theta - 2\theta_0) = R \cos 2\theta_0 \sin \theta - R \sin 2\theta_0 \cos 2\theta$$

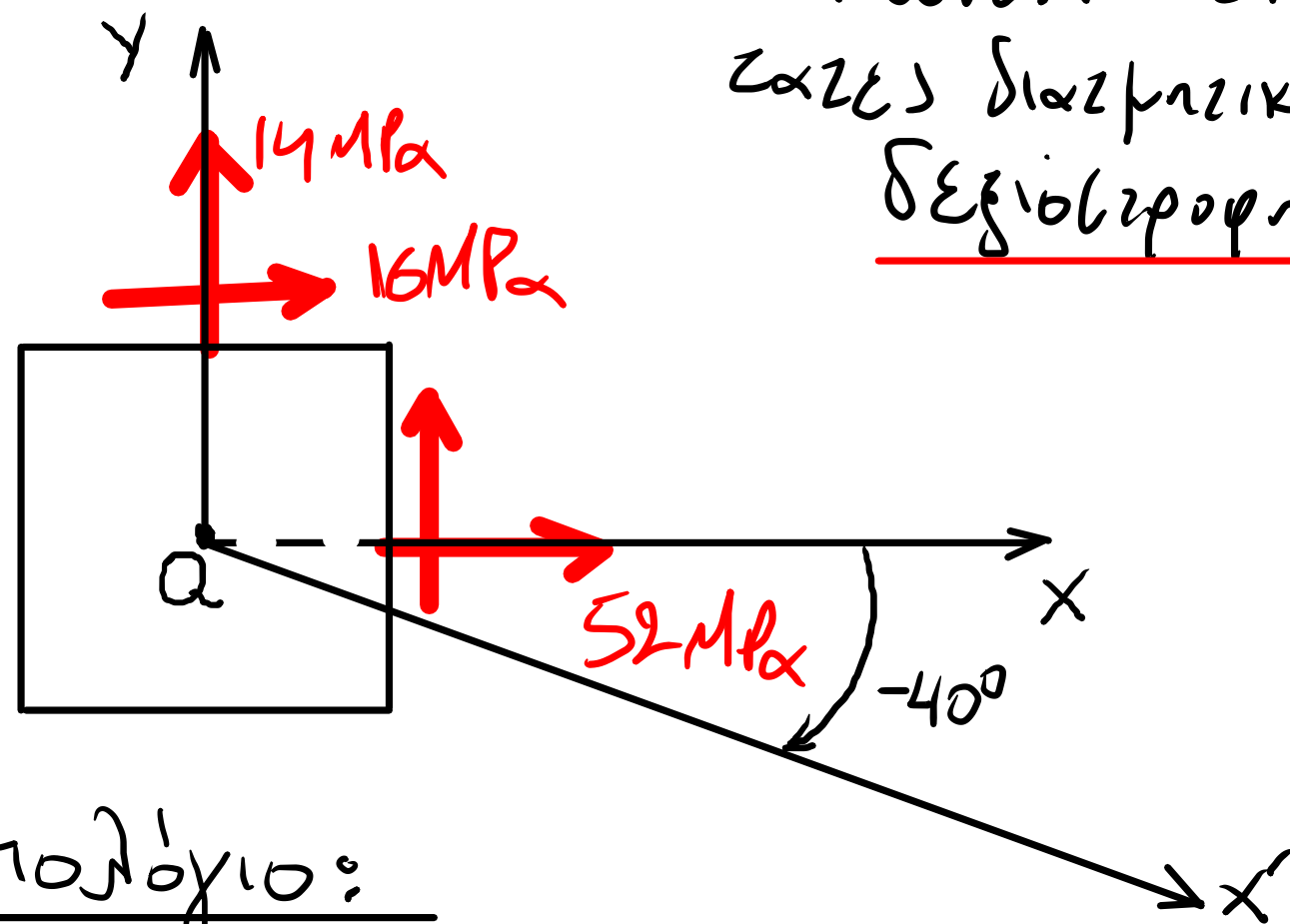
$$\Rightarrow \tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$



$$\sigma_I = OA_I = OK + KA_I = \bar{\sigma} + R$$

$$\sigma_{II} = OA_{II} = OK - KA_{II} = \bar{\sigma} - R$$

Παράδειγμα:



Ζητούνται οι κύριες τάσεις και οι δευτερεύουσες, οι ακρότατες διατμητικές και οι ελαί ορθές, και οι τάσεις για δεξιόστροφη γωνία 40° των στοιχείων των τάσεων, αναλυτικά και γραφικά

Τυπολόγιο:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Κύκλος Mohr

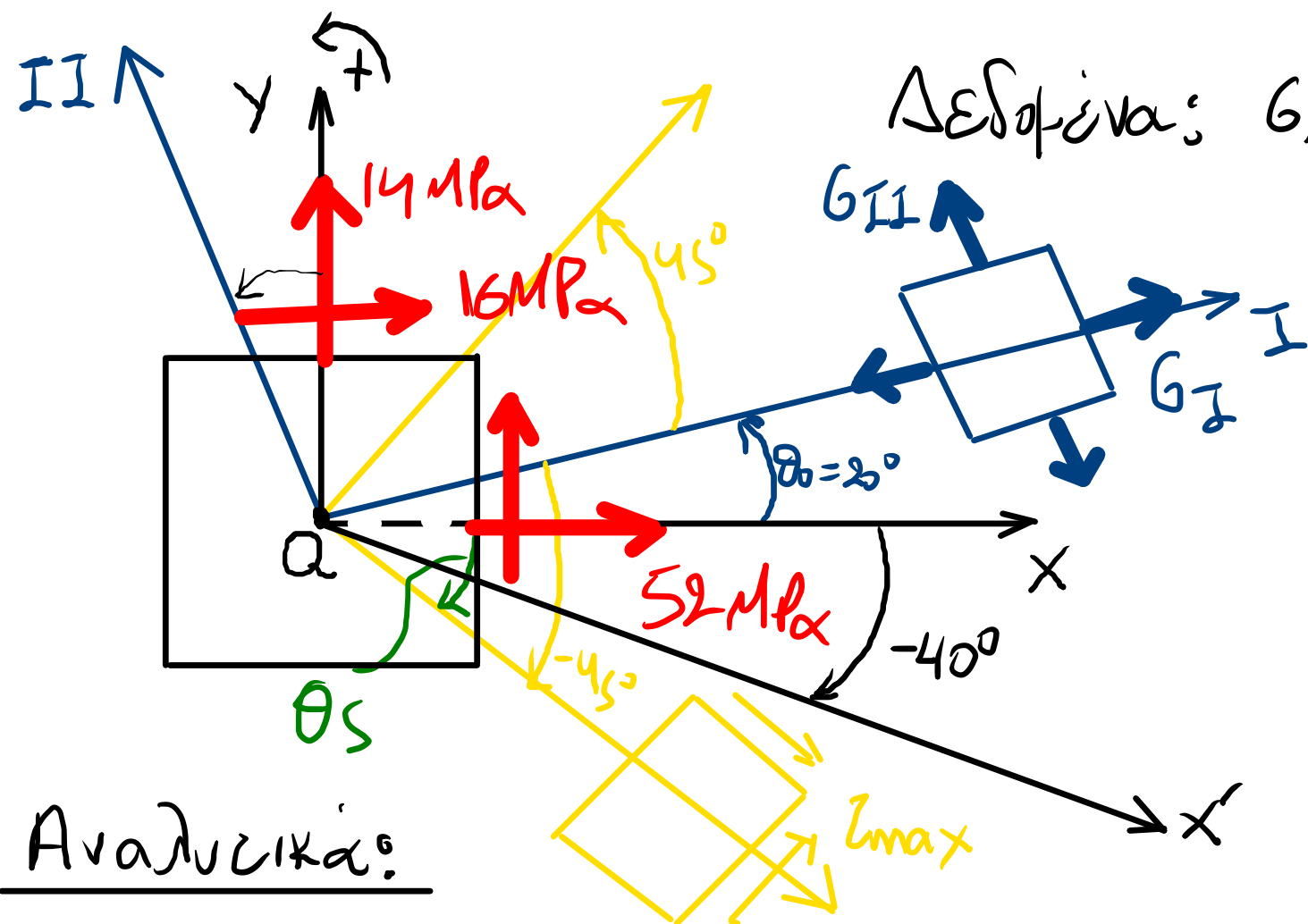
$$(\sigma_n - \bar{\sigma})^2 + \tau_n^2 = R^2$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_I = \bar{\sigma} + R, \quad \sigma_{II} = \bar{\sigma} - R$$

$$\tan(2\theta_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \tan(2\theta_s) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$
$$\tau_{\min} = -\tau_{\max}$$



Ανάλυση:

$$\tan(2\theta_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 16}{52 - 14} = 0,842 \Rightarrow 2\theta_0 = 40,1^\circ \Rightarrow \theta_0 \approx 20^\circ$$

Υποθέτουμε $\sigma_I > \sigma_{II}$, $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} \Rightarrow$ ο άξονας I είναι πιο κοντά στον άξονα x.

$$\sigma_{I,II} = \bar{\sigma} \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{52 + 14}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{52 - 14}{2}\right)^2 + 16^2} = \begin{cases} \sigma_I = 57,84 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = 8,16 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 24,84 \text{ MPa} \quad \text{ή} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = 24,84 \text{ MPa}$$

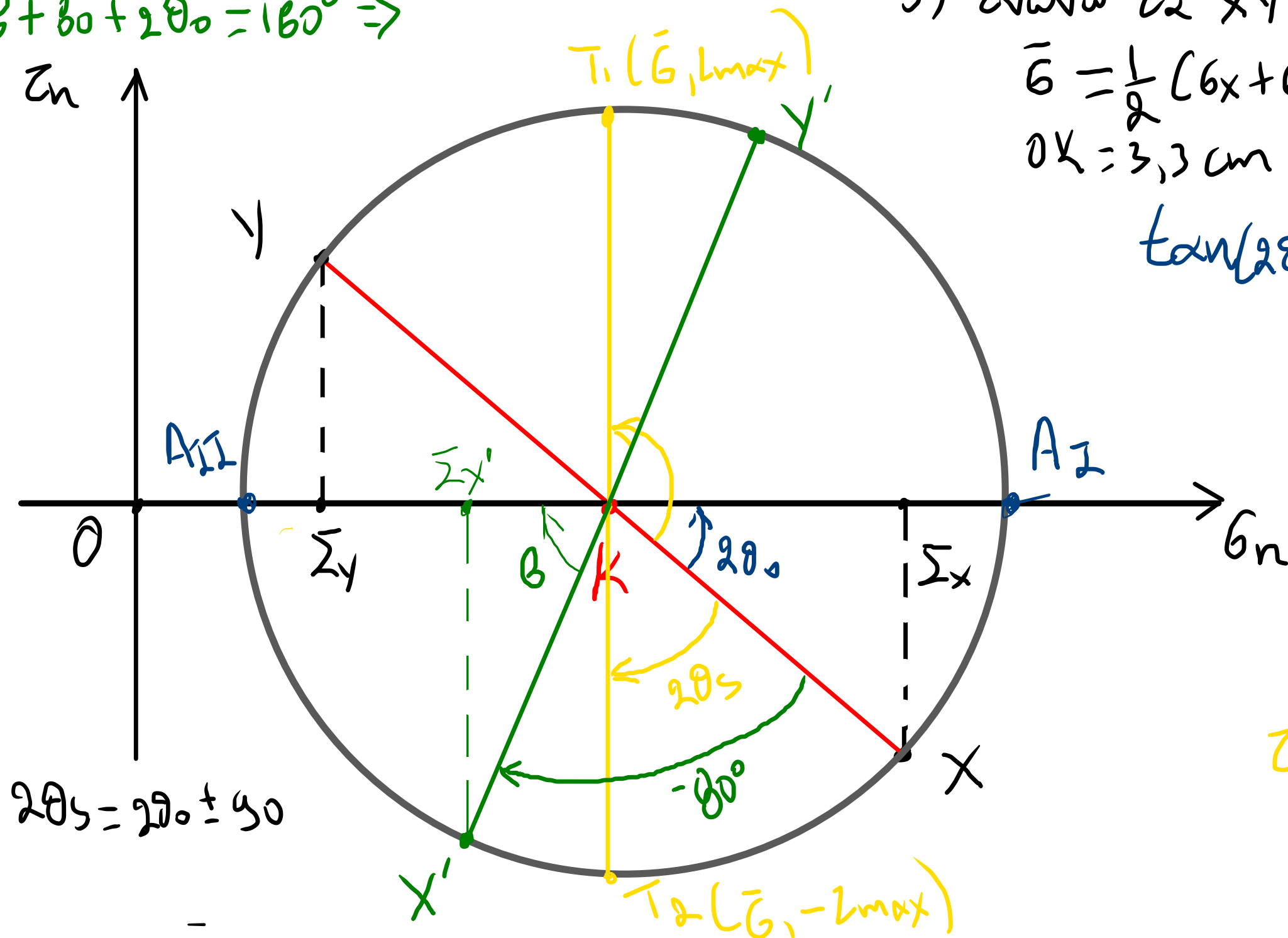
$$\theta_s = \theta_0 \pm 45^\circ \quad \text{ή} \quad \tan(2\theta_s) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

16x08c 02L:

$$\tan(2\theta_0 + 180^\circ) = \tan(2\theta_0)$$

$$\tan(2(\theta_0 + 90^\circ)) = \tan(2\theta_0)$$

Diagram of a square element under stress. On the top face, there is a normal stress of 14 MPa acting upwards and a shear stress of 16 MPa acting to the right. On the right face, there is a normal stress of 52 MPa acting to the right and a shear stress of 32 MPa acting upwards. A handwritten 'X' is next to the 32 MPa value.

$$\begin{aligned} G_X' &= 0 \quad \Sigma X' = 0 \quad K - K \Sigma X' = \bar{G} - R \cos \theta \\ \Sigma X' Y' &= \Sigma X' X' = R \sin \theta \\ \theta + \theta_0 + 2\theta_0 &= 180^\circ \Rightarrow \end{aligned}$$


$$\bar{\epsilon}_x X = 1,6 \text{ cm} \Rightarrow \epsilon_{xy} = 16 \text{ MPa} \quad \text{Τίπος 2α αραμζικα}$$

$$X(5,2, 1,6)$$

2) $\sigma_y = 1,4 \text{ cm} \Rightarrow \sigma_y = 14 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 1,6 \text{ cm} \Rightarrow \sigma_y = 16 \text{ MPa}$

3) Ενώνω τα XY και βρίσκω το κέντρο K του κύκλου

$$\bar{G} = \frac{1}{2}(6x + 6y) = \frac{1}{2}(52 + 14) = 33 \text{ MPa}$$

$OK = 3,3 \text{ cm}$ $K(3,3, 0)$

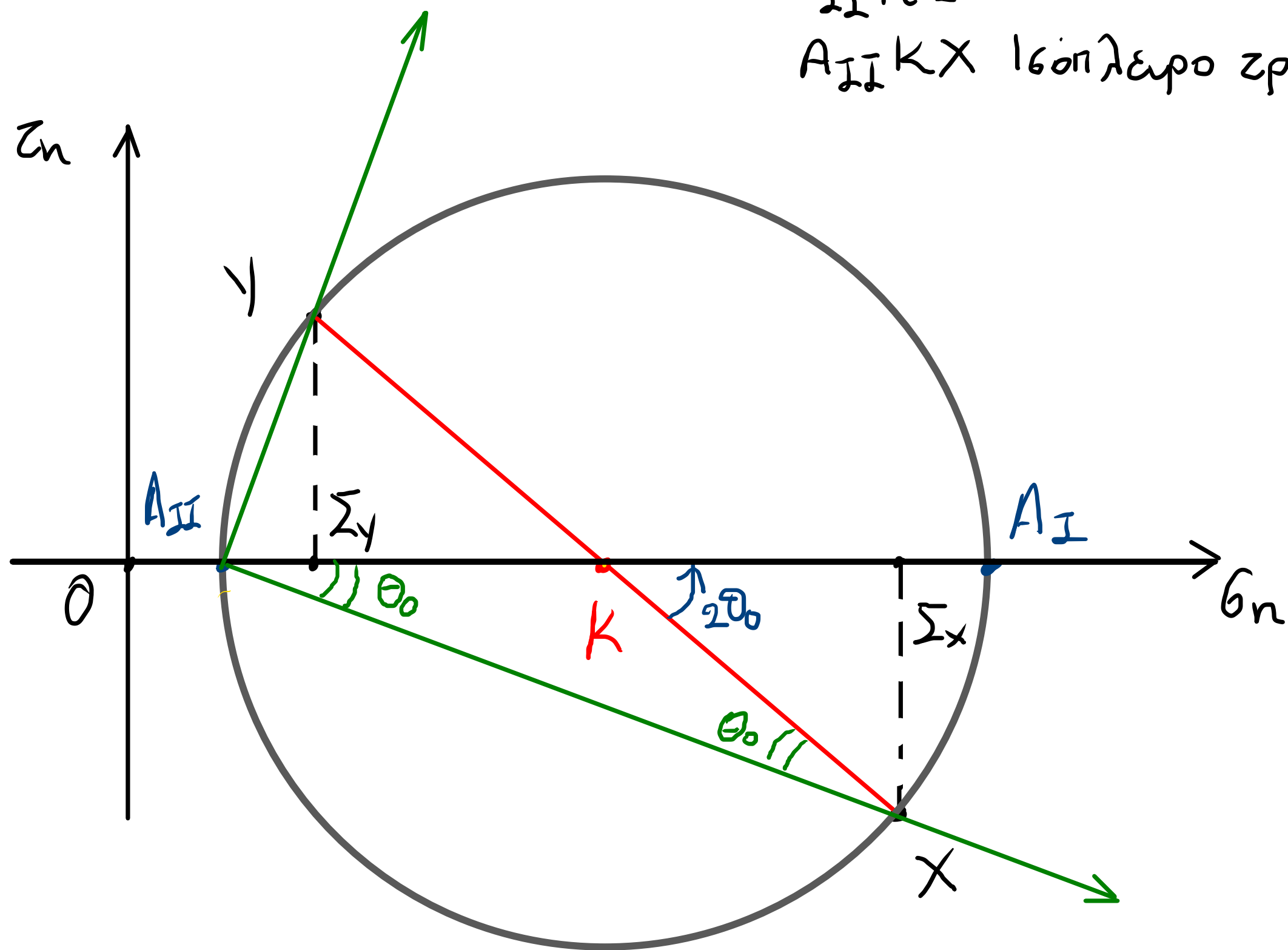
$$\tan(2\theta_0) = \frac{\sum xX}{k \sum x} = \frac{2 \times 4}{\frac{6 \times 64}{2}} = \frac{2 \times 4}{6 \times 64}$$

$$G_I = OA_I = OK + KA_I \\ = \bar{G} + R$$

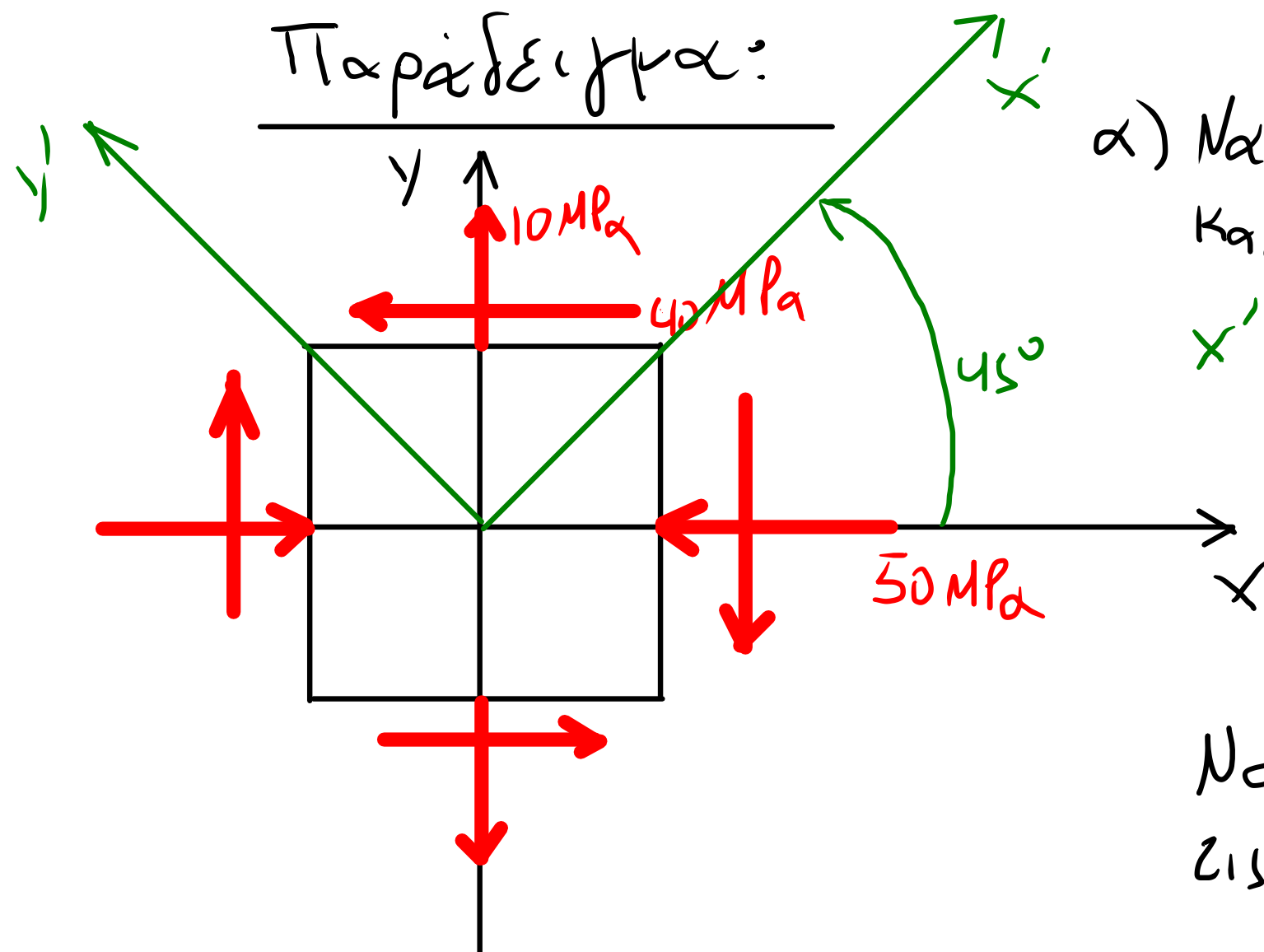
$$G_{II} = 0A_{II} = 0K - KA_{II} \\ = \bar{G} - p$$

$$Z_{\max} = Q$$

$A_{II}K = KX = R$
 $A_{II}KX$ ισοπλευρο τρίγωνο



Παράδειγμα:



α) Να υπολογιστούν οι τάσεις σε ένα στοιχείο κεκλιμένο κατά $\theta = 45^\circ$ αντιστοίχως.

β) Να υπολογιστούν οι κύριες τάσεις και η γωνία των κυρίων επιπέδων τους.

γ) Να υπολογιστούν οι μέγιστες διατμητικές τάσεις, οι εκεί ορθές τάσεις και η γωνία των επιπέδων αυτών.

Να γίνει γραφικά και να ελεγχθούν οι τάσεις και όλα σχετικά τριχία τάσεων.

Δεδομένα: $\sigma_{xx} = -50 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = 10 \text{ MPa}$, $\tau_{yx} = -40 \text{ MPa}$

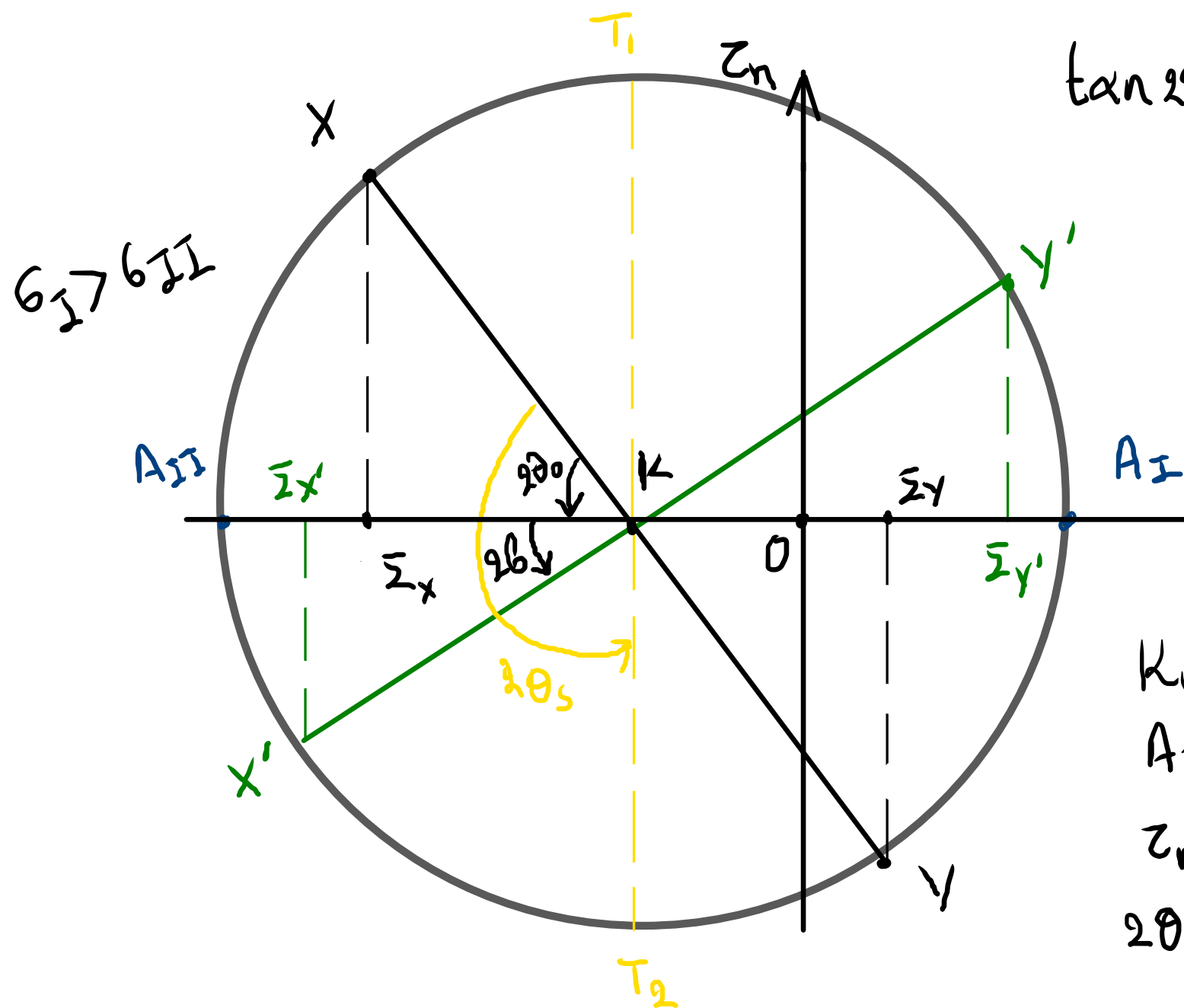
Βήματα σχεδίασης κύκλου του Mohr:

1) $\Sigma_x (-50, 0)$, $X (-50, +40)$

2) $\Sigma_y (10, 0)$, $Y (10, -40)$

3) Φέρουμε κύκλο με κέντρο K και ακτίνα R όπου:

$$K(\bar{\sigma}, 0) \text{ όπου } \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{-50 + 10}{2} = -20, R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-50 - 10}{2}\right)^2 + 40^2} = 50$$



$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2(-40)}{-50 - 10} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\theta_0 = 53.1^\circ \Rightarrow \theta_0 = 26.55^\circ$$

$$2\theta_0 + 2\theta = 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90 - 53.1 \Rightarrow 2\theta = 36.9^\circ$$

$$\sigma_{x'x'} = \bar{\sigma} - R \cos 2\theta = -20 - 50 \cos(36.9^\circ) \approx -60 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = R \sin 2\theta = 50 \sin(36.9^\circ) \approx 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'y'} = \bar{\sigma} + R \cos 2\theta = \dots \approx 20 \text{ MPa}$$

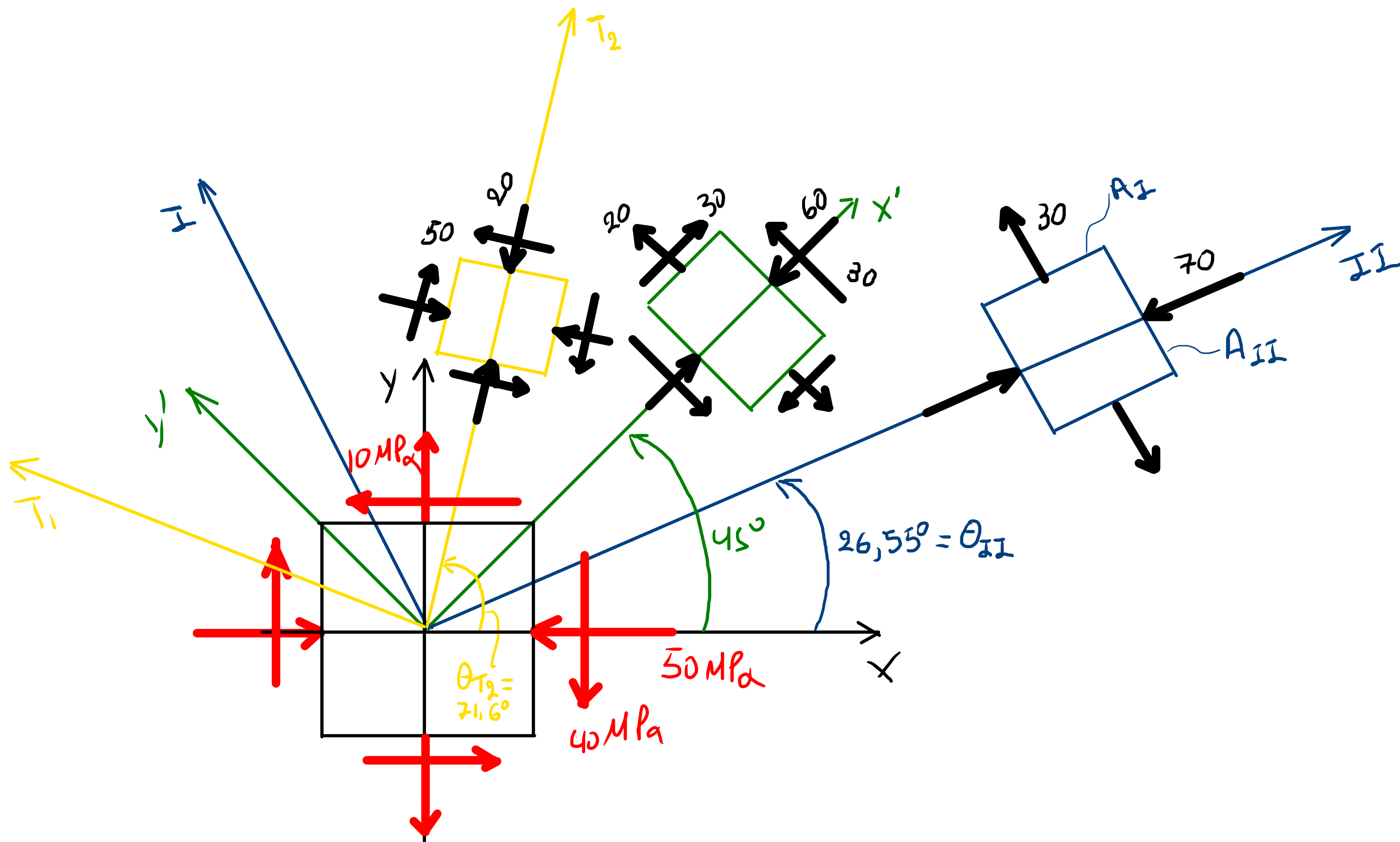
$$x'(-60, -30), y'(20, 30)$$

Κύριες τάσεις: $\sigma_{I,II} = \bar{\sigma} \pm R = -20 \pm 50 = \begin{cases} \sigma_I = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = -70 \text{ MPa} \end{cases}$
 $A_I(30, 0), A_{II}(-70, 0), \theta_I = \theta_0 + 90^\circ$

$$\tau_{max} = R = 50 \text{ MPa}, T_1(-20, 50), T_2(-20, -50)$$

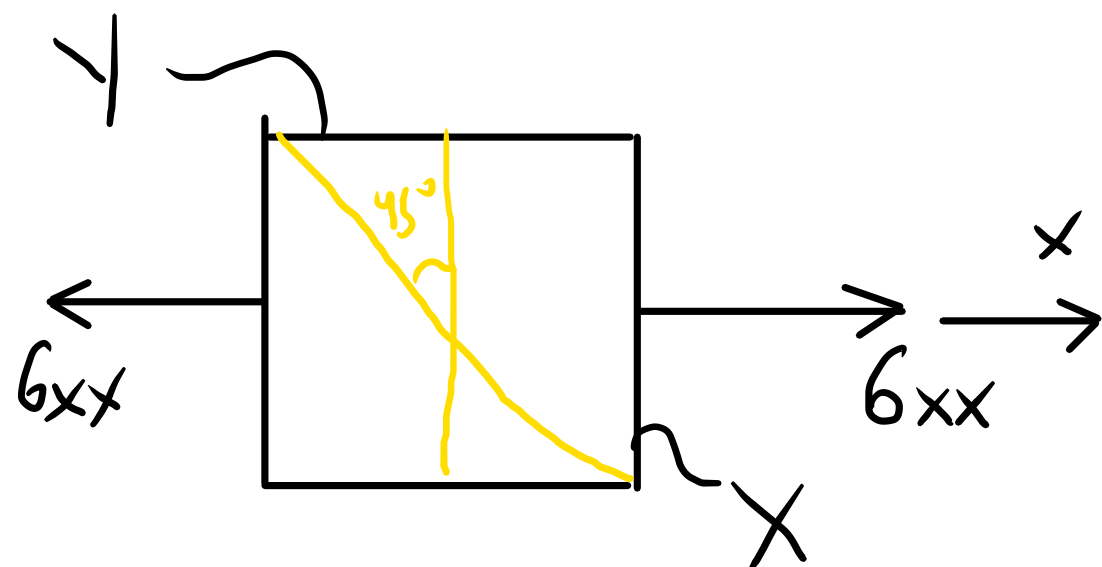
$$2\theta_s = 2\theta_0 + 90 \Rightarrow \theta_{T_2} = \theta_s = \theta_0 + 45^\circ = 26.55 + 45 = 71.55^\circ$$

Στοιχείο τάσεων:



Παραδείγματα ατλών καταπονήσεων:

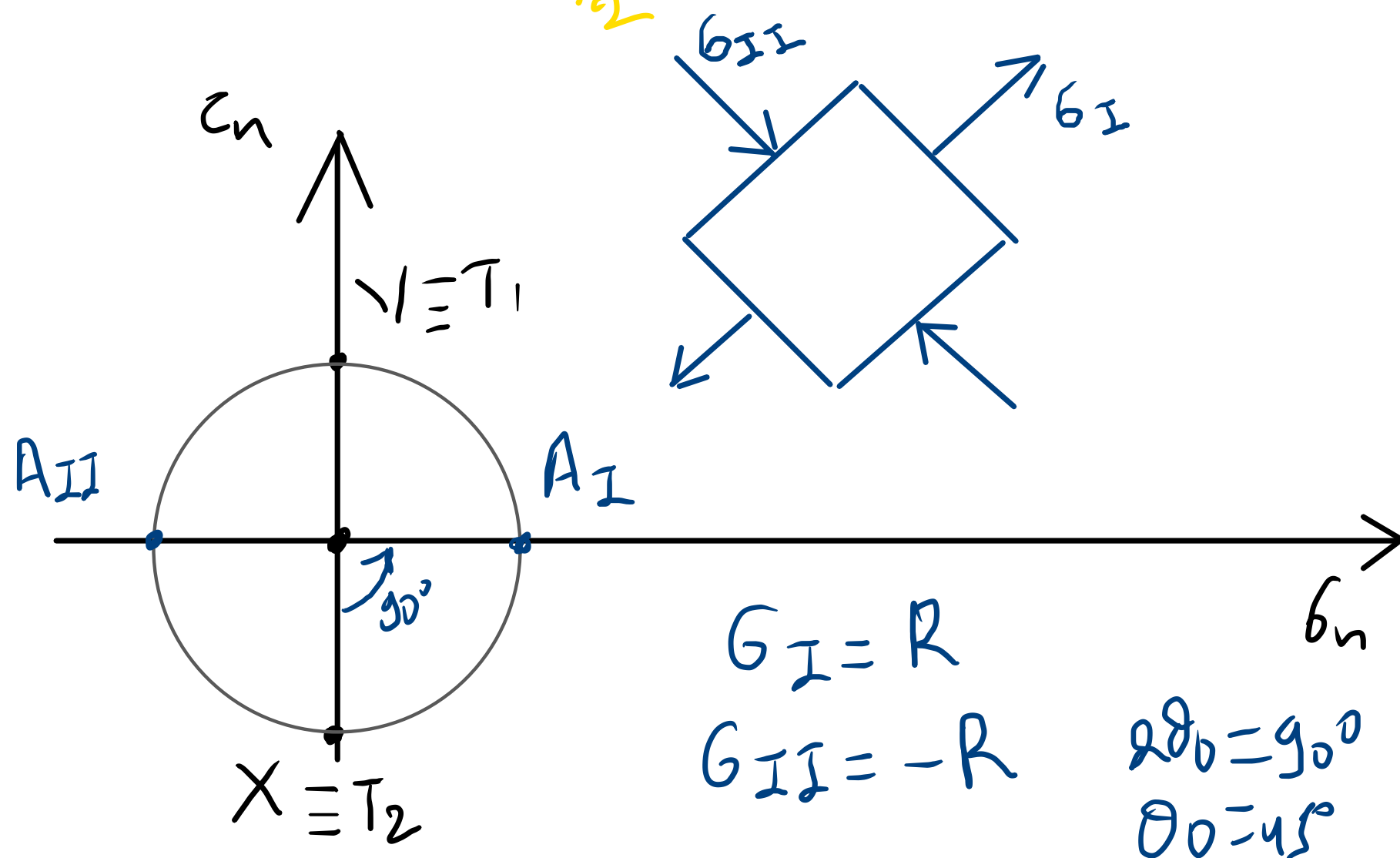
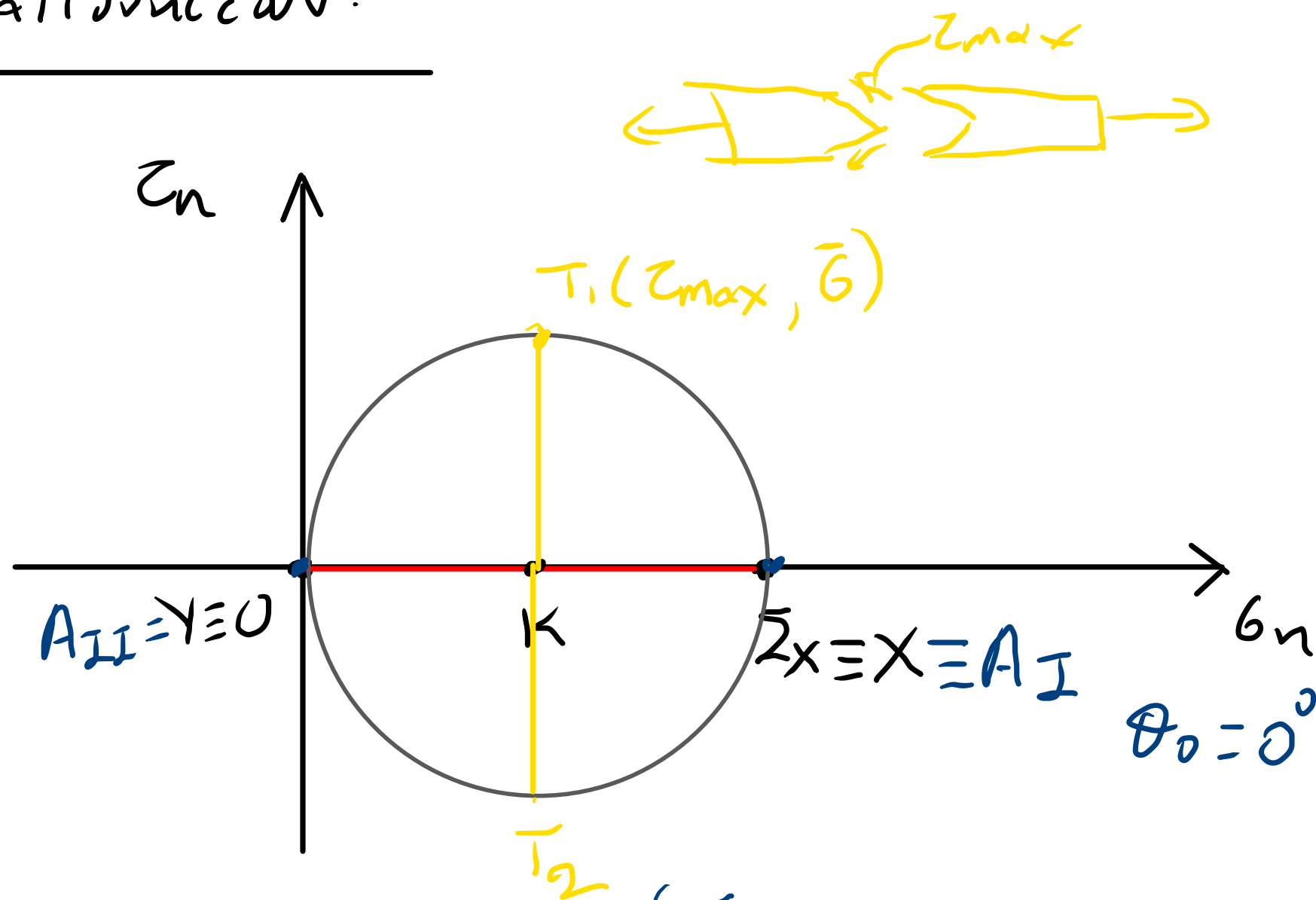
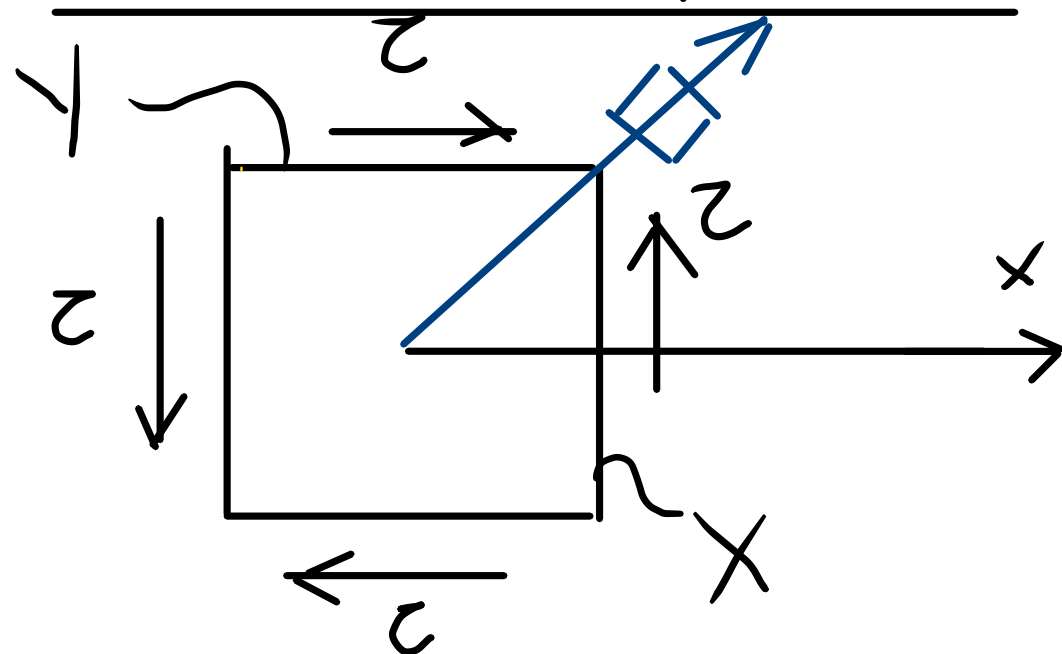
Μονοαξονική φόρτιση:



$$K(\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2})$$

$$z_{max} = R = \frac{\sigma_x}{2}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_x}{2}$$

Καθαρή διάτμηση:



$$G_I = R$$

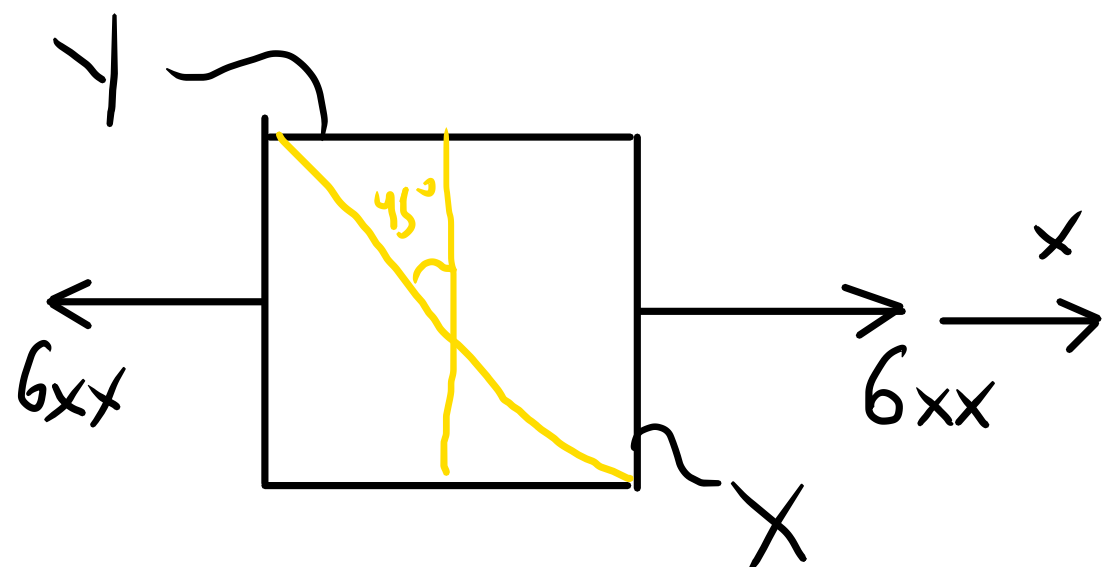
$$G_{II} = -R$$

$$2\theta_0 = 90^\circ$$

$$\theta_0 = 45^\circ$$

Παραδείγματα ατλών καταπονήσεων:

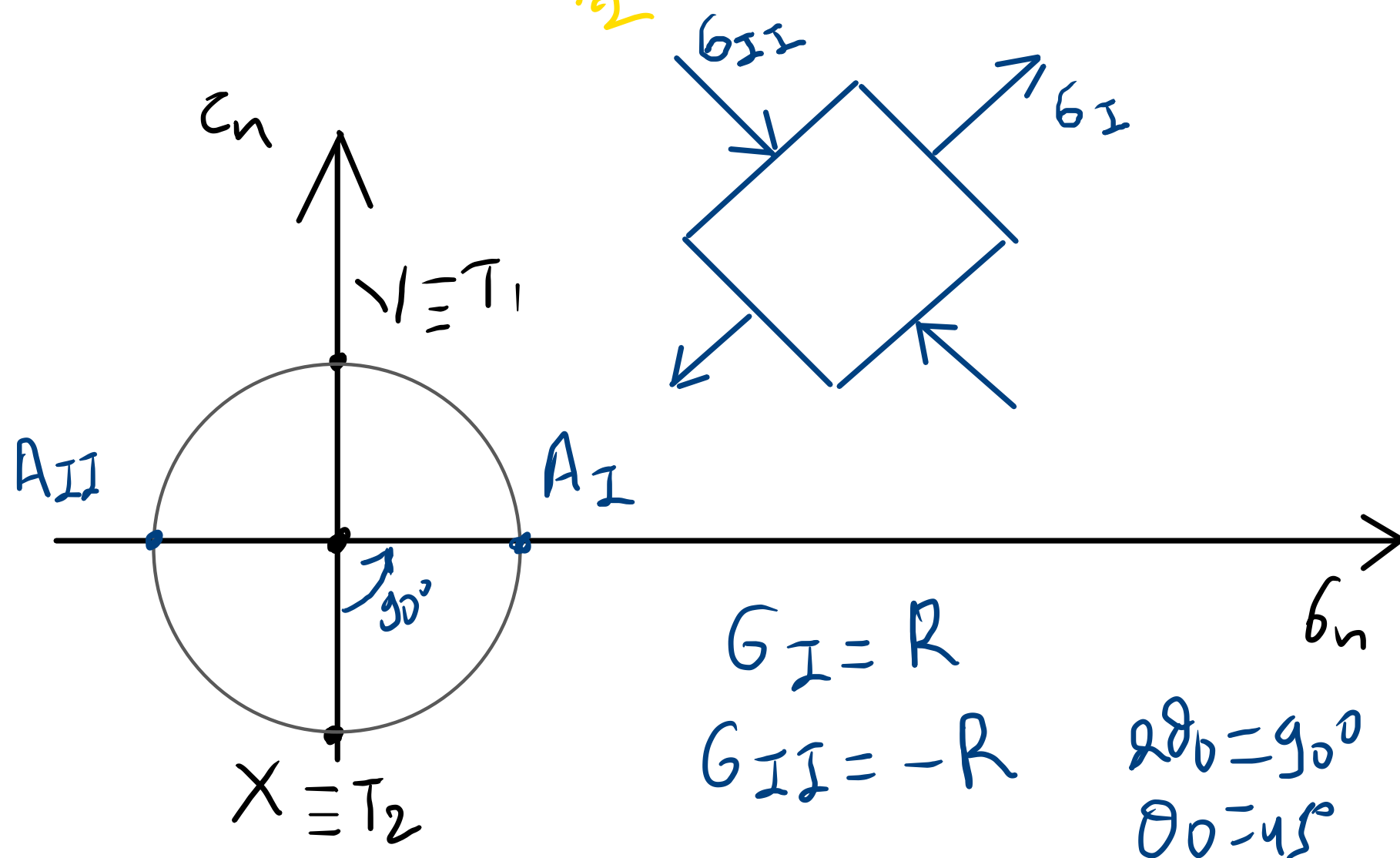
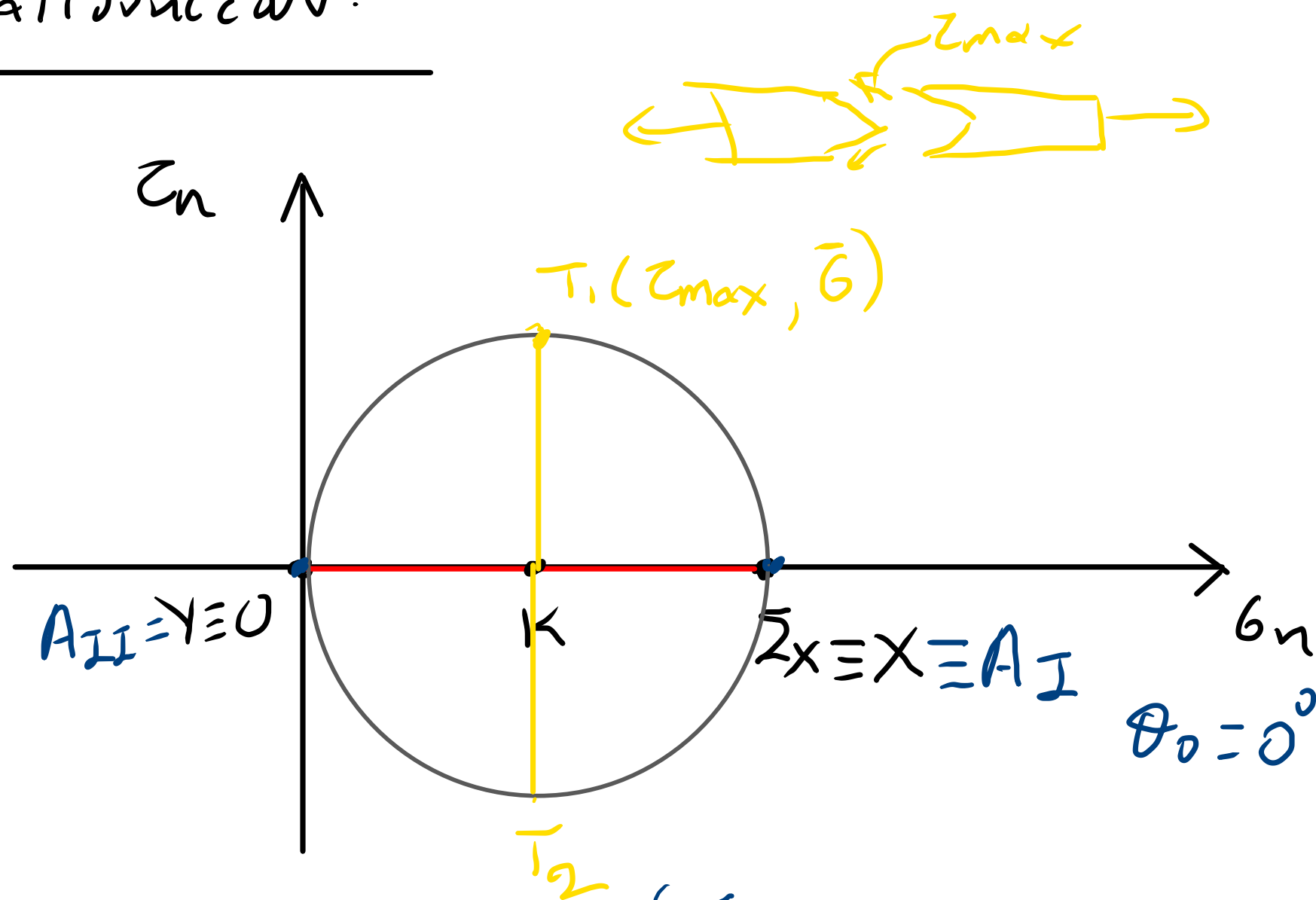
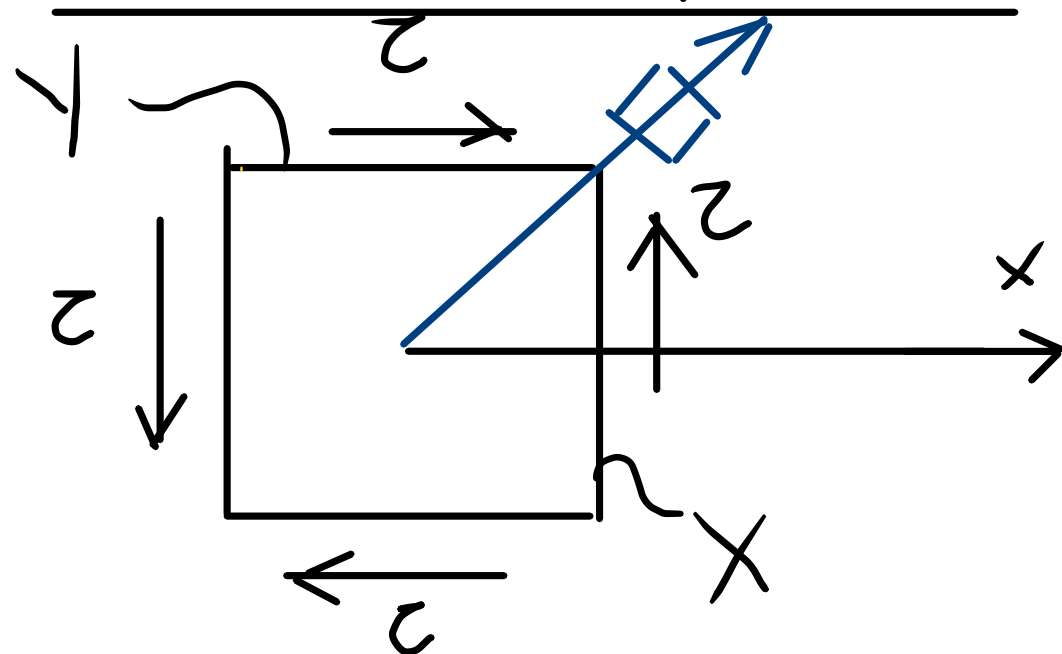
Μονοαξονική φόρτιση:



$$K(\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2})$$

$$z_{max} = R = \frac{\sigma_x}{2}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_x}{2}$$

Καθαρή διάτμηση:



$$G_I = R$$

$$G_{II} = -R$$

$$2\theta_0 = 90^\circ$$

$$\theta_0 = 45^\circ$$