



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Εισαγωγή

Δρ. Δημήτριος ΣΑΒΒΑΣ



Αντικείμενο-Στόχος του μαθήματος

Στόχος Αντοχής Υλικών

Να εφοδιάσει το μηχανικό με τις απαραίτητες γνώσεις για την ανάλυση και τη σχεδίαση διαφόρων κατασκευών όπως κτίρια, γέφυρες, αγωγούς κτλ. Για το σκοπό αυτό, στο πλαίσιο του μαθήματος, οι φοιτητές θα αποκτήσουν το θεωρητικό υπόβαθρο για τον προσδιορισμό των τάσεων και παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στα δομικά μέλη των κατασκευών λόγω επιβολής εξωτερικών φορτίων. Με το πέρας του μαθήματος οι φοιτητές θα μπορούν να κατανοήσουν και να αναλύσουν στο πλαίσιο της γραμμικής ελαστικότητας, προβλήματα κάμψης δοκών με διάτμηση, στρέψης ατράκτων και καμπτικού λυγισμού υποστυλωμάτων.

**Επιθυμητές γνώσεις από άλλα μαθήματα: Μηχανική Ι - Στατική*



Διαφορές με Μηχανική Ι

Μηχανική Ι-Στατική (απαραμόρφωτο στερεό)	Αντοχή των υλικών (παραμορφώσιμο στερεό)
• Εξισώσεις Ισορροπίας	• Εξισώσεις Ισορροπίας • Καταστατικές σχέσεις υλικού • Συνθήκες συμβιβαστού παραμορφώσεων
Προσδιορισμός αντιδράσεων και διαγραμμάτων M , N , Q .	Προσδιορισμός των τάσεων και παραμορφώσεων που καταπονούν τα δομικά μέλη της κατασκευής.
	• Προσδιορισμός συνθηκών αστοχίας κατασκευών • Έλεγχος επάρκειας-αντοχής συγκεκριμένου φορέα υπό δεδομένη φόρτιση • Σχεδίαση φορέα έναντι φορτίων

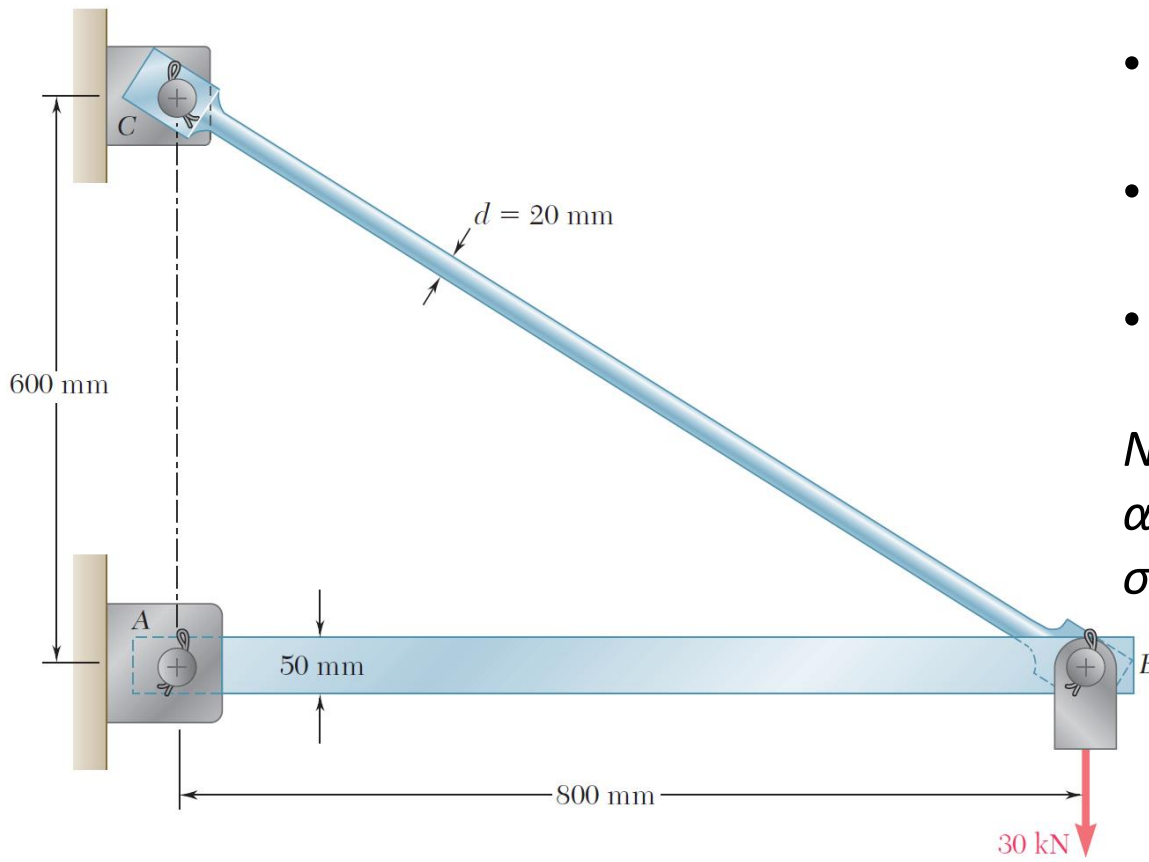
Χρησιμότητα Αντοχής Υλικών

Ανάλυση & Σχεδιασμός δομικών μελών των κατασκευών:



Εισαγωγικές έννοιες Εφαρμογή από Στατική

Ανασκόπηση των μεθόδων της Στατικής:



- Βραχίονας AB ορθογώνιας διατομής 30x50 mm
- Ράβδος BC κυκλικής διατομής $d=20 \text{ mm}$
- Συνδέσεις με πείρους στα σημεία A, B, C

Να προσδιοριστούν οι αντιδράσεις στα σημεία στήριξης.

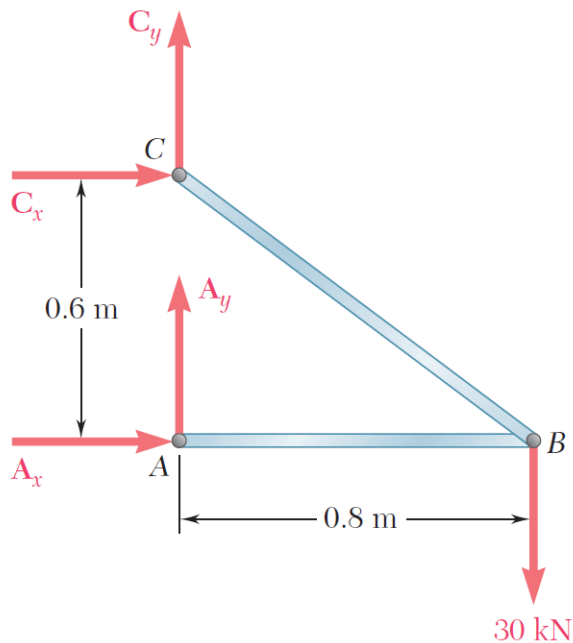
Τριαρθρωτό επίπεδο δικτύωμα στήριξης φορτίου 30 kN

Εισαγωγικές έννοιες Εφαρμογή από Στατική

Ανασκόπηση των μεθόδων της Στατικής:

Δ.Ε.Σ. Κατασκευής

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:



$$+\curvearrowright \Sigma M_C = 0: \quad A_x(0.6 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) = 0$$

$$A_x = +40 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$A_x + C_x = 0$$

$$C_x = -A_x \quad C_x = -40 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

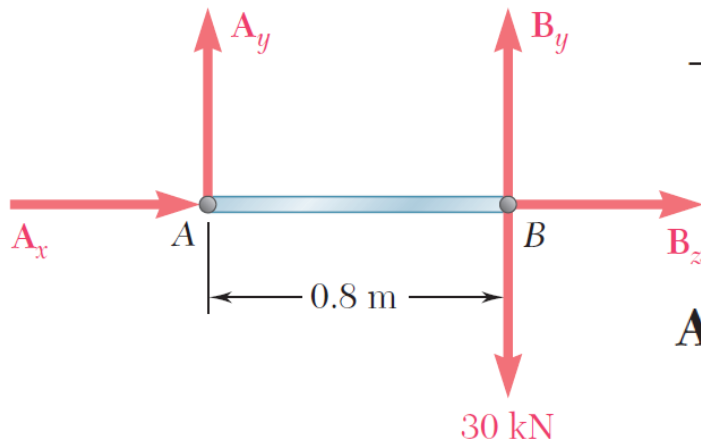
$$A_y + C_y - 30 \text{ kN} = 0$$

$$A_y + C_y = +30 \text{ kN}$$

Εισαγωγικές έννοιες Εφαρμογή από Στατική

Ανασκόπηση των μεθόδων της Στατικής:

Δ.Ε.Σ. Μέλους AB



Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας:

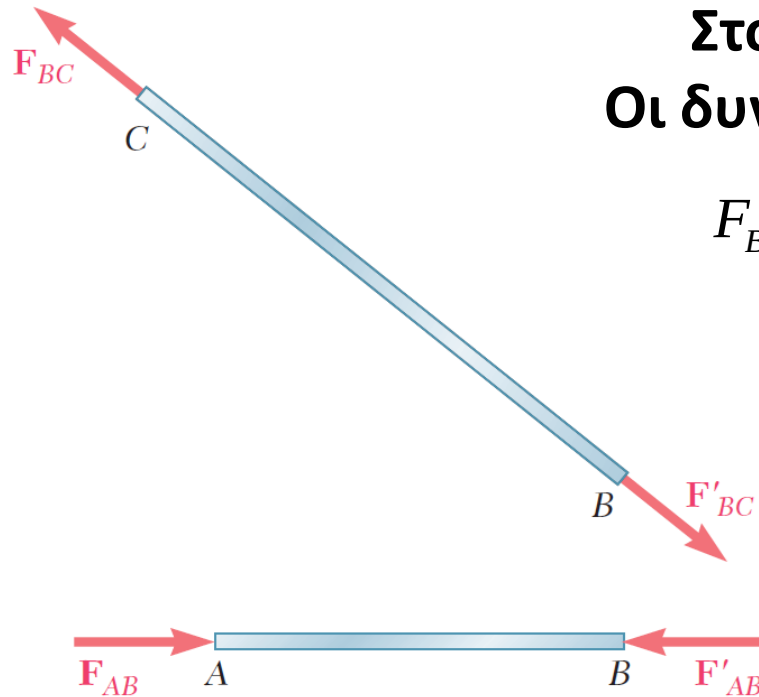
$$+\uparrow \Sigma M_B = 0: \quad -A_y(0.8 \text{ m}) = 0 \quad A_y = 0$$

$$\mathbf{A} = 40 \text{ kN} \rightarrow \quad \mathbf{C}_x = 40 \text{ kN} \leftarrow, \mathbf{C}_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$

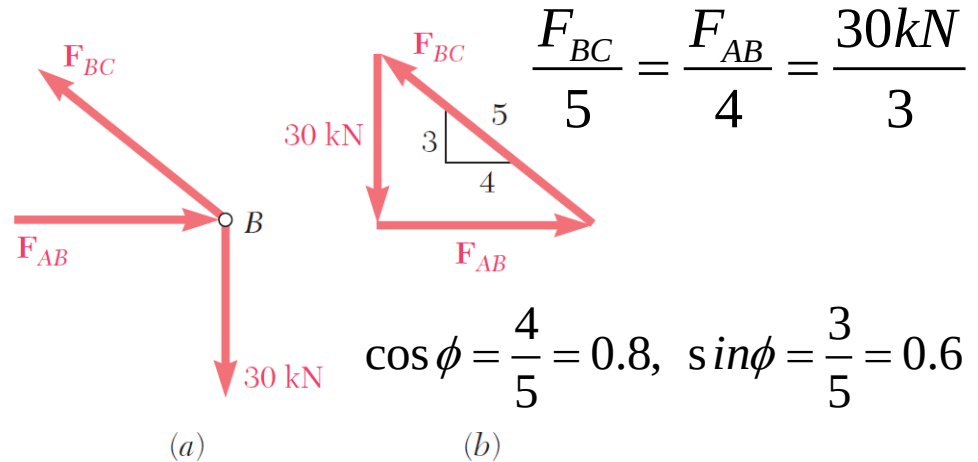
Εισαγωγικές έννοιες Εφαρμογή από Στατική

Στοιχεία δύο δυνάμεων (AB και BC)
Οι δυνάμεις στα άκρα τους είναι αξονικές

$$F_{BC} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ kN}$$



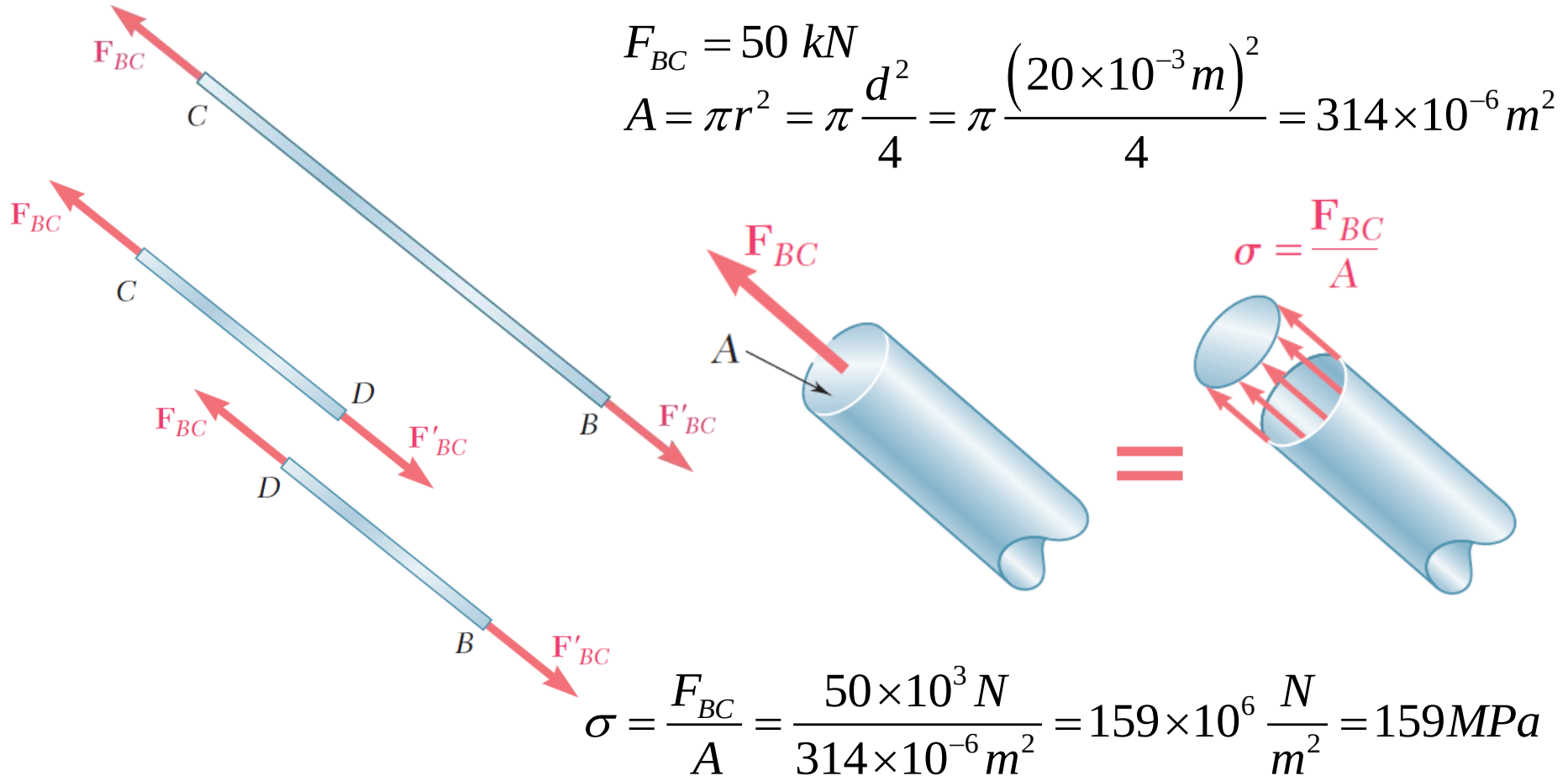
***από ισορροπία κόμβου B**



Ράβδος-Στοιχείο δύο δυνάμεων:

1. Ευθύγραμμο στοιχείο.
2. Τα φορτία εφαρμόζονται μόνο στα άκρα του.
3. Στηρίζεται με αρθρώσεις στα άκρα του.

Έννοια της Αξονικής Τάσης:



The diagram illustrates the concept of normal stress in a bar under tension. It shows a bar with points C, D, and B. Forces F_{BC} and F'_{BC} are applied at these points. A cross-section A is shown, and the stress distribution is represented by red arrows pointing outwards from the section. The stress is defined as $\sigma = \frac{F_{BC}}{A}$.

$$F_{BC} = 50 \text{ kN}$$
$$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(20 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$
$$\sigma = \frac{F_{BC}}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 159 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 159 \text{ MPa}$$

Μονάδες τάσης (SI):

$$\frac{N}{m^2} = \text{Pascal (Pa)}$$

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \frac{N}{m^2} = \dots$$

$$= 10^6 \frac{N}{(10^3 \text{ mm})^2} = \cancel{10^6} \frac{N}{\cancel{10^6} \text{ mm}^2} = 1 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Πρόβλημα Σχεδιασμού δομικού μέλους:

Έστω ράβδος BC από χάλυβα με μέγιστη οριακή τάση $\sigma_u = 165 \text{ MPa}$ (ultimate stress).

Ερώτηση: Μπορεί η ράβδος να φέρει το φορτίο με ασφάλεια?

Απάντηση: $\sigma = 159 \text{ MPa} < \sigma_u = 165 \text{ MPa}$ (Ναι)

Εάν το υλικό της ράβδου ήταν από αλουμίνιο με $\sigma_u = 100 \text{ MPa}$ πόσο θα πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου για να φέρει με ασφάλεια το φορτίο?

$$A > \frac{F_{BC}}{\sigma_u} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \text{ N/mm}^2} = 500 \text{ mm}^2 \Rightarrow d = 2r = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{500}{\pi}} = 25.2 \text{ mm}$$



Συντελεστής ασφαλείας

$$\text{Συντελεστή ασφαλείας} = F.S. = \frac{\text{οριακή τάση}}{\text{επιτρεπόμενη τάση}} = \frac{\sigma_u}{\sigma_{\varepsilon\pi}} > 1$$

Λόγοι χρήσης συντελεστή ασφαλείας:

1. Αβεβαιότητα στις μηχανικές ιδιότητες υλικών.
2. Αβεβαιότητα στις φορτίσεις.
3. Αβεβαιότητα στην ανάλυση (προσεγγίσεις, απλοποιήσεις).
4. Ελλιπής συντήρηση και αποσύνθεση κατασκευής λόγω γήρανσης.



Πρόβλημα σχεδιασμού με συντελεστή ασφαλείας

$$\text{Συντελεστή ασφαλείας} = F.S. = \frac{\text{οριακή τάση}}{\text{επιτρεπόμενη τάση}} = \frac{\sigma_u}{\sigma_{\varepsilon\pi}} > 1$$

Έστω ράβδος BC από χάλυβα.

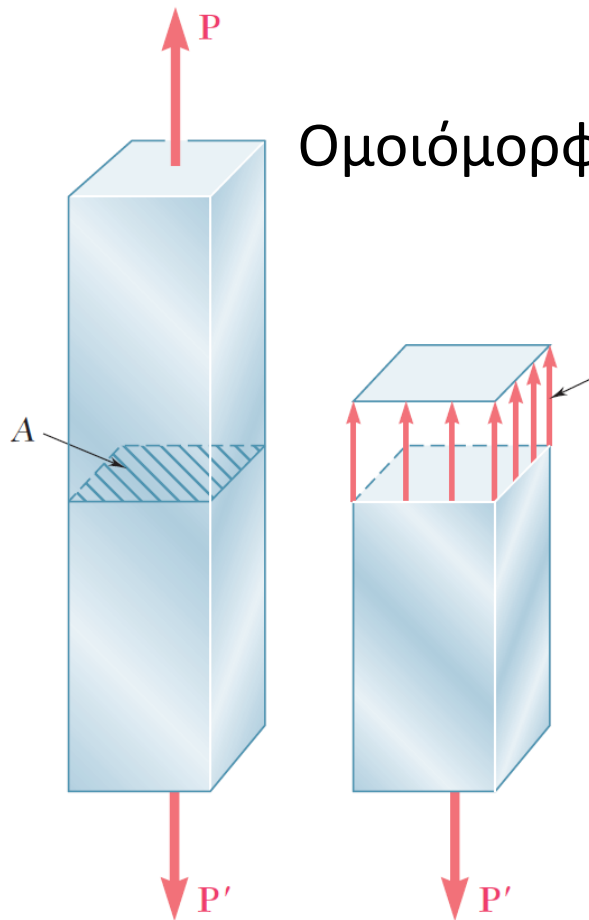
Ερώτηση: Πόσο θα πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου για την οποία ο συντελεστής ασφαλείας ως προς την αστοχία να είναι 3.

Απάντηση: $\sigma_{\varepsilon\pi} = \sigma_u / F.S. = 165 \text{ MPa} / 3 = 55 \text{ MPa}$

$$A > \frac{F_{BC}}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{55 \text{ N/mm}^2} \approx 910 \text{ mm}^2 \Rightarrow d = 2r = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{910}{\pi}} \approx 34.1 \text{ mm}$$

Ομοιόμορφη κατανομή τάσης

Ορθή τάση σε ένα μέλος υπό αξονική φόρτιση:



Ομοιόμορφη κατανομή τάσεων ➡

Η συνισταμένη δύναμη P διέρχεται από το κέντρο της εγκάρσιας διατομής

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \begin{array}{l} (+) \text{ εφελκυστική} \\ (-) \text{ θλιπτική} \end{array}$$

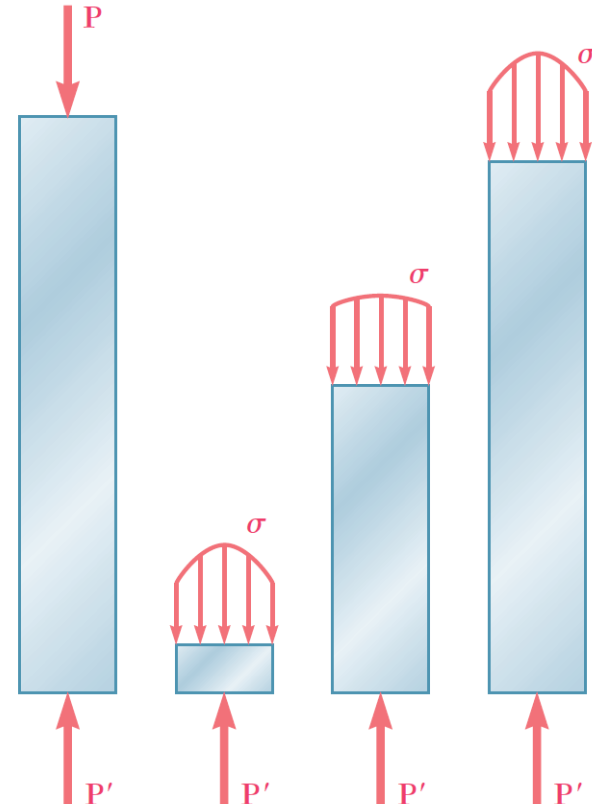
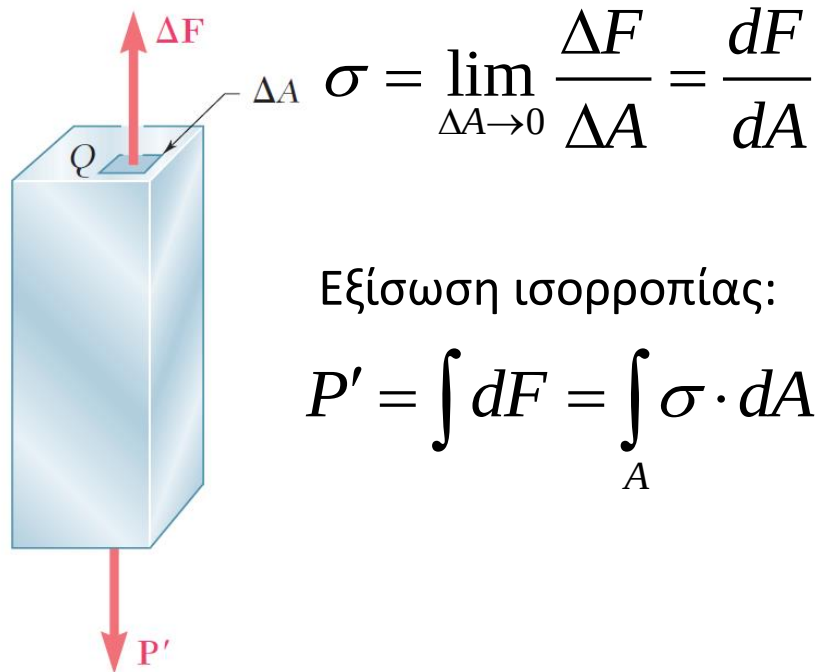


Ορθή τάση σ = Δύναμη P ανά μονάδα εμβαδού A ή η ένταση των δυνάμεων που κατανέμονται σε μια δεδομένη διατομή.

Ανομοιόμορφη κατανομή τάσης

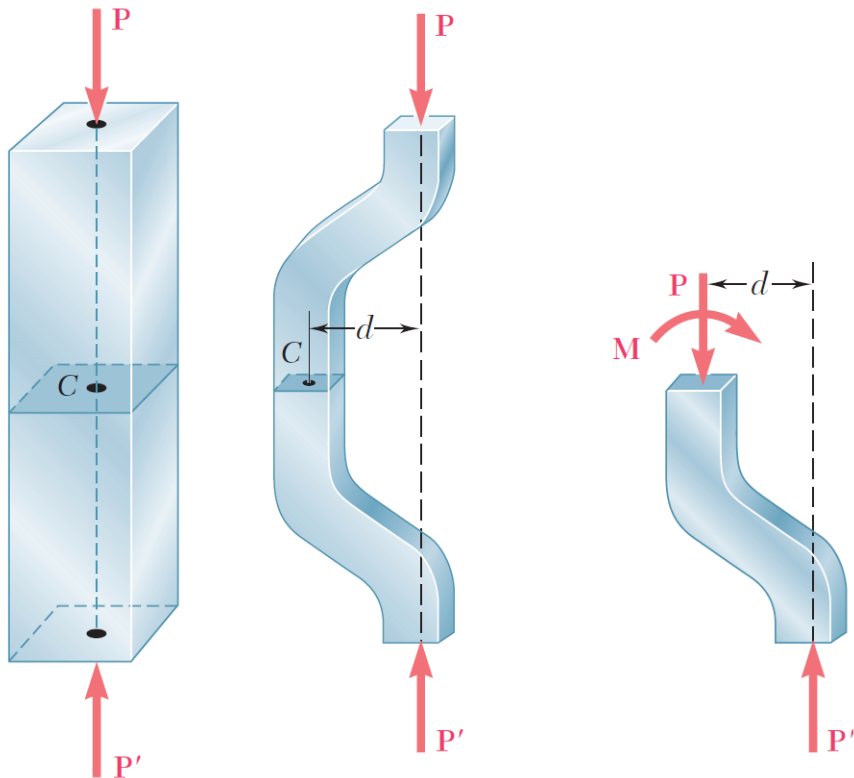
Υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής τάσεων

Αρχή του Saint Venant:



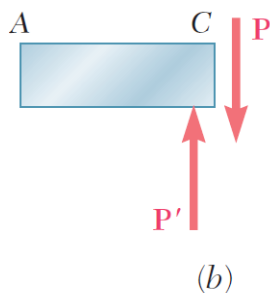
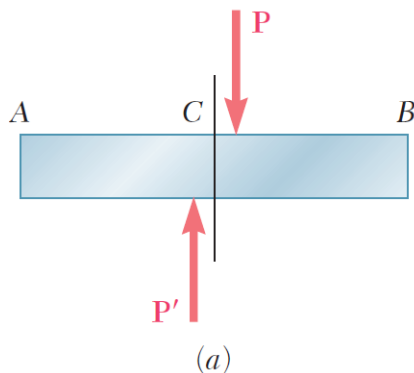
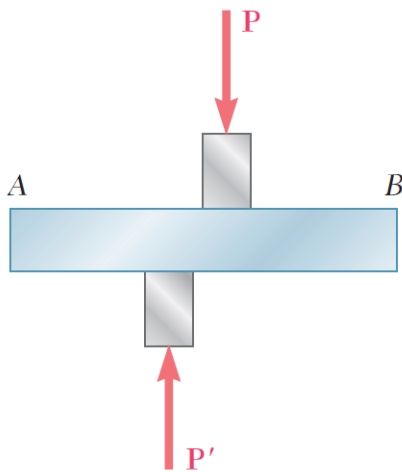
Κατανομές τάσης σε διαφορετικές διατομές
κατά μήκος αξονικά φορτισμένου μέλους

Κεντρική και έκκεντρη φόρτιση



Κεντρική φόρτιση: Η διεύθυνση του φορτίου P διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο C της διατομής. Ομοιόμορφη κατανομή τάσεων. Ράβδοι δικτυωμάτων.

Έκκεντρη φόρτιση: Οι εσωτερικές δυνάμεις σε μια διατομή είναι ισοδύναμες με μια κεντρική δύναμη P και μια ροπή $M = Pd$. Ανομοιόμορφη κατανομή τάσεων.

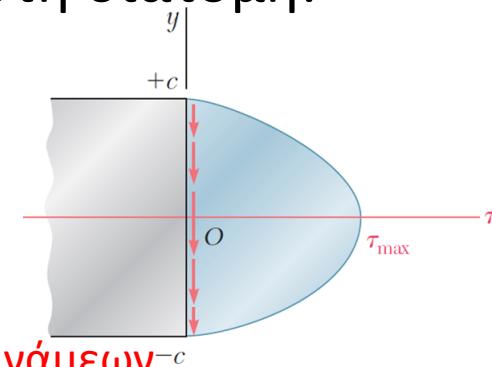


Αντίθετα εγκάρσια φορτία δημιουργούν διάτμηση στο μέλος AB

Εσωτερική διατμητική δύναμη στη διατομή ανάμεσα στα εγκάρσια φορτία. Η συνισταμένη των εσωτερικών διατμητικών δυνάμεων είναι η τέμνουσα δύναμη στη διατομή $V=P$.

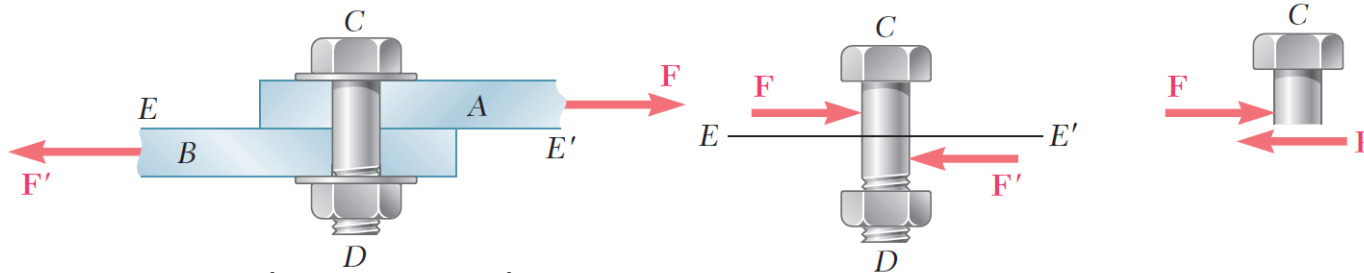
Μέση διατμητική τάση στη διατομή:

$$\bar{\tau} = \frac{V}{A} = \frac{P}{A}$$



***ανομοιόμορφη κατανομή διατμητικών δυνάμεων**

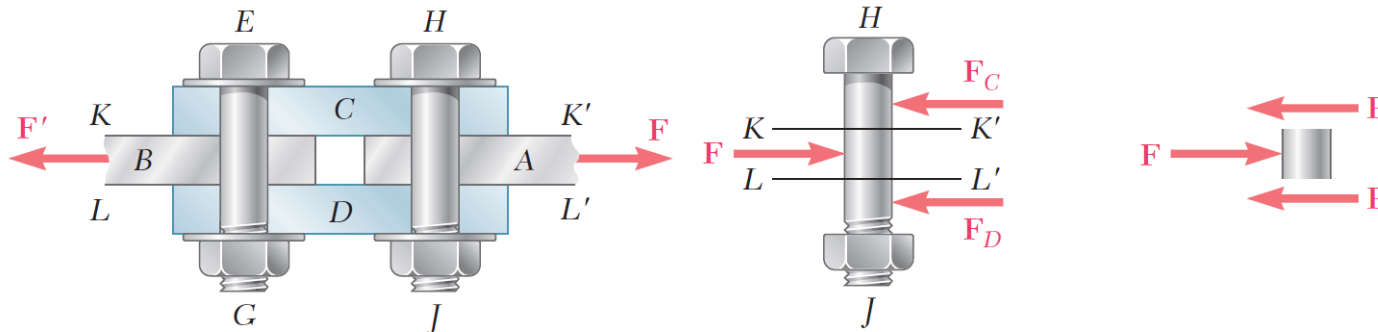
Διατμητική τάση σε κοχλία



A, B πλάκες συνδεδεμένες με κοχλία CD

Κοχλίας υπό απλή διάτμηση:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

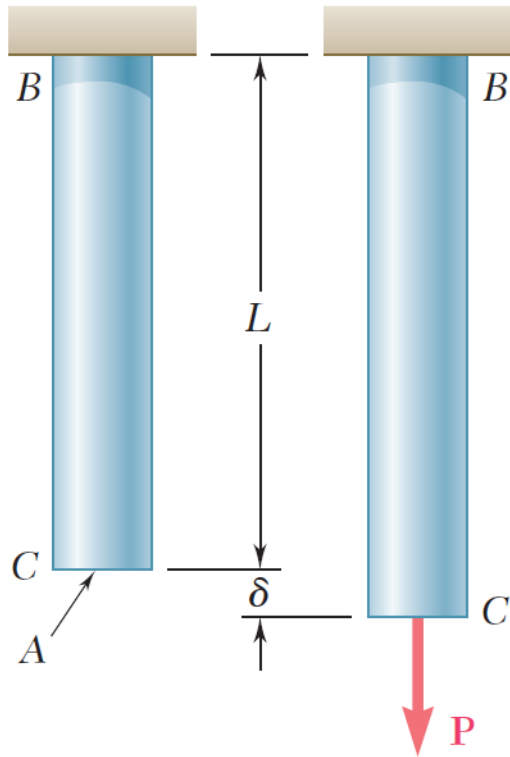


C, D συνδετικές λάμες

Κοχλίας υπό διπλή διάτμηση:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{F / 2}{A} = \frac{F}{2A}$$

Ορθή τροπή υπό αξονικό φορτίο



Ράβδος BC αρχικού μήκους L και ομοιόμορφης εγκάρσιας διατομής εμβαδού A επιμηκύνεται υπό την επίδραση του αξονικού φορτίου P κατά το μήκος δ .

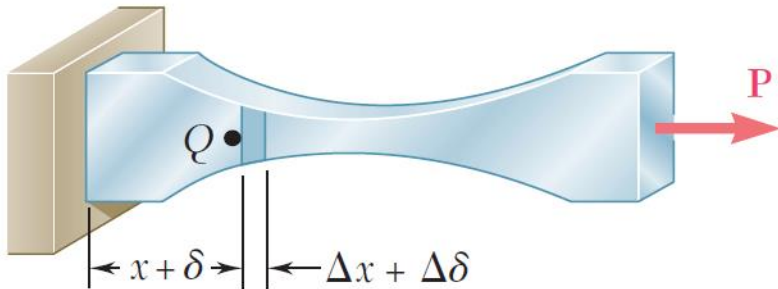
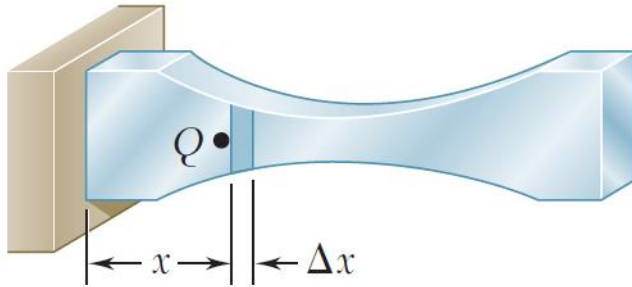
Ορθή τροπή: $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$

Παραμόρφωση ανά μονάδα μήκους (ανηγμένη παραμόρφωση)

*Η τροπή είναι ένα αδιάστατο μέγεθος

Ορθή τροπή υπό αξονικό φορτίο σε μέλος με μεταβλητή διατομή

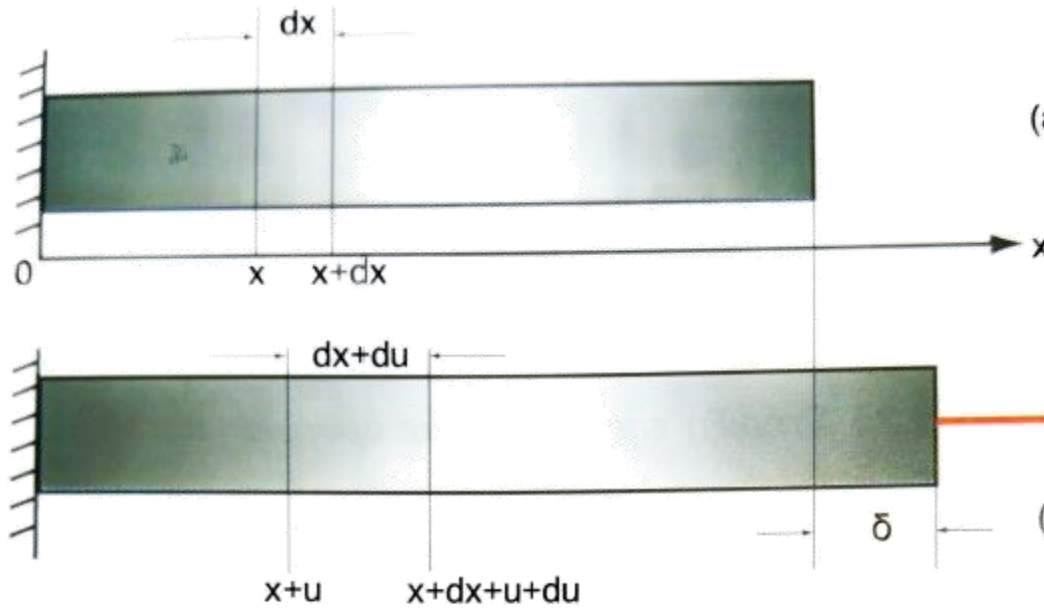
Παραμόρφωση $\Delta\delta$ του στοιχειώδους τμήματος Δx ενός αξονικά φορτισμένου μέλους με μεταβλητό εμβαδό εγκάρσιας διατομής.



Ορθή τροπή στο σημείο Q:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

Ορθή τροπή υπό αξονικό φορτίο



$$(a) \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

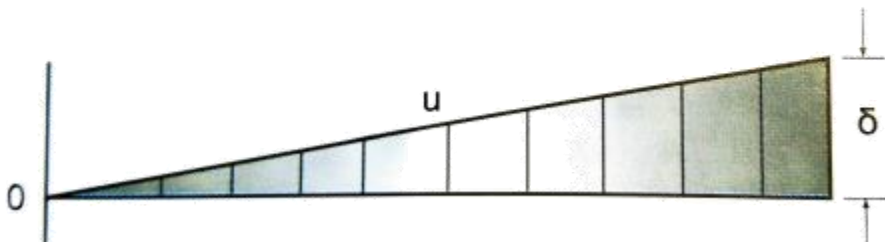
$$\tilde{\varepsilon} = \frac{du}{dx+du} = \frac{du/dx}{1+du/dx}$$

$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\text{for } |\varepsilon| \ll 1 \Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$$

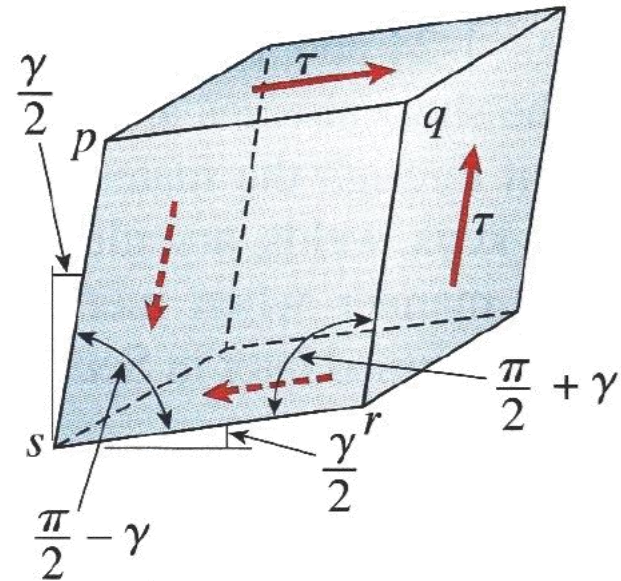
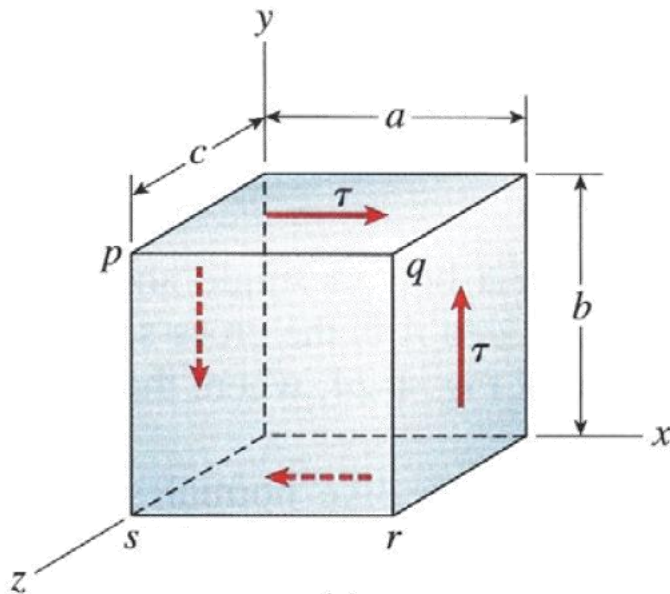
$$du = \varepsilon dx \Rightarrow \int du = \varepsilon \int dx$$

$$(c) \quad \Rightarrow u(x) - u(0) = \varepsilon \cdot x$$



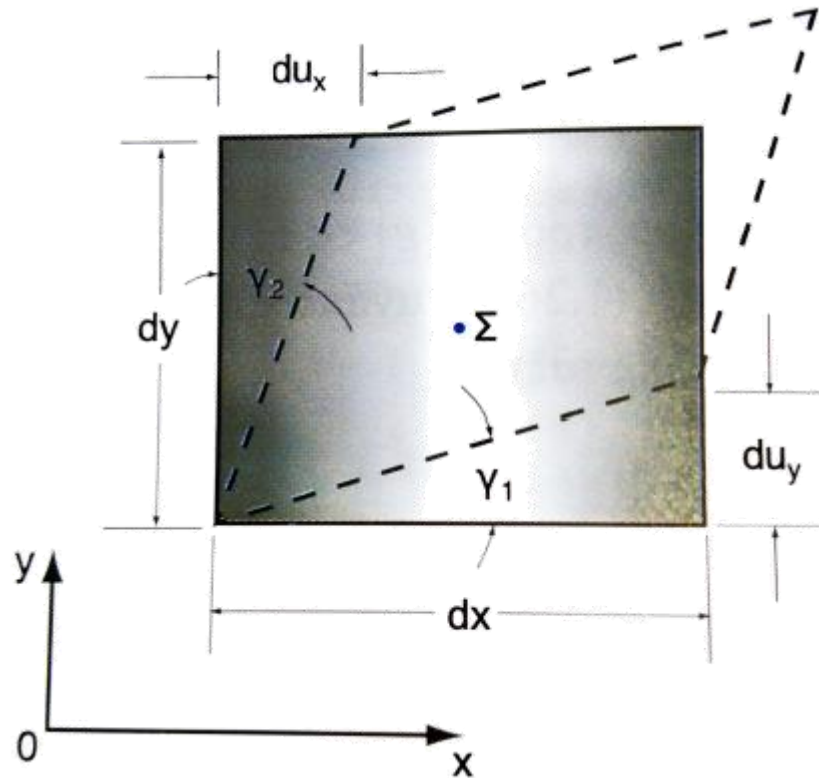
$$\text{Εάν } u(0)=0 \text{ τότε } u(x)=\varepsilon x, \text{ στη θέση } x=L, \delta = u(L) - u(0) = \varepsilon \cdot L \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Διατμητική τροπή



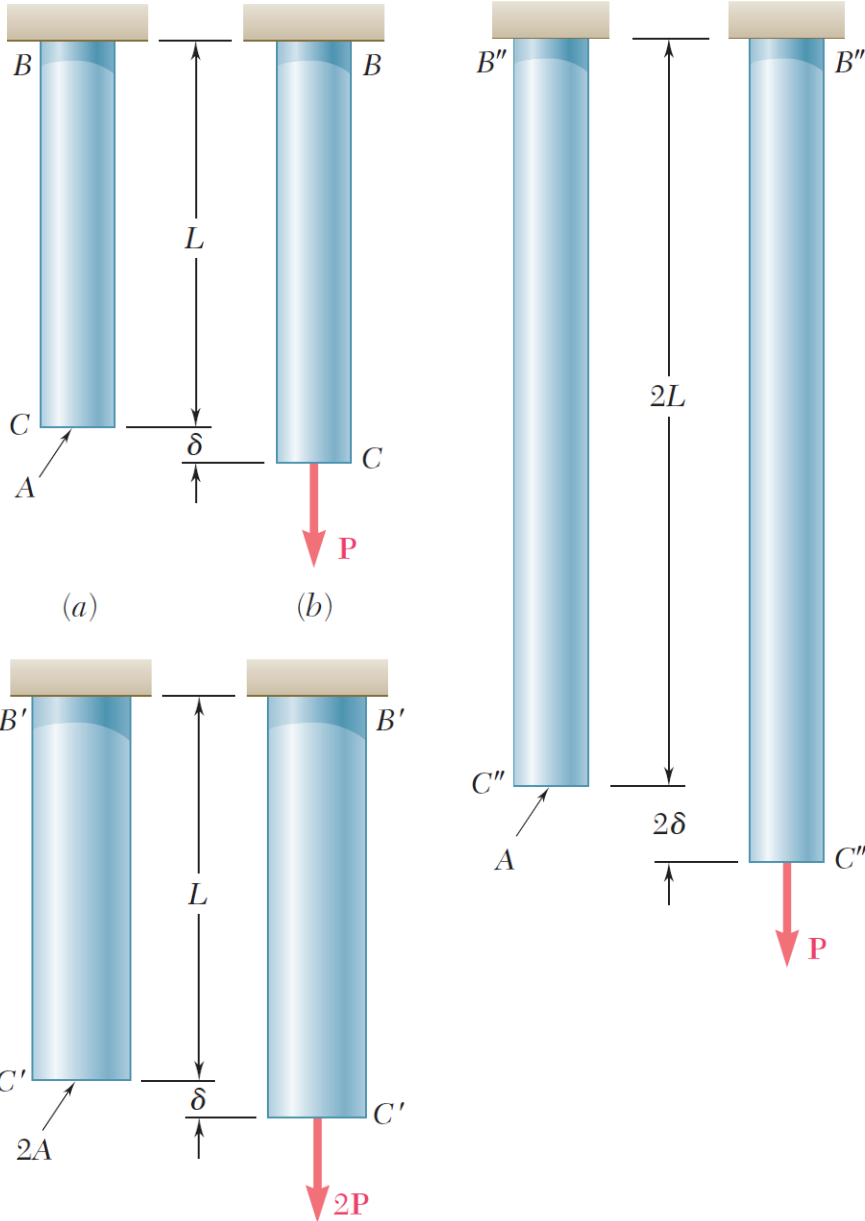
- Οι διατμητικές τάσεις τ προκαλούν αλλαγή μόνο στο σχήμα του στοιχειώδους κύβου, όχι παραμόρφωση των επιπέδων (τα μήκη των πλευρών παραμένουν ίδια), αλλαγή στις γωνίες του κύβου μόνο.
- Γωνίες στους κόμβους s και q μειώνονται από $\pi/2$ σε $\pi/2 - \gamma$.
- Γωνίες στους κόμβους p και r αυξάνονται από $\pi/2$ σε $\pi/2 + \gamma$.
- Γωνία διάτμησης ή διατμητική τροπή γ .
- Συμβάσεις προσήμων για διατμητική τάση και τροπή. (π.χ τ_{xy} , γ_{xy})

Διατμητική τροπή



$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_2 + \gamma_1 \approx \tan \gamma_2 + \tan \gamma_1 = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Έννοιες τάσης και τροπής



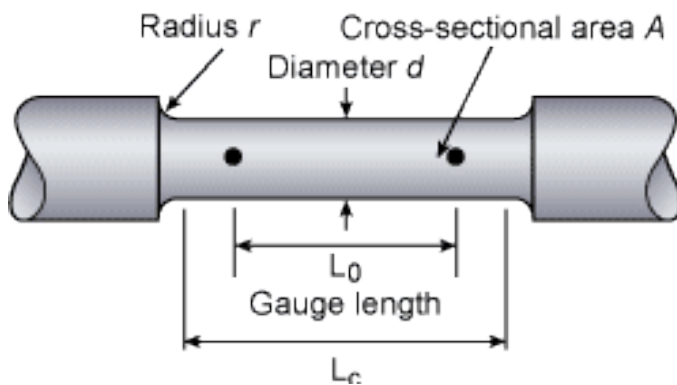
Για την παραμόρφωση δ μια ράβδου με εμβαδόν διατομής A απαιτείται η επίδραση φορτίου P . Εάν διπλασιάσουμε το εμβαδόν της ράβδου για να πετύχουμε την ίδια παραμόρφωση δ απαιτείται διπλάσιο φορτίο. Η τάση όμως είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις ανεξάρτητη από τη γεωμετρία της ράβδου.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2P}{2A}$$

Όταν διπλασιάζεται το μήκος της ράβδου υπό την επίδραση του φορτίου P διπλασιάζεται και η παραμόρφωση 2δ . Η τροπή όμως παραμένει σταθερή.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{2\delta}{2L}$$

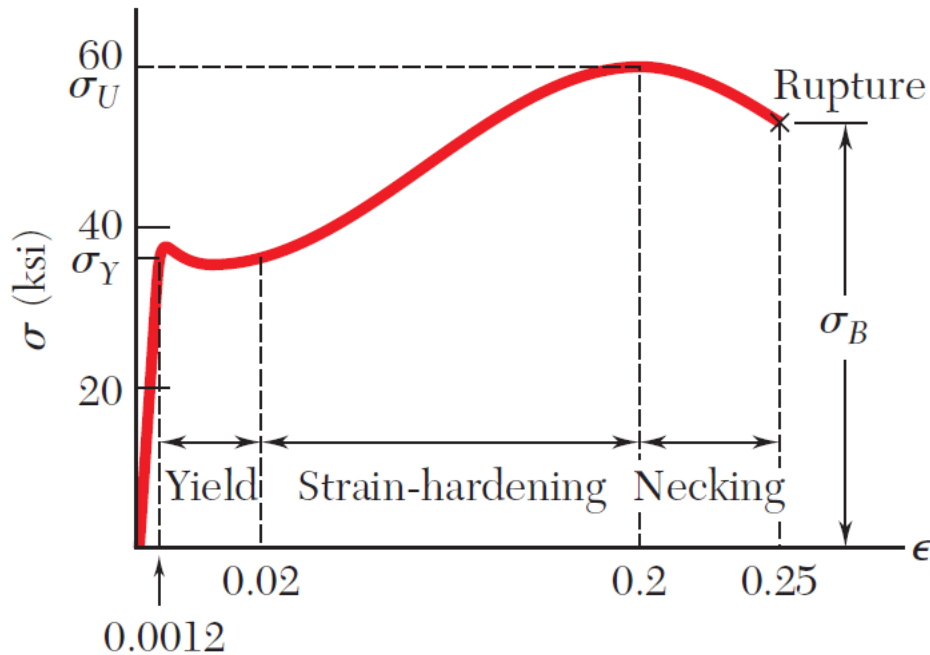
Πείραμα εφελκυσμού



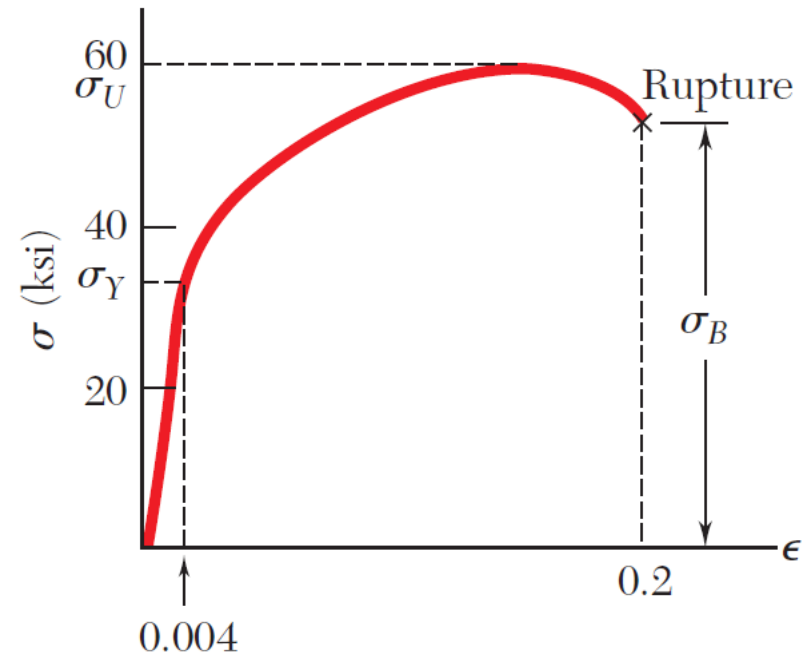
- Μηχανή εφελκυσμού εφαρμόζει κεντρικό φορτίο P (ή σταθερό ρυθμό παραμόρφωσης)
- Δοκίμιο υλικού κυκλικής διατομής με δείκτη μήκους (gauge length) L_0
- Μηκυνσιόμετρο για καταγραφή της επιμήκυνσης $\delta = L - L_0$
- Καταγραφικό ενδείξεων ζεύγους (P, δ)

* Συνθήκες διεξαγωγής πειράματος, $T = 25^\circ\text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$

Διαγράμματα τάσεων-τροπών όλκιμων υλικών



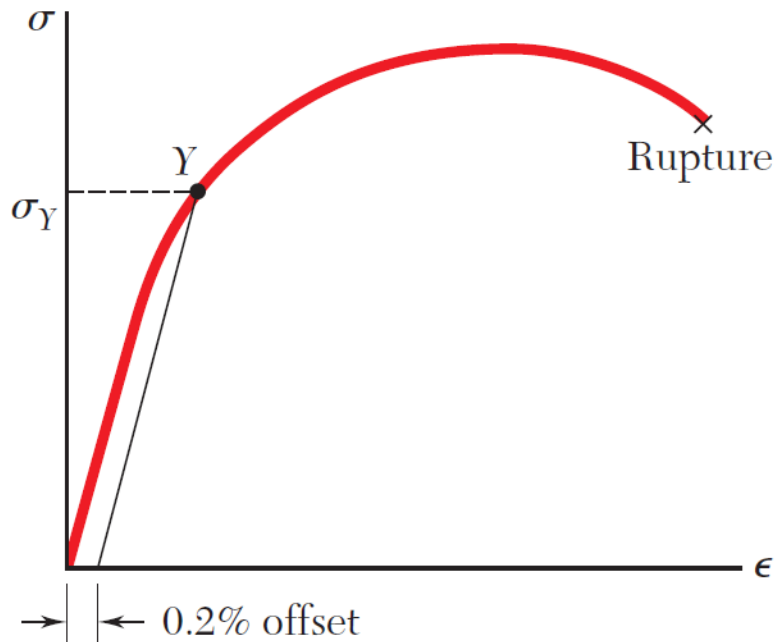
α) Χάλυβας χαμηλής περιεκτικότητας σε άνθρακα



β) Κράμα αλουμινίου

Όλκιμα υλικά: ικανότητα τους να διαρρέουν σε κανονικές θερμοκρασίες Τροπική σκλήρυνση. Σχηματισμός λαιμού (ολίσθηση σε πλάγιες επιφάνειες), κωνική επιφάνεια θραύσης (κώνου-κρατήρα), θραύση λόγω διατμητικών τάσεων, χαρακτηριστικά σημεία διαγράμματος σ_Y (τάση διαρροής), σ_U (οριακή τάση), σ_B (τάση θραύσης)

Προσδιορισμός σημείου διαρροής-Μέτρα Ολκιμότητας



*Προσδιορισμός του σημείου
διαρροής με τη μέθοδο της 0.2%
μόνιμης τροπής*

Πρότυπα μέτρα ολκιμότητας

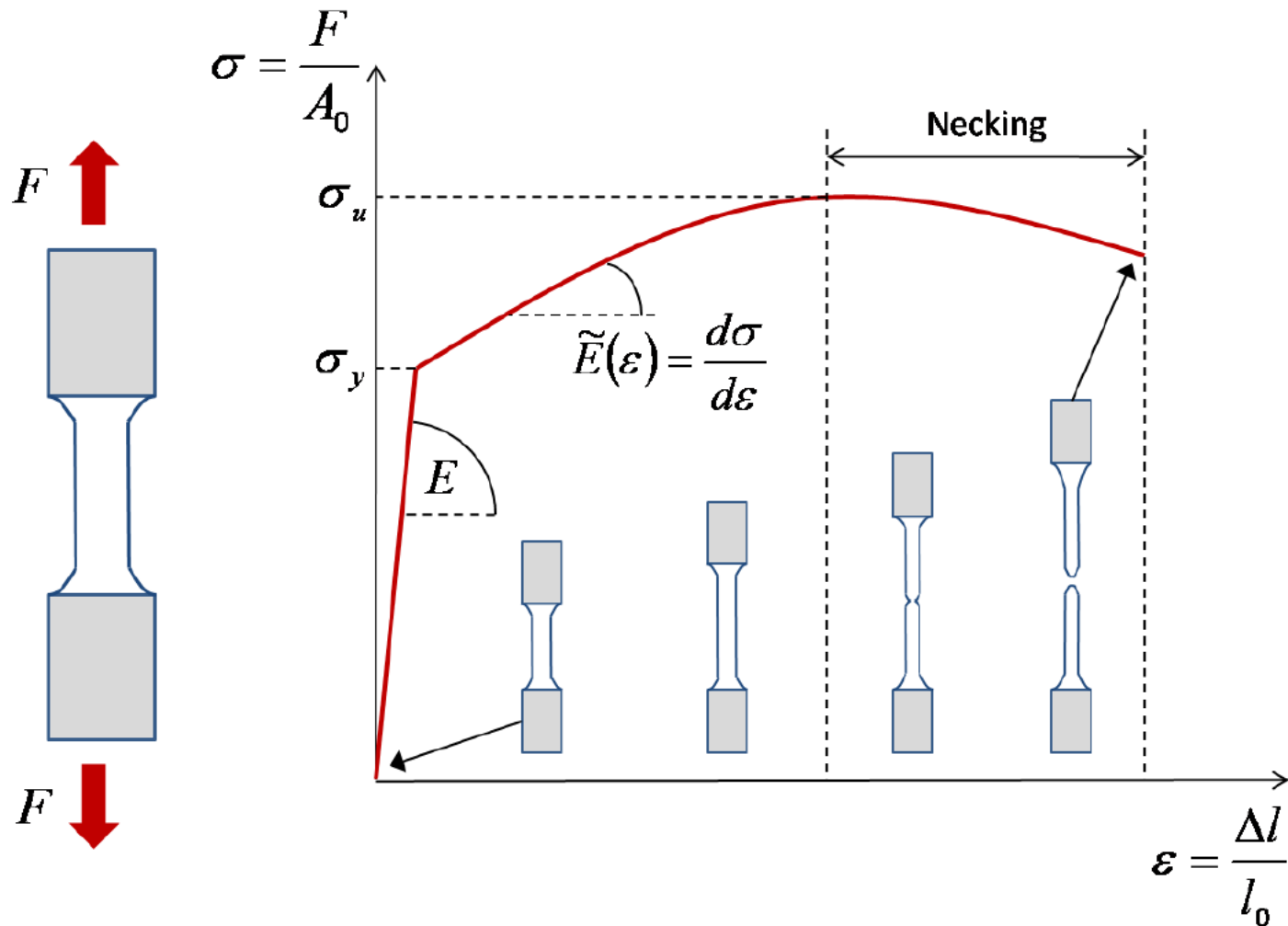
Εκατοστιαία επιμήκυνση:

$$100 \frac{L_B - L_0}{L_0}$$

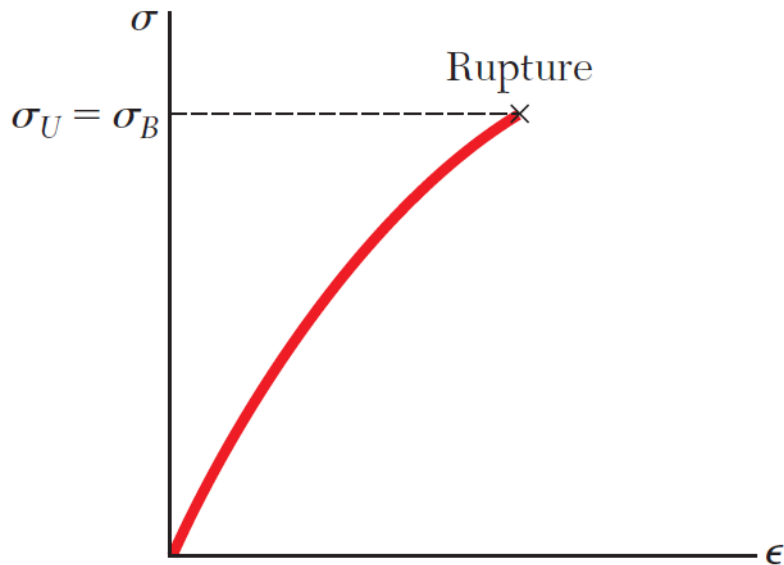
Εκατοστιαία μείωση του εμβαδού:

$$100 \frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

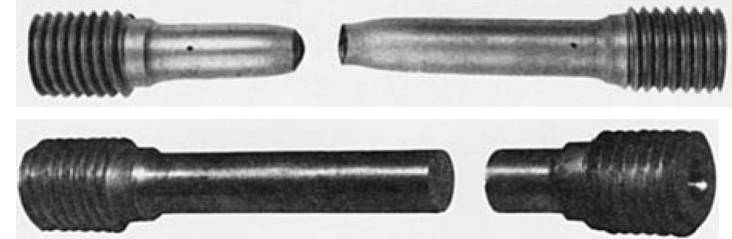
Πείραμα εφελκυσμού δε δοκίμιο από όλκιμο υλικό



Διάγραμμα τάσεων-τροπών ψαθυρού υλικού



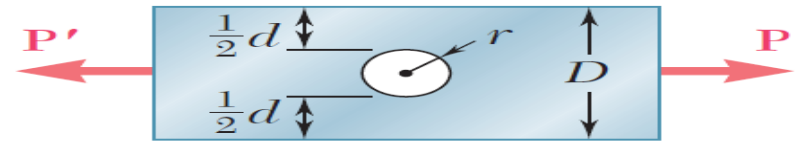
γ) Τυπικό διάγραμμα σ - ϵ ψαθυρού υλικού
(χυτοσίδηρος, γυαλί, πέτρα)



Διαφορές επιφανειών θραύσης
όλκιμων και ψαθυρών υλικών

Ψαθυρά υλικά: η θραύση λαμβάνει χώρα χωρίς κάποια σημαντική αλλαγή στο ρυθμό επιμήκυνσης, $\sigma_U = \sigma_B$, υψηλότερη οριακή τάση και πολύ μικρότερη τροπή στο σημείο της θραύσης σε σχέση με τα όλκιμα υλικά, επιφάνεια θραύσης κάθετη στο φορτίο (κοκκώδη μορφολογία), θραύση λόγω ορθών τάσεων

Συγκεντρώσεις τάσεων σε ρωγμές



Συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων:

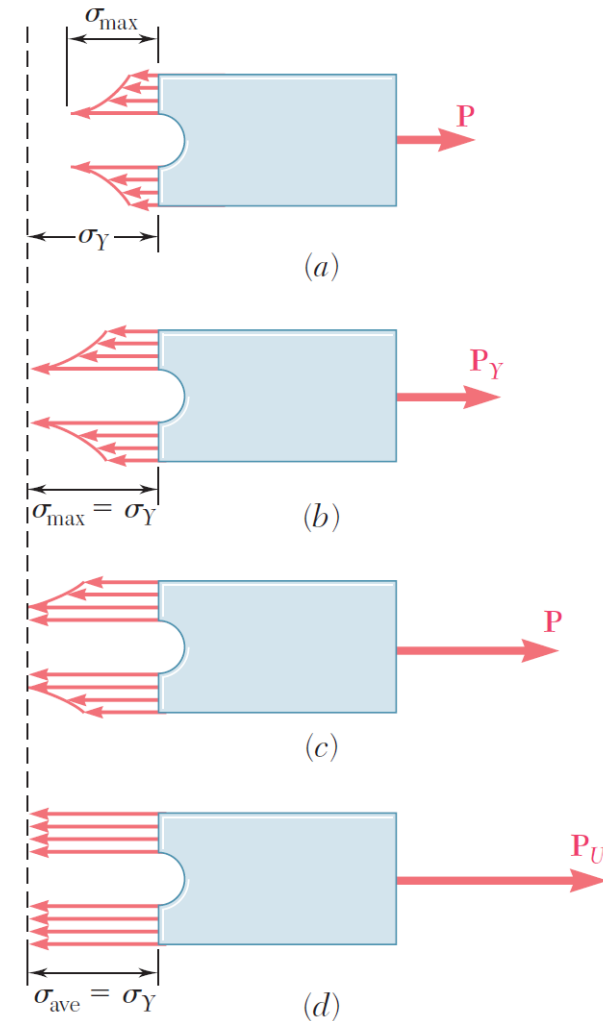
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ave}}$$

$$P = \sigma_{ave} A = \frac{\sigma_{\max} A}{K}, \text{ για } \sigma_{\max} < \sigma_Y$$

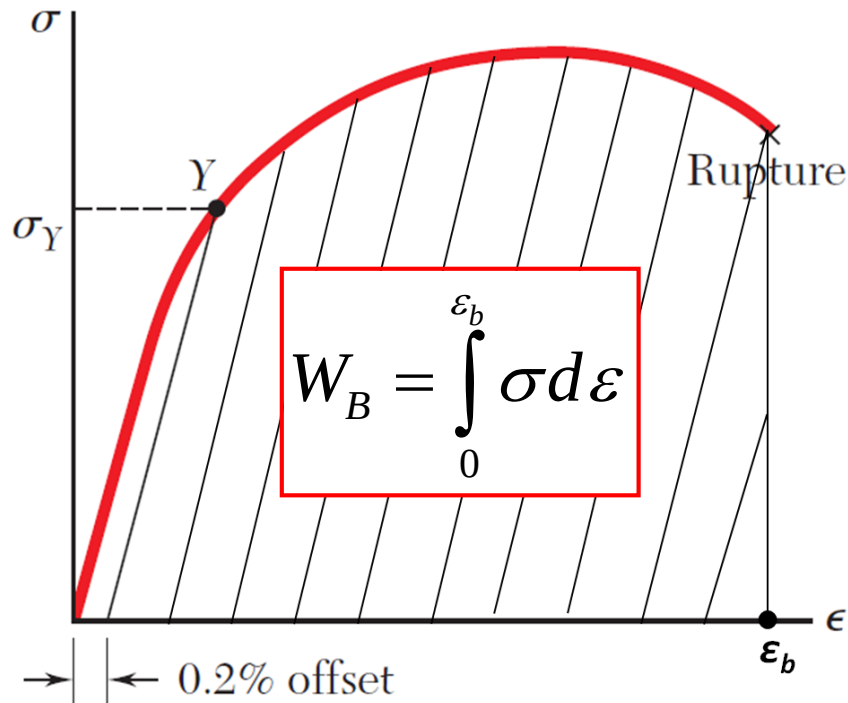
$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K}, \text{ για } \sigma_{\max} = \sigma_Y$$

$$P_U = \sigma_Y A, \text{ για } \sigma_{ave} = \sigma_Y$$

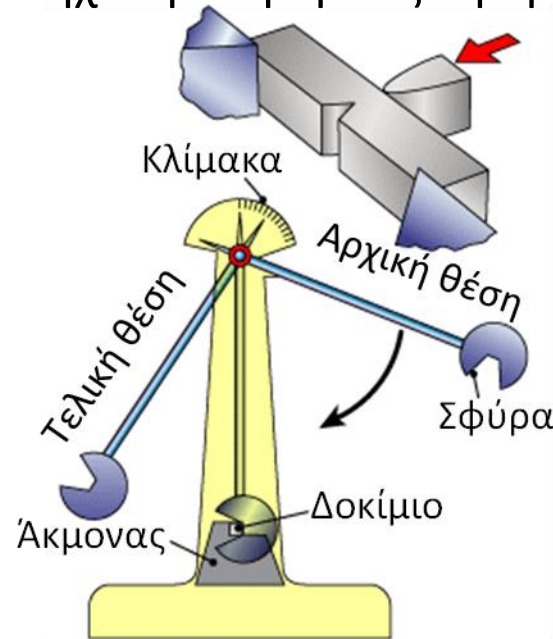
$$\Rightarrow P_Y = \frac{P_U}{K}$$



Δυσθραυστότητα (fracture toughness)



Μηχανή εκκρεμούς σφύρας



- δοκιμή Charpy
- δοκιμή Izod

Μέτρηση του
απαιτούμενου για
τη θραύση
μηχανικού έργου
(Joule)

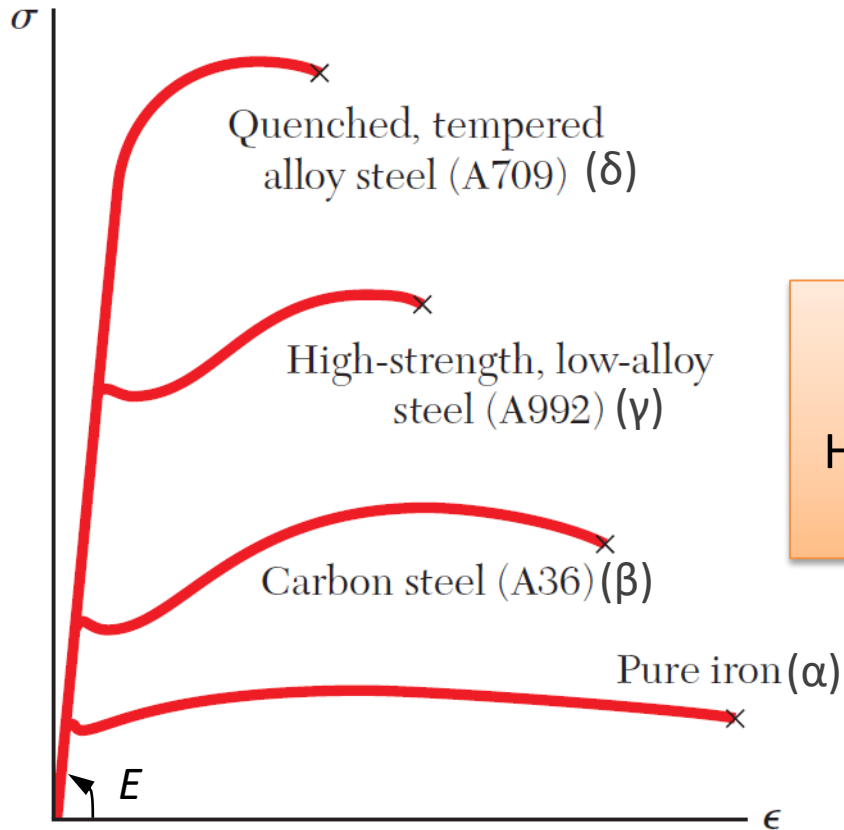
Τα όλκιμα υλικά απορροφούν μεγαλύτερα ποσά ενέργειας κατά τις πρότυπες δοκιμές κρούσης, χαρακτηρίζονται δηλαδή από υψηλή δυσθραυστότητα σε σχέση με τα ψαθυρά υλικά που σπάζουν εύκολα.

Εισαγωγικές έννοιες- Νόμος του Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$

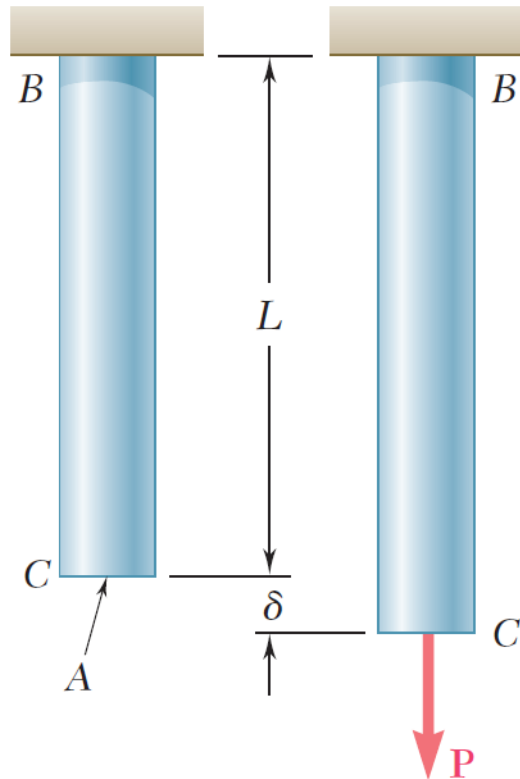
E : Μέτρο ελαστικότητας υλικού
(*Young's modulus*) σε Pa

Η μέγιστη τιμή της τάσης για την οποία
μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο νόμος του
Hooke για δεδομένο υλικό είναι γνωστή ως
όριο αναλογίας



$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$$

Εισαγωγικές έννοιες- Εύρεση παραμόρφωσης

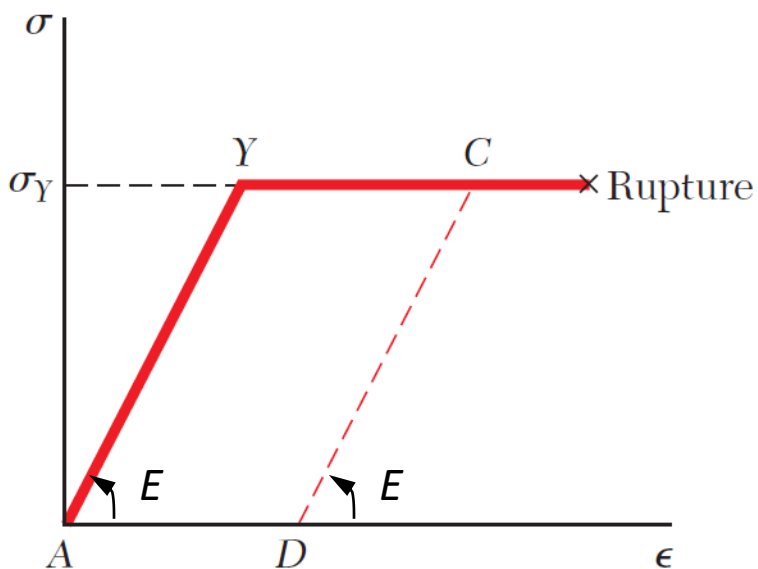


Εφαρμογή: Έστω ράβδος BC αρχικού μήκους $L=500\text{mm}$, κυκλικής διατομής διαμέτρου $d=10\text{mm}$ κατασκευασμένη από χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας $E=200\text{GPa}$. Να υπολογιστεί η παραμόρφωση της ράβδου υπό την επίδραση του αξονικού φορτίου $P=10\text{kN}$.

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{10 \times 10^3 \text{ N} \cdot 0.5 \text{ m}}{\pi \frac{0.01^2}{4} \text{ m}^2 \cdot 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{4 \cdot 10^4}{4\pi \cdot 10^7} \text{ m} = 0.318 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.318 \text{ mm}$$

Πλαστικές παραμορφώσεις

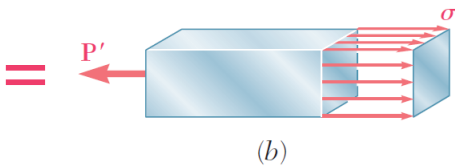
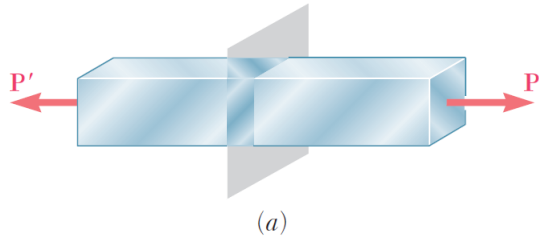


Εξιδανικευμένο ελαστοπλαστικό υλικό

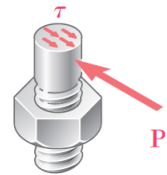
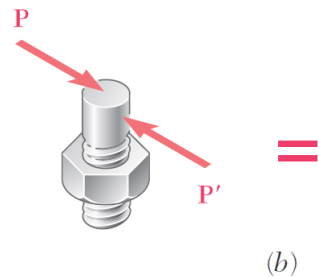
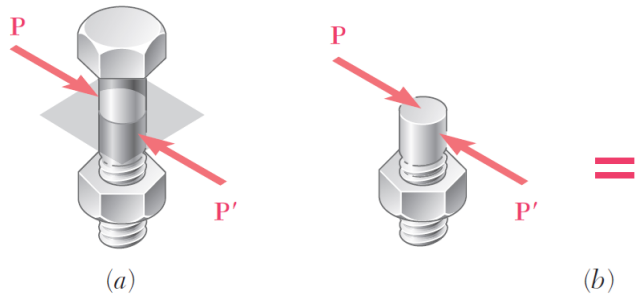
- Για $\sigma < \sigma_Y$ ελαστική περιοχή (ισχύει ο νόμος του Hooke $\sigma = E\epsilon$)
- Για $\sigma = \sigma_Y$ πλαστική παραμόρφωση υπό την επίδραση σταθερού φορτίου
- Μετά την αποφόρτιση από το σημείο C το υλικό επιστρέφει στο σημείο D με κλίση όσο η αρχική (E) και παραμένουσα παραμόρφωση AD

$$\epsilon_{AD} = \epsilon_{AC} - \epsilon_{DC}$$

Τάσεις σε εγκάρσια επίπεδα του μέλους

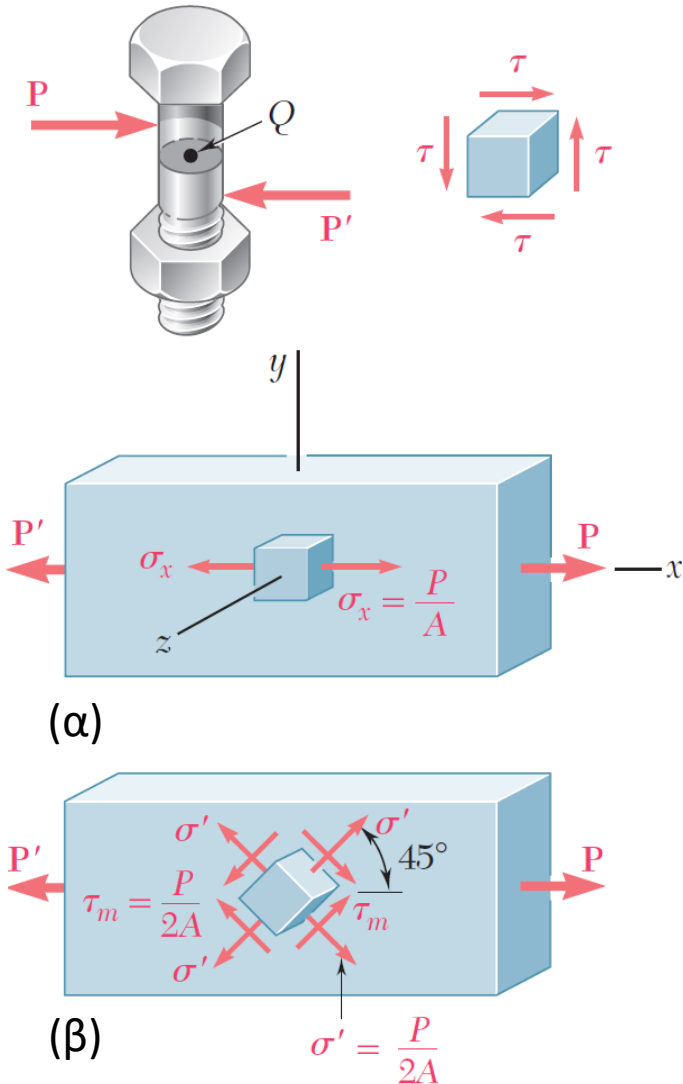


Αξονικές δυνάμεις σε ένα μέλος δύο δυνάμεων.
α) Επίπεδο διατομής κάθετο στο μέλος μακριά από την εφαρμογή του φορτίου. β) Ισοδύναμα μοντέλα διαγράμματος της συνισταμένης δύναμης που δρα στο γεωμετρικό κέντρο και της ομοιόμορφης ορθής τάσης.



α) Κοχλίας σε απλή διάτμηση στο επίπεδο διατομής κάθετο στον άξονα του κοχλία. β) Ισοδύναμα μοντέλα διαγράμματος συνισταμένης δύναμης που δρα στο γεωμετρικό κέντρο και της ομοιόμορφης μέσης διατμητικής τάσης.

Τάση σε δεδομένο σημείο



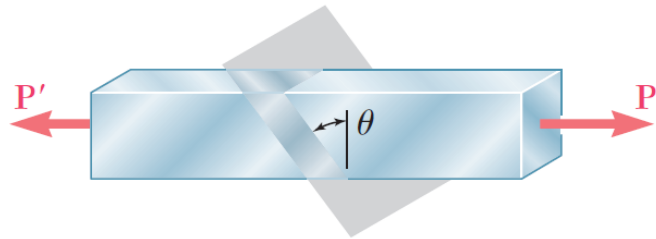
Κοχλίας σε απλή διάτμηση

Στο σημείο Q η διάτμηση λαμβάνει χώρα μόνο σε ένα επίπεδο, μια ίση διατμητική τάση ασκείται σε ένα δεύτερο επίπεδο κάθετο στο πρώτο.

Αξονική φόρτιση

Σε δεδομένο σημείο, ανάλογα με τον προσανατολισμό του στοιχείου που μελετάμε, οι ίδιες συνθήκες φόρτισης οδηγούν σε διαφορετικές ερμηνείες της εντατικής κατάστασης (α), (β).

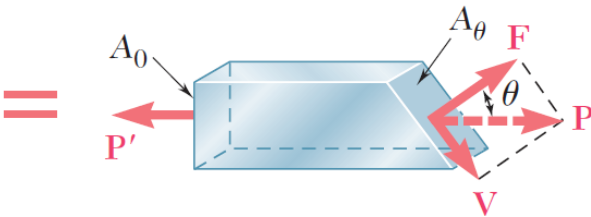
Τάση σε πλάγιο επίπεδο υπό αξονική φόρτιση



(a)



(b)



(c)

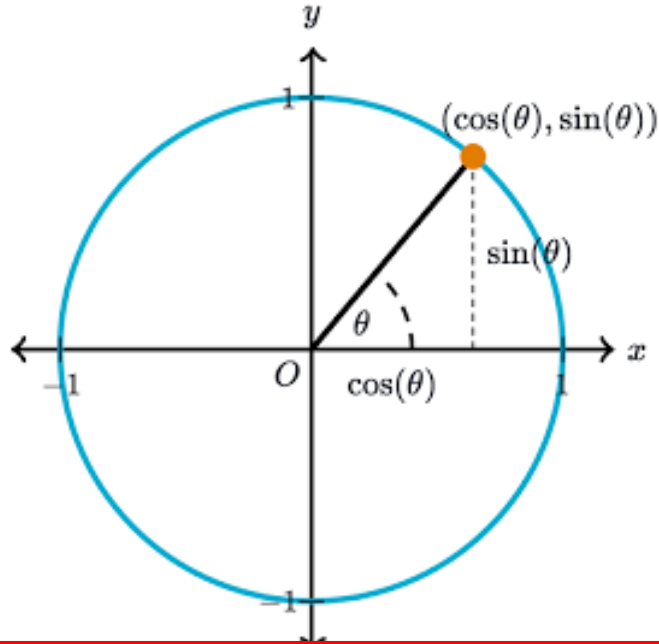


(d)

$$\sigma = \frac{F}{A_{\theta}}, \quad \tau = \frac{V}{A_{\theta}} \quad A_0 = A_{\theta} \cos \theta$$

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta} = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta = \frac{P}{2A_0} \sin(2\theta)$$



$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos(0^\circ) = 1, \sin(0^\circ) = 0$$

$$\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2, \sin(30^\circ) = 1/2$$

$$\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$$

$$\cos(60^\circ) = 1/2, \sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$$

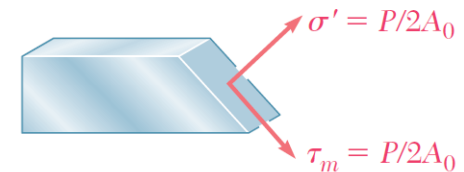
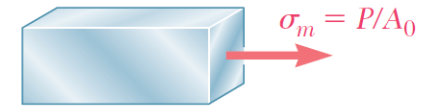
$$\cos(90^\circ) = 0, \sin(90^\circ) = 1$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta, \quad \tau = \frac{P}{2A_0} \sin(2\theta)$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \sigma = \sigma_{\max} = \frac{P}{A_0}, \quad \tau = 0$$

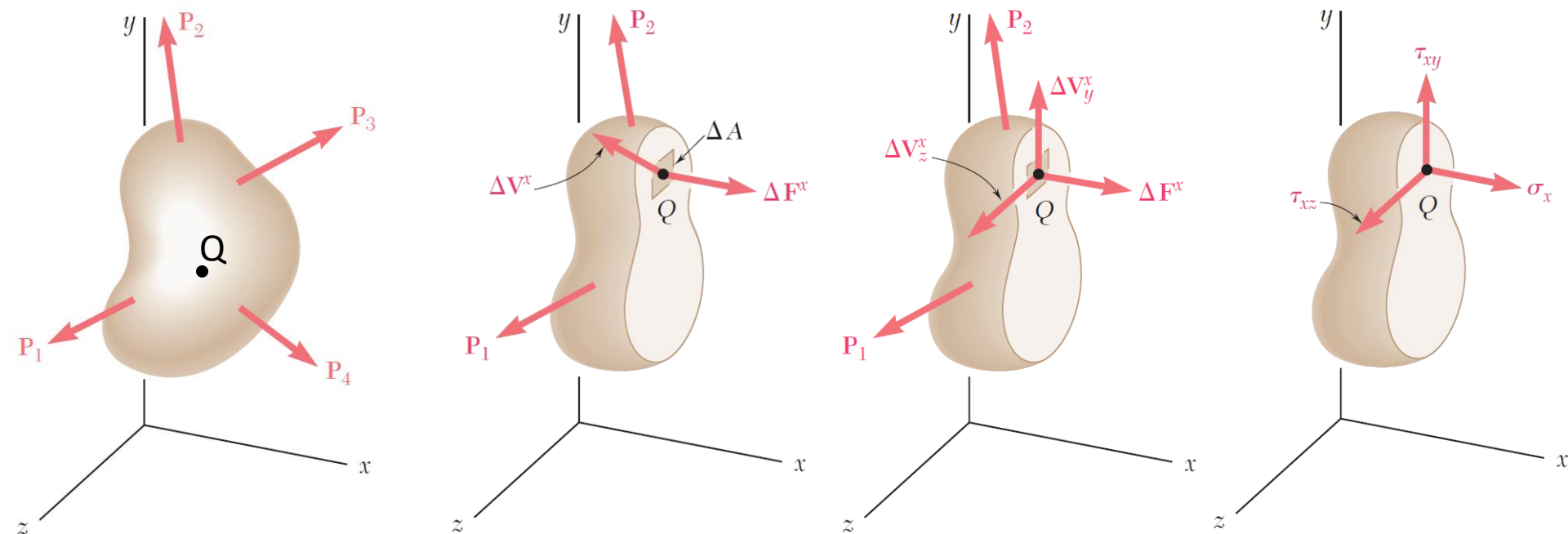
$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sigma = 0, \quad \tau = 0$$

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow \sigma = \frac{P}{2A_0}, \quad \tau = \tau_{\max} = \frac{P}{2A_0}$$





Τάση υπό γενικές συνθήκες φόρτισης

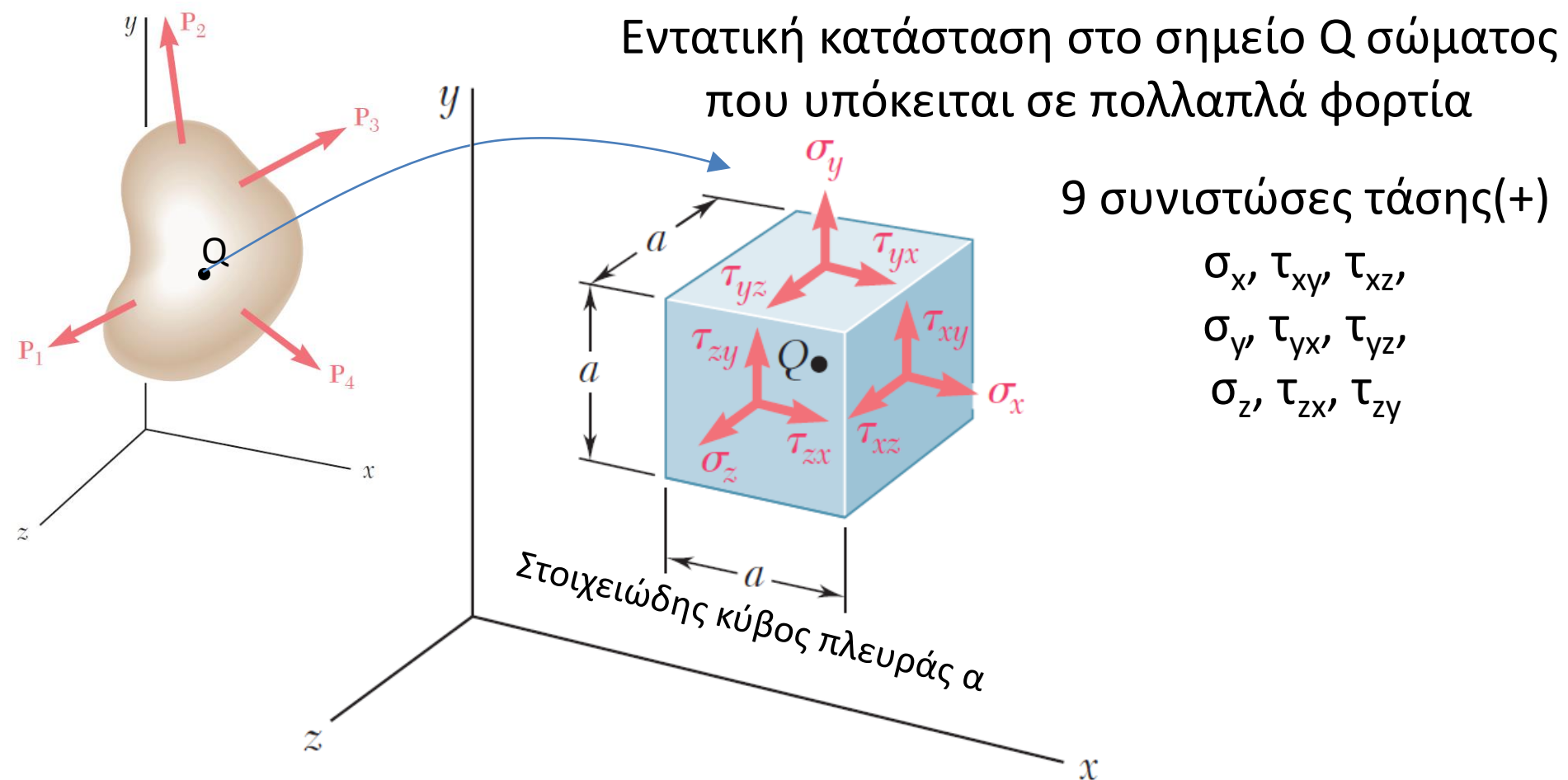


Τομή σε επίπεδο παράλληλο του yz

$$\Delta V^x = \Delta V_y^x + \Delta V_z^x$$

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

Τάση υπό γενικές συνθήκες φόρτισης

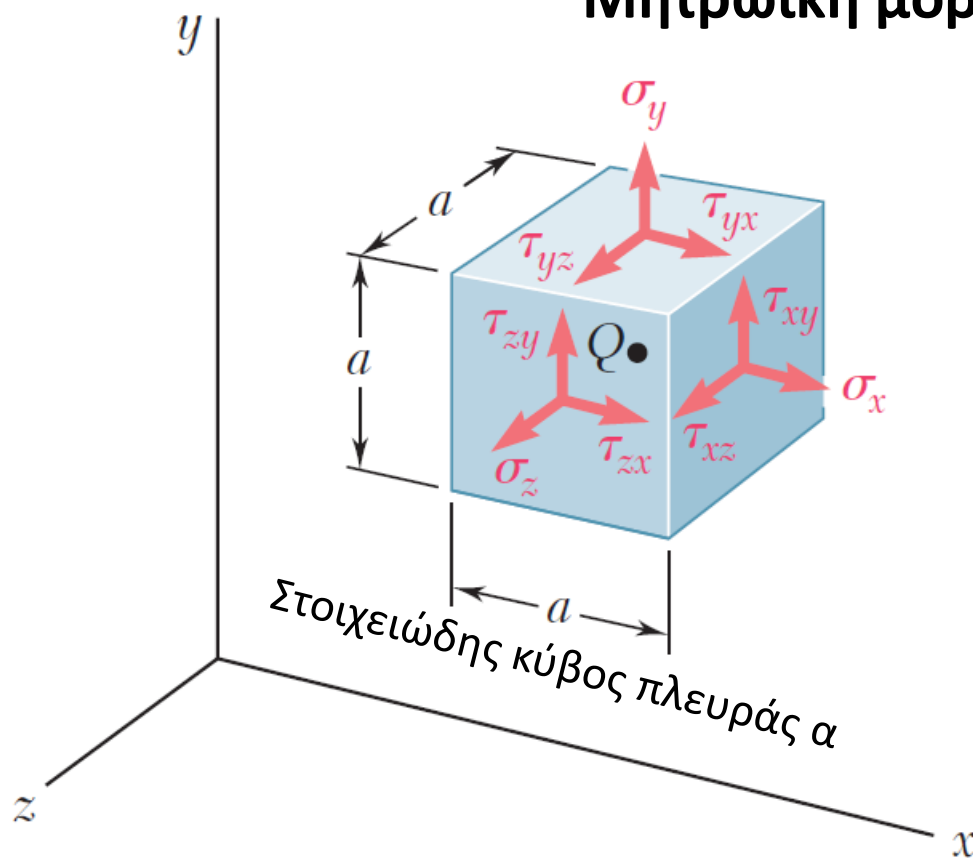


1^{ος} δείκτης δηλώνει το επίπεδο πάνω στο οποίο ασκούνται οι τάσεις

2^{ος} δείκτης δηλώνει τη διεύθυνση της συνιστώσας της τάσης

Τάση υπό γενικές συνθήκες φόρτισης

Μητρική μορφή τάσεων (τανυστής 2^{ης} τάξης)



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ή

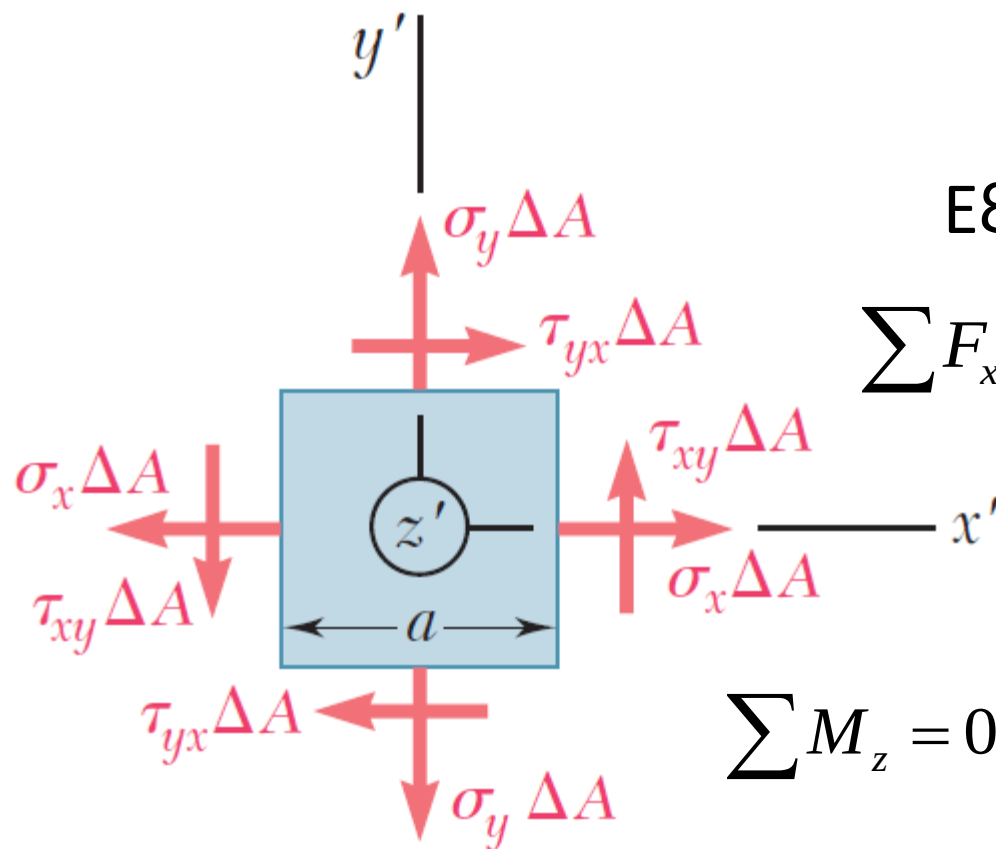
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = [\sigma]^T \text{ Συμμετρικό μητρώο}$$

$$\sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ and } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



Τάση υπό γενικές συνθήκες φόρτισης



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_z = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \cancel{\sum} \tau_{xy} \Delta A \cdot \frac{a}{\cancel{2}} - \cancel{\sum} \tau_{yx} \Delta A \cdot \frac{a}{\cancel{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Γενική εντατική κατάσταση: $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, 6 συνιστώσες τάσης

Τροπή υπό γενική φόρτιση

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3$$

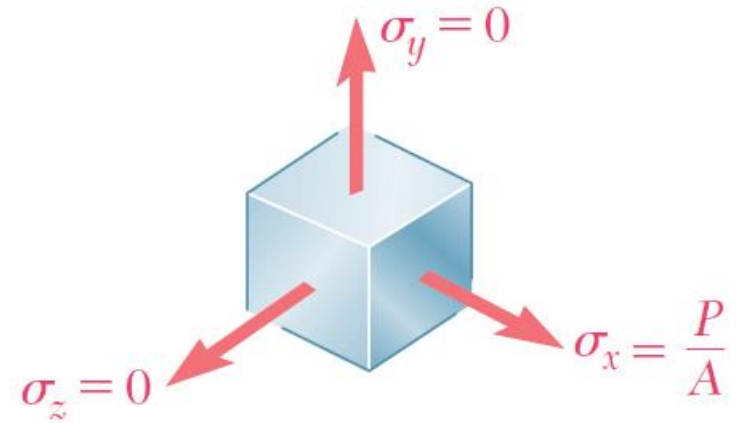
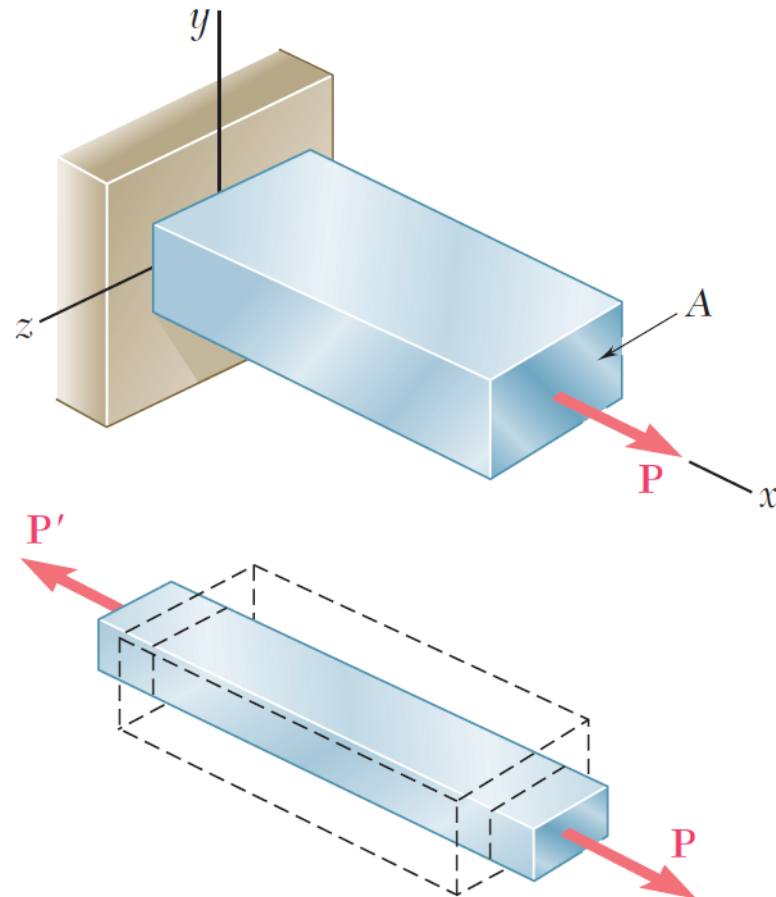
Μητρική μορφή τροπών (τανυστής 1^{ης} τάξης)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]^T \quad \text{Συμμετρικό μητρώο}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}, \quad i \neq j$$

Λόγος Poisson



$$\nu = - \frac{\text{εγκάρσια τροπή}}{\text{αξονική τροπή}} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

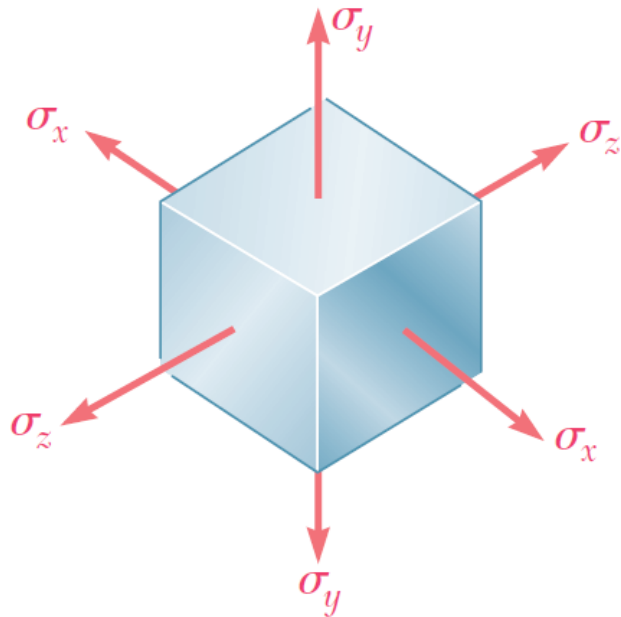
Ράβδος υπό αξονικό φορτίο υφίσταται επιμήκυνση στη διεύθυνση του φορτίου και εγκάρσια συστολή

Γενικευμένος νόμος Hooke

Εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

προσδιορίζουμε ξεχωριστά την επίδραση κάθε φορτίου και συνδυάζουμε τα αποτελέσματα. Ισχύει:

1. Ελαστική περιοχή (Hooke)
2. Μικρές παραμορφώσεις



Πολυαξονική φόρτιση

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

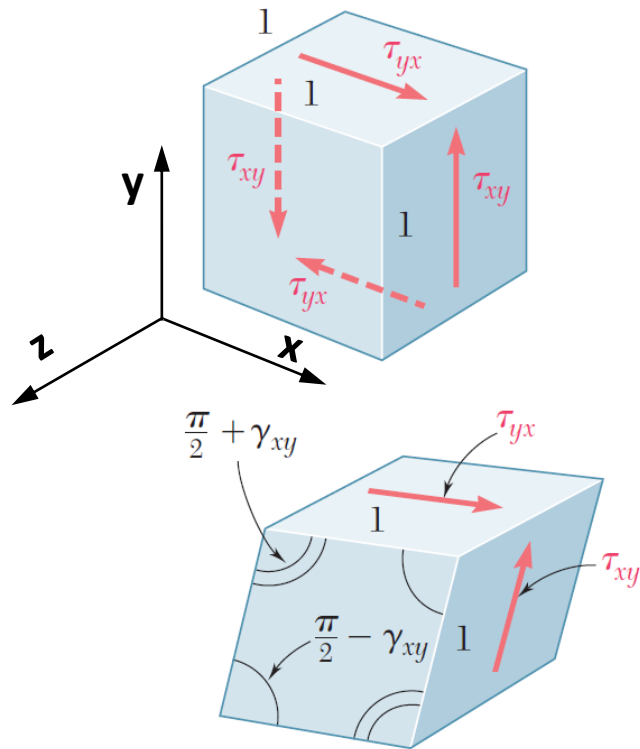
$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \delta_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij}$$

*Ομογενές και
ισότροπο υλικό

Νόμος Hooke για τη διατμητική τάση και τροπή



Διατμητικές τάσεις και τροπές

Διατμητική τροπή:

είναι η γωνία γ_{xy} που αντιστοιχεί στις διευθύνσεις x και y . Είναι θετική όταν προκαλεί μείωση της γωνίας που σχηματίζεται από τις δύο έδρες που είναι προσανατολισμένες προς τους θετικούς άξονες x και y .

Νόμος του Hooke για τη διατμητική τάση και τροπή:

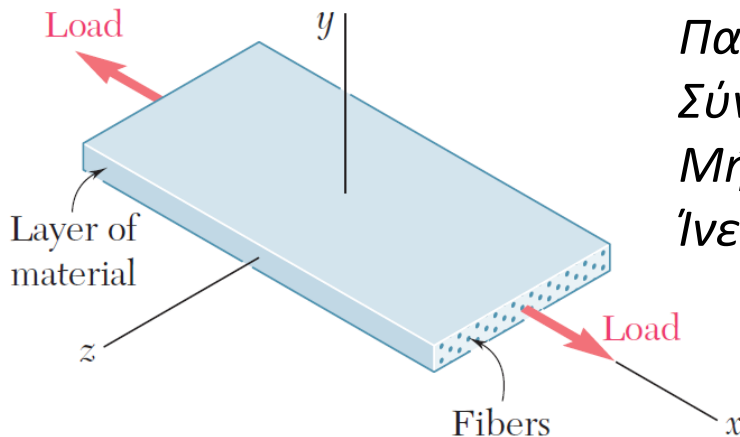
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

Μέτρο διάτμησης: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Ισότροπα είναι τα υλικά των οποίων οι μηχανικές ιδιότητες συμπεριλαμβανομένου και του μέτρου ελαστικότητας είναι ανεξάρτητες από τη διεύθυνση που εξετάζουμε.

Ανισότροπα είναι τα υλικά των οποίων οι μηχανικές ιδιότητες συμπεριλαμβανομένου και του μέτρου ελαστικότητας εξαρτώνται από τη διεύθυνση που εξετάζουμε.



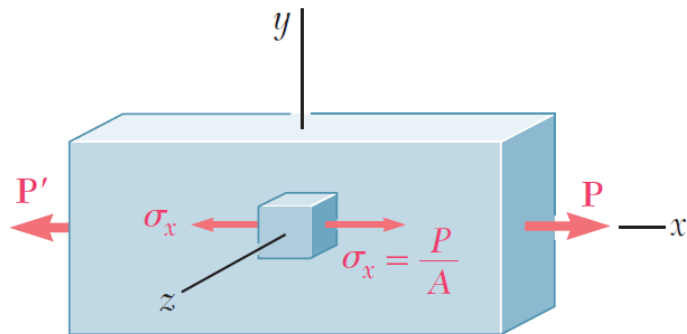
*Παράδειγμα ανισότροπου υλικού:
Σύνθετο υλικό ενισχυμένο με ίνες στη x-διεύθυνση.
Μήτρα: ρητίνες, πολυμερές
Ίνες: γραφίτης, γυαλί, kevlar*

*Νόμος Hooke ισχύει στις 3 διευθύνσεις x, y, z
 $E_x > E_y, E_z$*

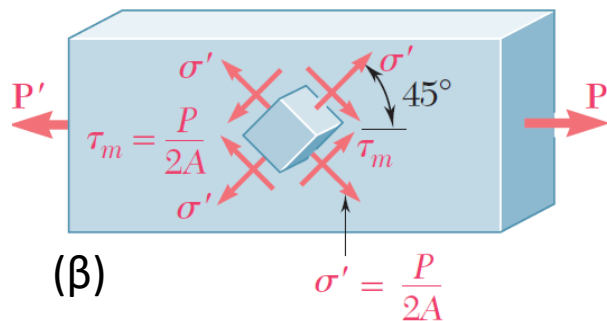
Πολύστρωτο (laminate) υλικό: αποτελείται από πολλά στρώματα (layers) το ένα πάνω στο άλλο. Οι ίνες σε κάθε στρώμα μπορεί να έχουν διαφορετική διεύθυνση. Ανάλογα με την τοποθέτηση των ινών μπορεί να αυξηθεί η αντοχή σε εφελκυσμό, θλίψη, διάτμηση.

Τάση υπό αξονικό φορτίο

Σε δεδομένο σημείο, ανάλογα με τον προσανατολισμό του στοιχείου που μελετάμε, οι ίδιες συνθήκες φόρτισης οδηγούν σε διαφορετικές ερμηνείες της εντατικής κατάστασης (α), (β).

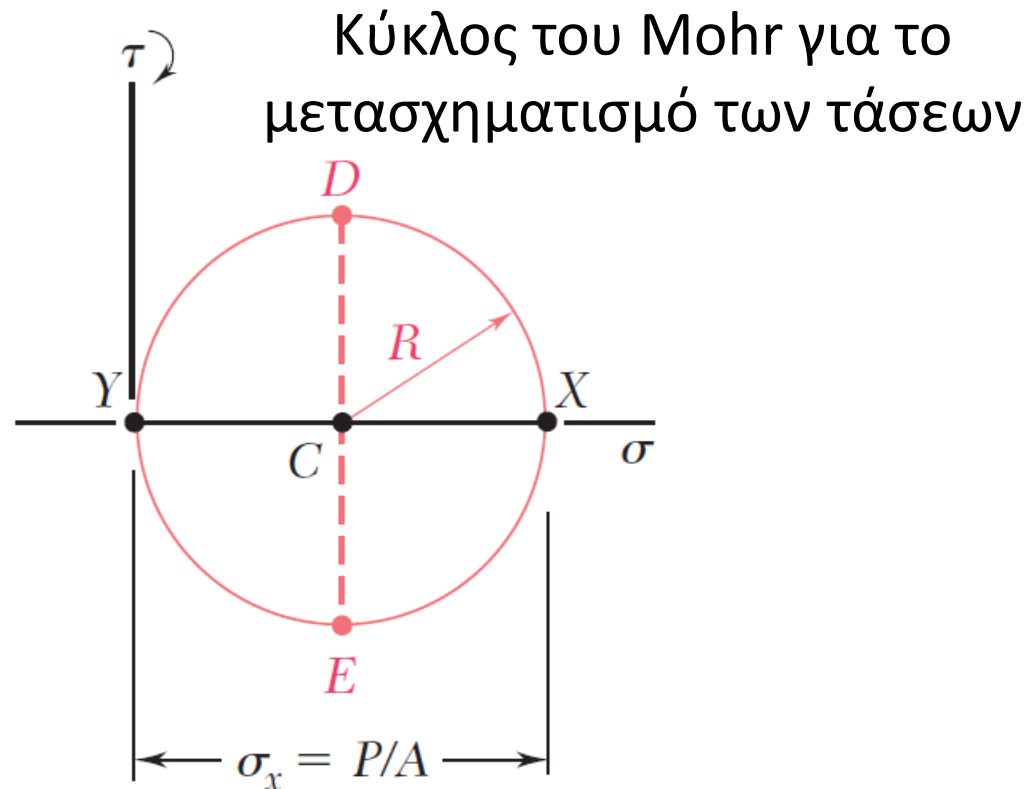


(α)

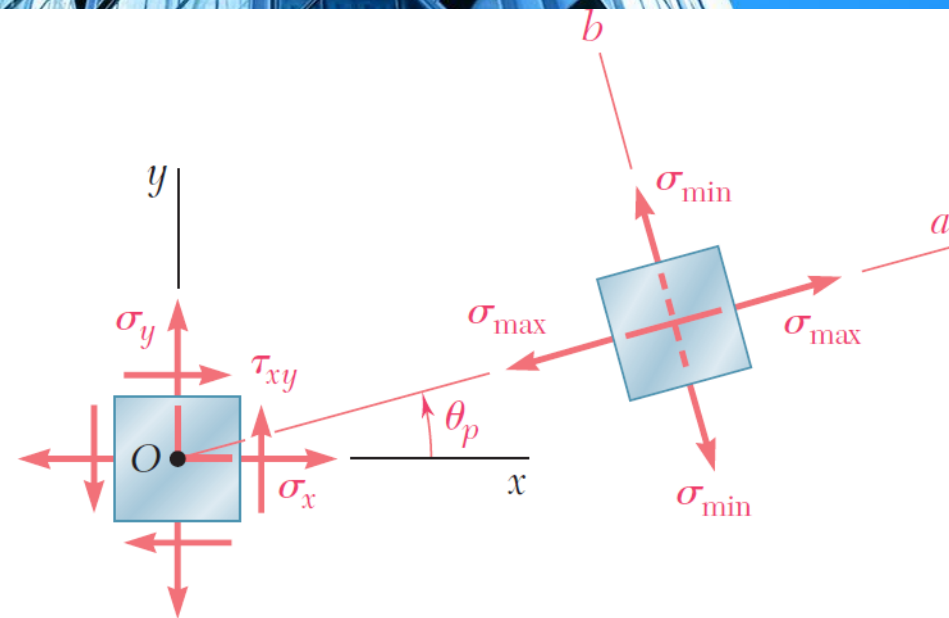


(β)

Αξονική φόρτιση



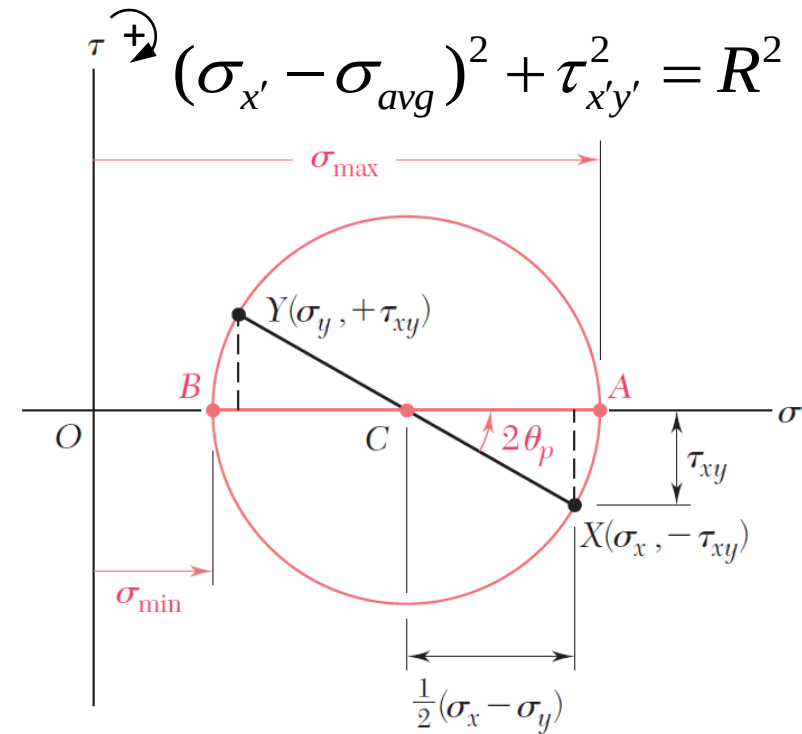
Κύκλος του Mohr, κύρια επίπεδα



$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{avg} + R, \quad \sigma_{min} = \sigma_{avg} - R$$



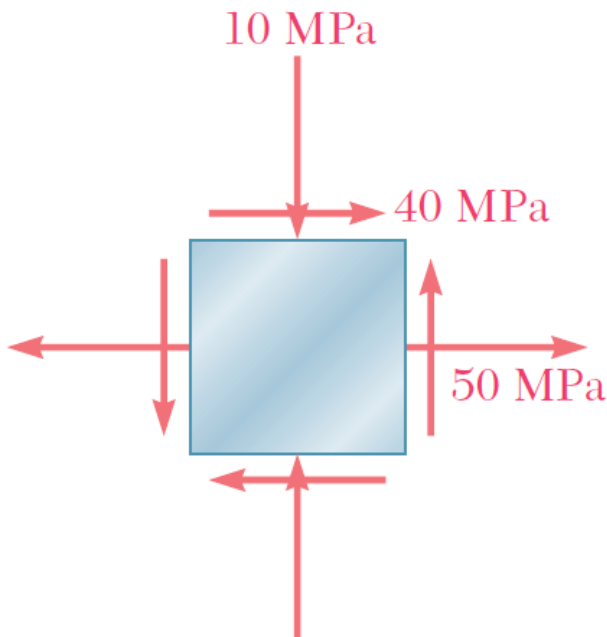
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

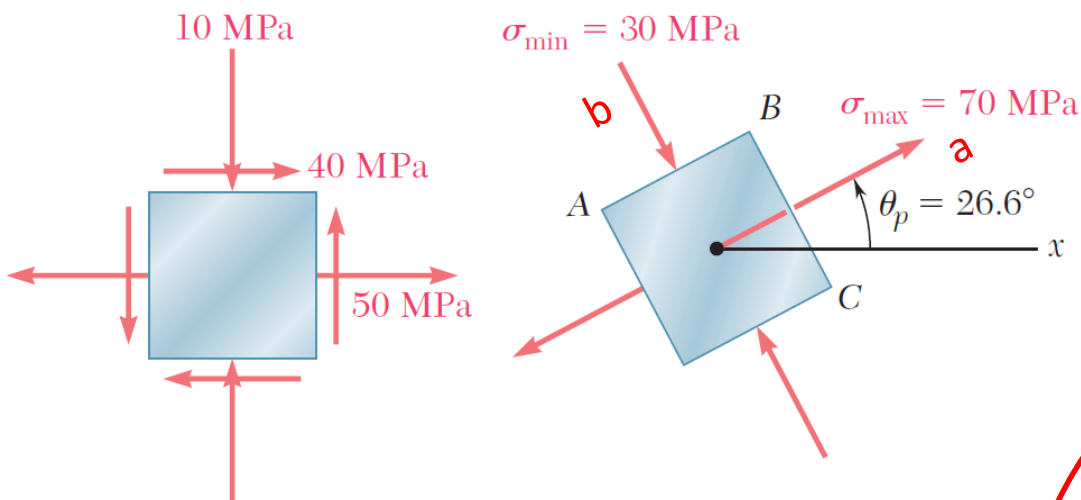
Εφαρμογή κύκλος Mohr

Για την επίπεδη εντατική κατάσταση που φαίνεται στο σχήμα προσδιορίστε:

- α) τα κύρια επίπεδα,
- β) τις κύριες τάσεις,
- γ) τη μέγιστη διατμητική τάση και την αντίστοιχη ορθή τάση.



Εφαρμογή κύκλος Mohr



$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}, \sigma_y = -10 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$$

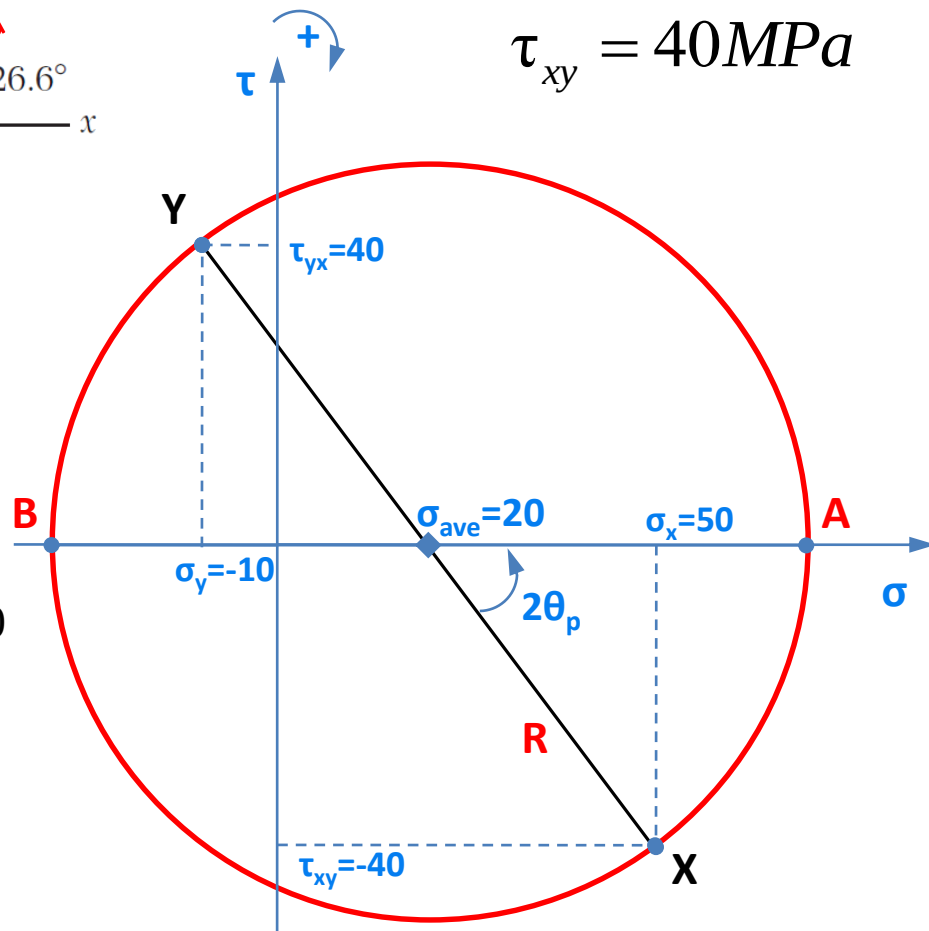
$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + 40^2} = 50$$

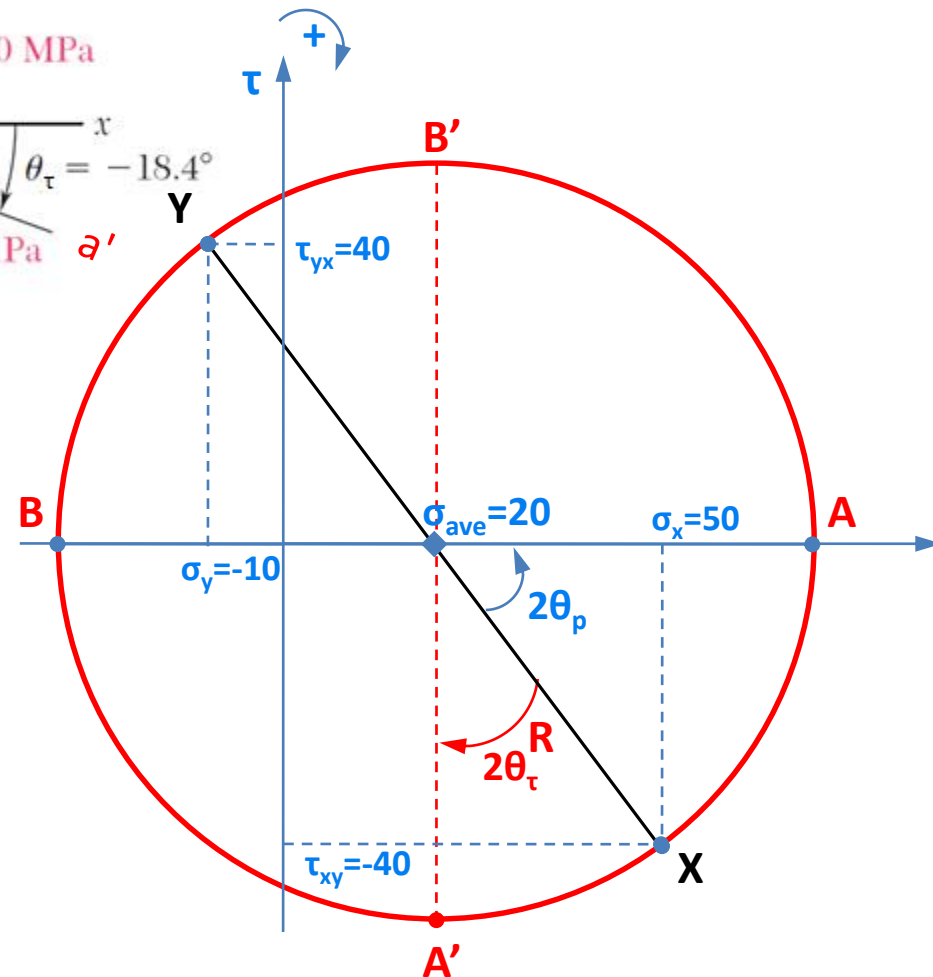
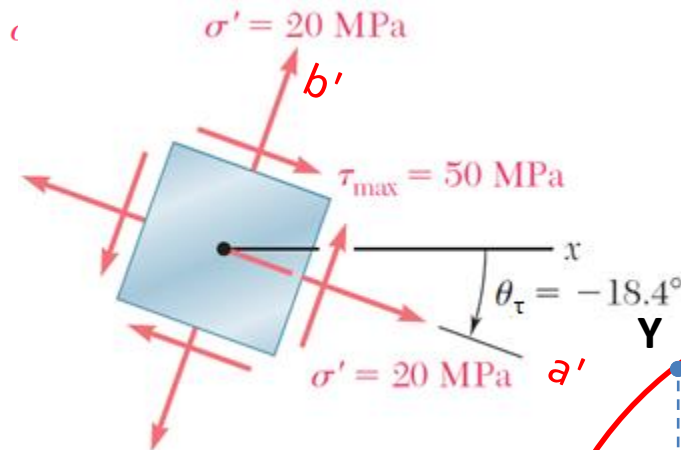
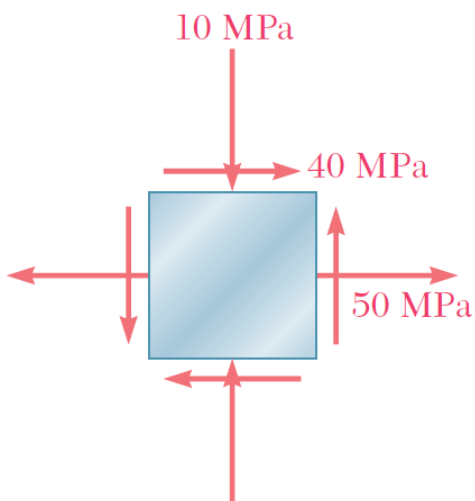
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 40}{50 - (-10)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta_p \approx 26.6^\circ$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ave} + R = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{ave} - R = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$



Εφαρμογή κύκλος Mohr



$$\sigma_{ave} = 20 \text{ MPa}, R = 50$$

$$\theta_p \approx 26.6^\circ, \sigma_{max} = 70 \text{ MPa}, \sigma_{min} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{50 - (-10)}{2 \cdot 40} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \theta_\tau \approx 18.4^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma' = \sigma_{ave} = 20 \text{ MPa}$$