



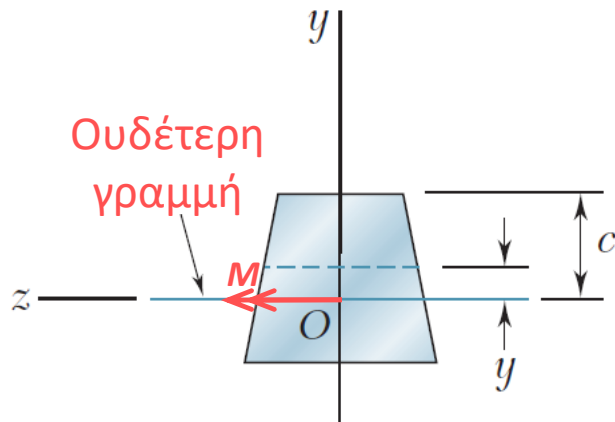
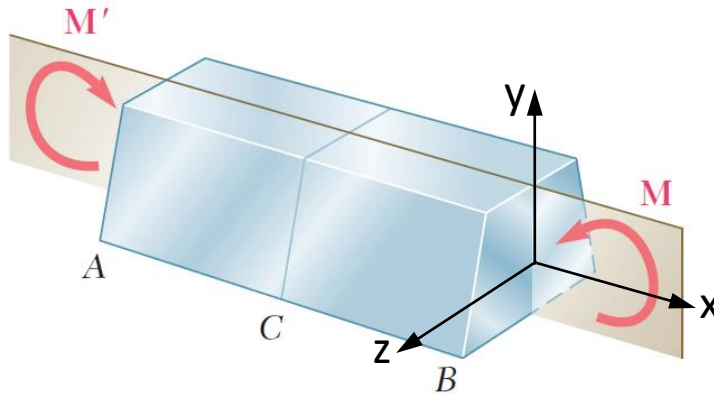
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Κάμψη

Δρ. Δημήτριος ΣΑΒΒΑΣ

Μέλος σε καθαρή κάμψη



$$\sigma_x = -\frac{E}{\rho} y, \quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

$$\sigma_{\max}^{\theta\lambda.} = -\frac{E}{\rho} c, \quad \sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_{\max}^{\theta\lambda.}$$

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}, \quad \sigma_{\max}^{\theta\lambda.} = -\frac{Mc}{I}$$

$$S = \frac{I}{c}, \quad \sigma_{\max}^{\theta\lambda.} = -\frac{M}{S}$$

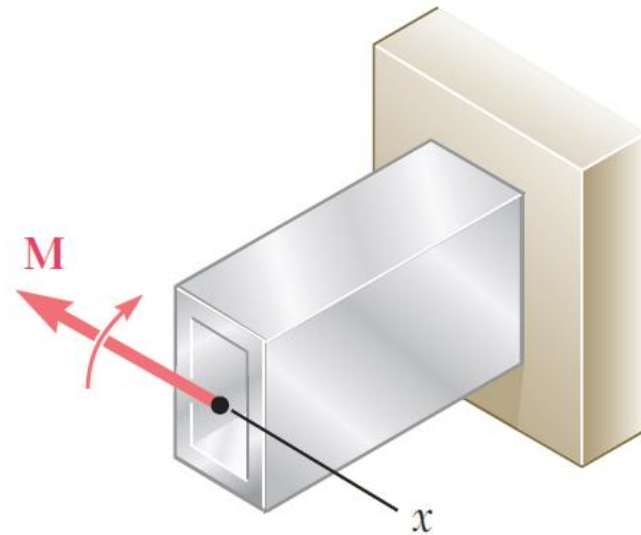
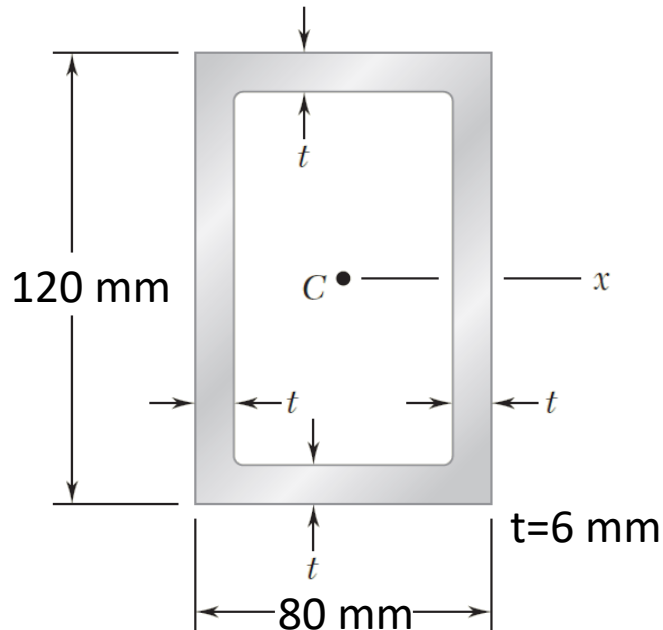
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Τύποι τάσεων και τροπών
που ισχύουν εντός της
ελαστικής περιοχής

Εφαρμογή 1

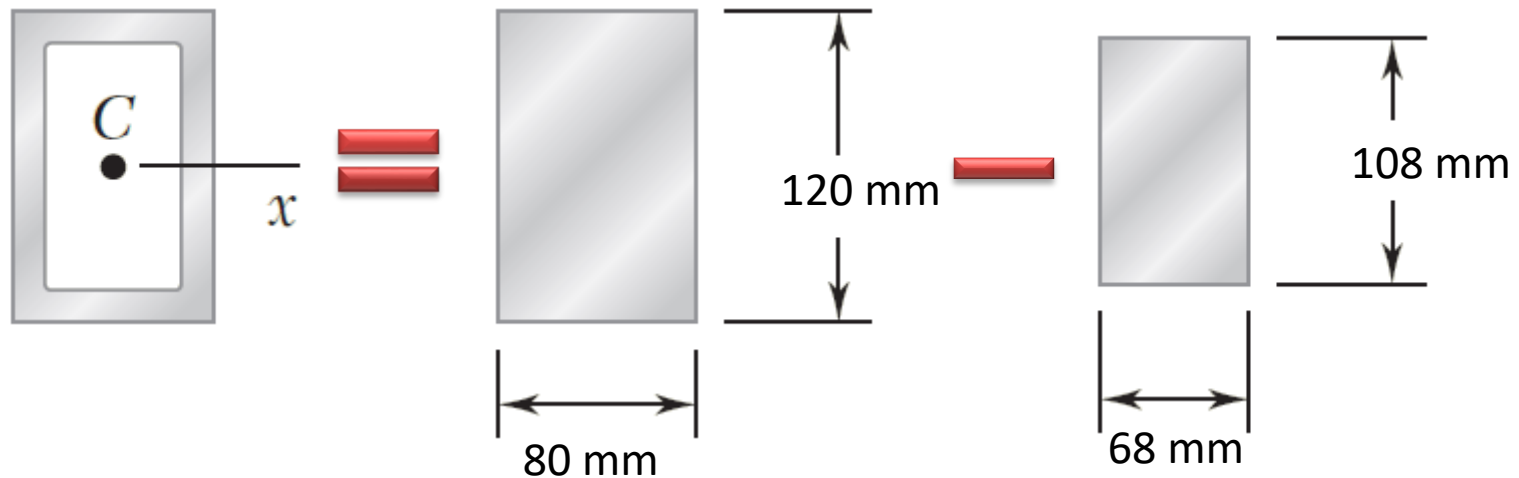
Για τον εικονιζόμενο ορθογώνιο σωλήνα από κράμα αλουμινίου με $\sigma_Y=250$ MPa, $\sigma_U=415$ MPa και $E=73$ GPa να υπολογίσετε:

- α) τη ροπή κάμψης για την οποία ο συντελεστής ασφαλείας θα είναι 3,
- β) την αντίστοιχη ακτίνα καμπυλότητας του σωλήνα.



Εφαρμογή 1

Ροπή αδρανείας:



$$I = \frac{1}{12}(0.08m)(0.12m)^3 - \frac{1}{12}(0.068m)(0.108m)^3$$
$$\Rightarrow I = 4.382 \times 10^{-6} m^4$$

Εφαρμογή 1

Επιτρεπόμενη τάση:

Για συντελεστή ασφαλείας ίσο με 3 και οριακή τάση ίση με 415 MPa η επιτρεπόμενη τάση υπολογίζεται

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{415}{3} = 138.33 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{all} < \sigma_Y \quad \begin{array}{l} \text{(Ελαστική περιοχή)} \\ \text{Ισχύουν οι τύποι της} \\ \text{ελαστικής κάμψης} \end{array}$$

α) Ροπή κάμψης:

Η μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα της διατομής είναι $c=120/2=60 \text{ mm}$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{I}{c} \sigma_{all} = \frac{4.382 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0.06 \text{ m}} 138.33 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow M \approx 10.1 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

β) Ακτίνα καμπυλότητας:

1^{ος} τρόπος:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{10.1 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{\left(73 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (4.382 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} \approx 0.0316 \text{ m}^{-1}$$

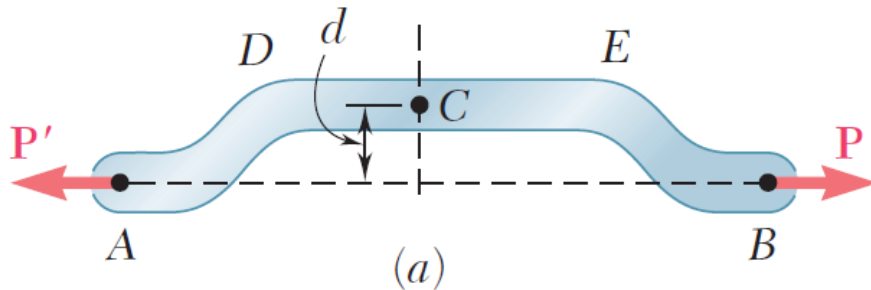
$$\Rightarrow \rho \approx 31.7 \text{ m}$$

2^{ος} τρόπος:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_{all}}{E} = \frac{138.3 \times 10^6 \text{ N} / \text{m}^2}{73 \times 10^9 \text{ N} / \text{m}^2} \approx 1.895 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{c}{\varepsilon_m} = \frac{0.06 \text{ m}}{1.895 \times 10^{-3}} \approx 31.7 \text{ m}$$

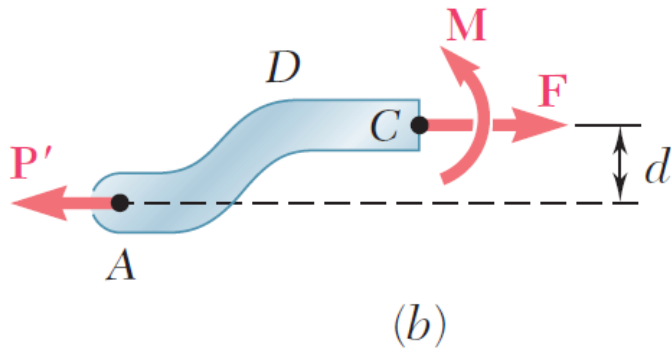
Έκκεντρο αξονικό φορτίο



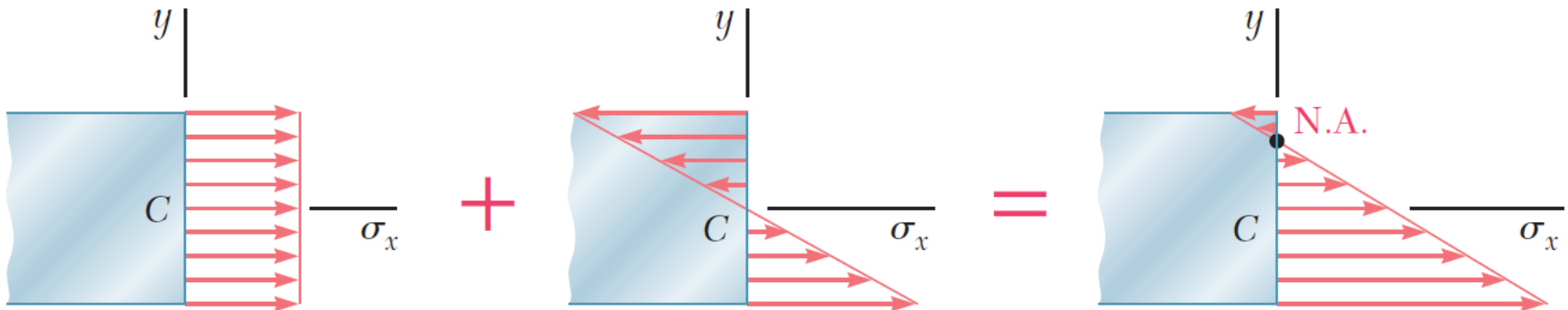
$$P = P'$$

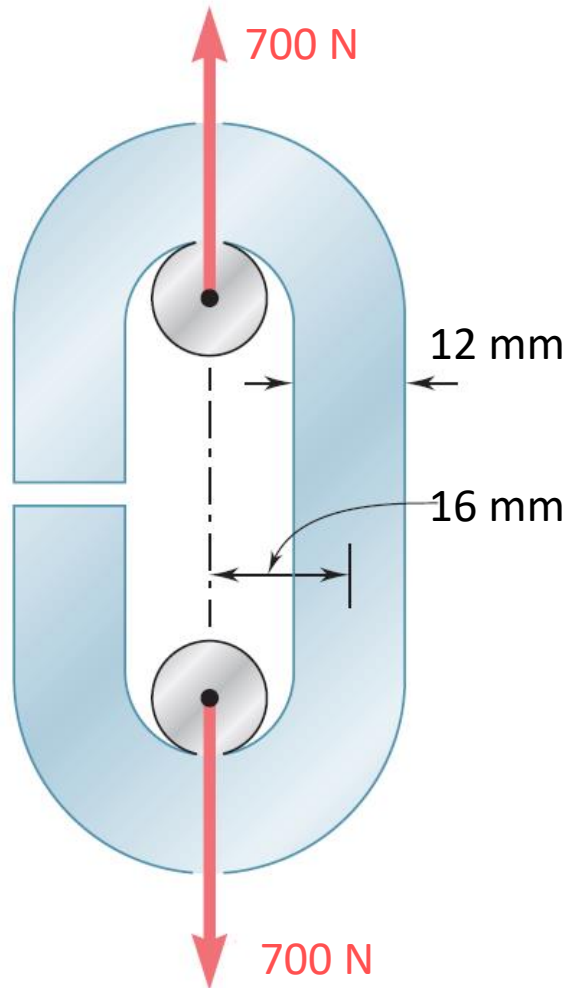
$$F = P', M = P'd$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$



(Επαλληλία ορθών κατανομών τάσεων)





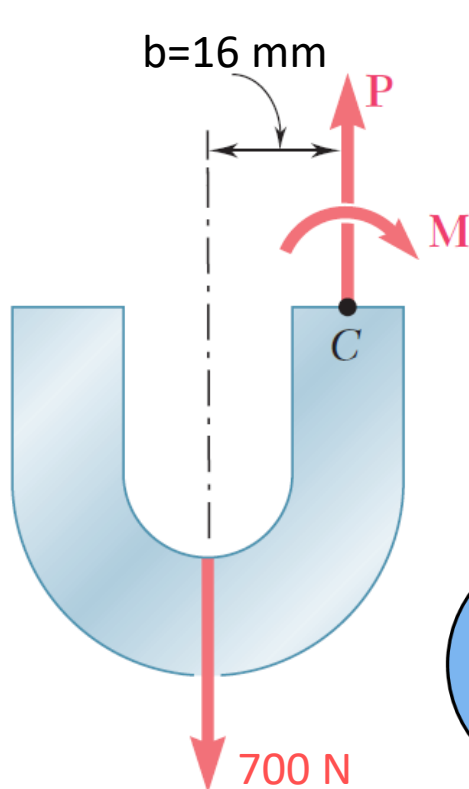
Έστω ανοικτός κρίκος αλυσίδας με διάμετρο 12 mm υφίσταται φορτίο 700 N όπως φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιορίσετε:

- α) τη μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση στο ευθύγραμμο τμήμα του κρίκου,
- β) την απόσταση ανάμεσα στον κεντρικό και ουδέτερο άξονα μιας εγκάρσιας διατομής.

Εφαρμογή 2

α) Μέγιστη εφελκυστική και θλιπτική τάση:

Οι εσωτερικές δυνάμεις στην εγκάρσια διατομή είναι ισοδύναμες με μια κεντρική δύναμη P και μια ροπή κάμψης M

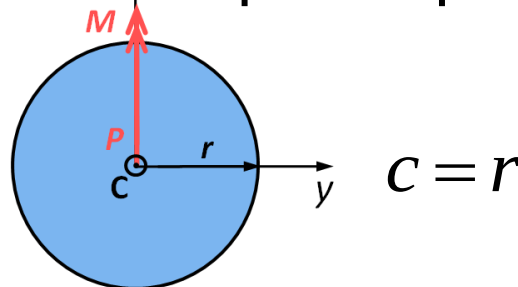


$$P = 700\text{ N}$$

$$M = Pb = (700\text{ N})(0.016\text{ m}) = 11.2\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$A = \pi r^2 = \pi(6\text{ mm}) = 113.1\text{ mm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{4} (6\text{ mm})^4 = 1017.9\text{ mm}^4$$

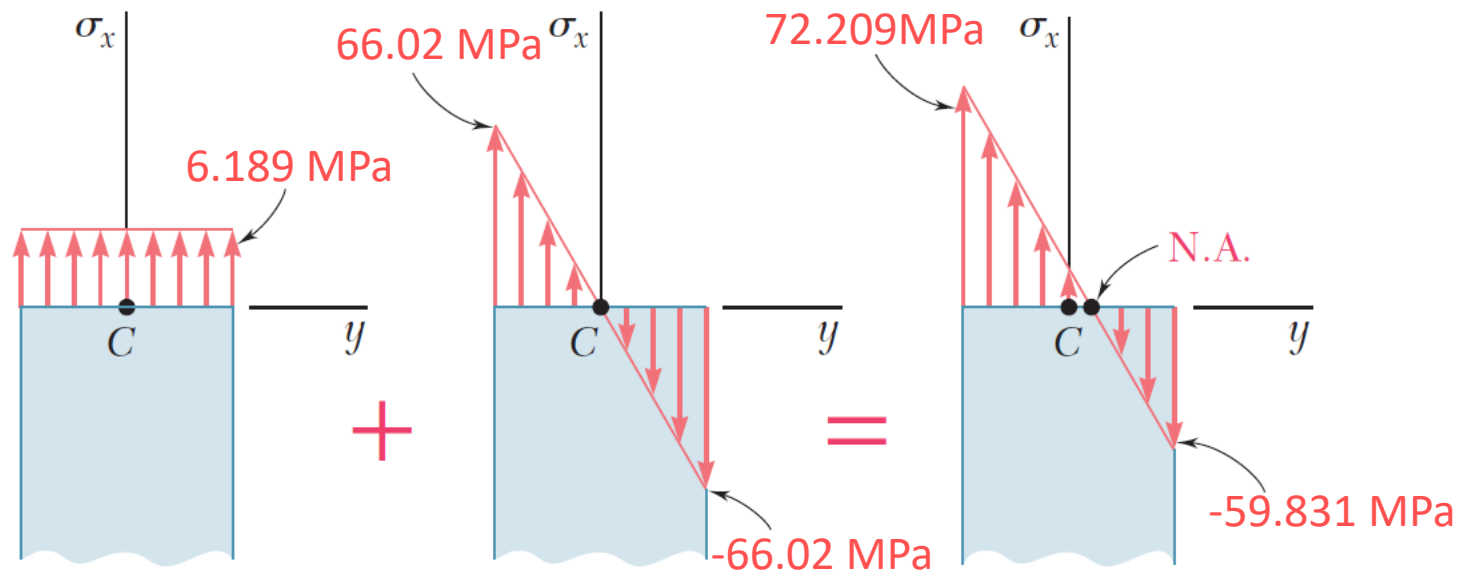


$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{700 \text{ N}}{113.1 \text{ mm}^2} = 6.189 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{M_C}{I} = \frac{(11.2 \text{ N} \cdot \text{m})(6 \times 10^{-3} \text{ m})}{1017.9 \times 10^{12} \text{ m}^4} = 66.02 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 6.189 + 66.02 = 72.209 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 6.189 - 66.02 = -59.831 \text{ MPa}$$



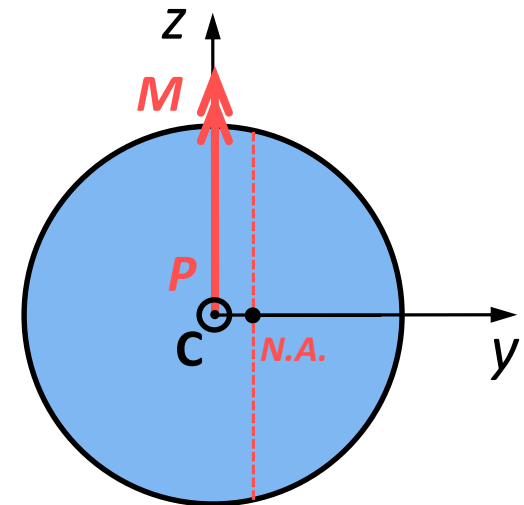
Εφαρμογή 2

β) Απόσταση ανάμεσα στον κεντρικό και τον ουδέτερο άξονα:

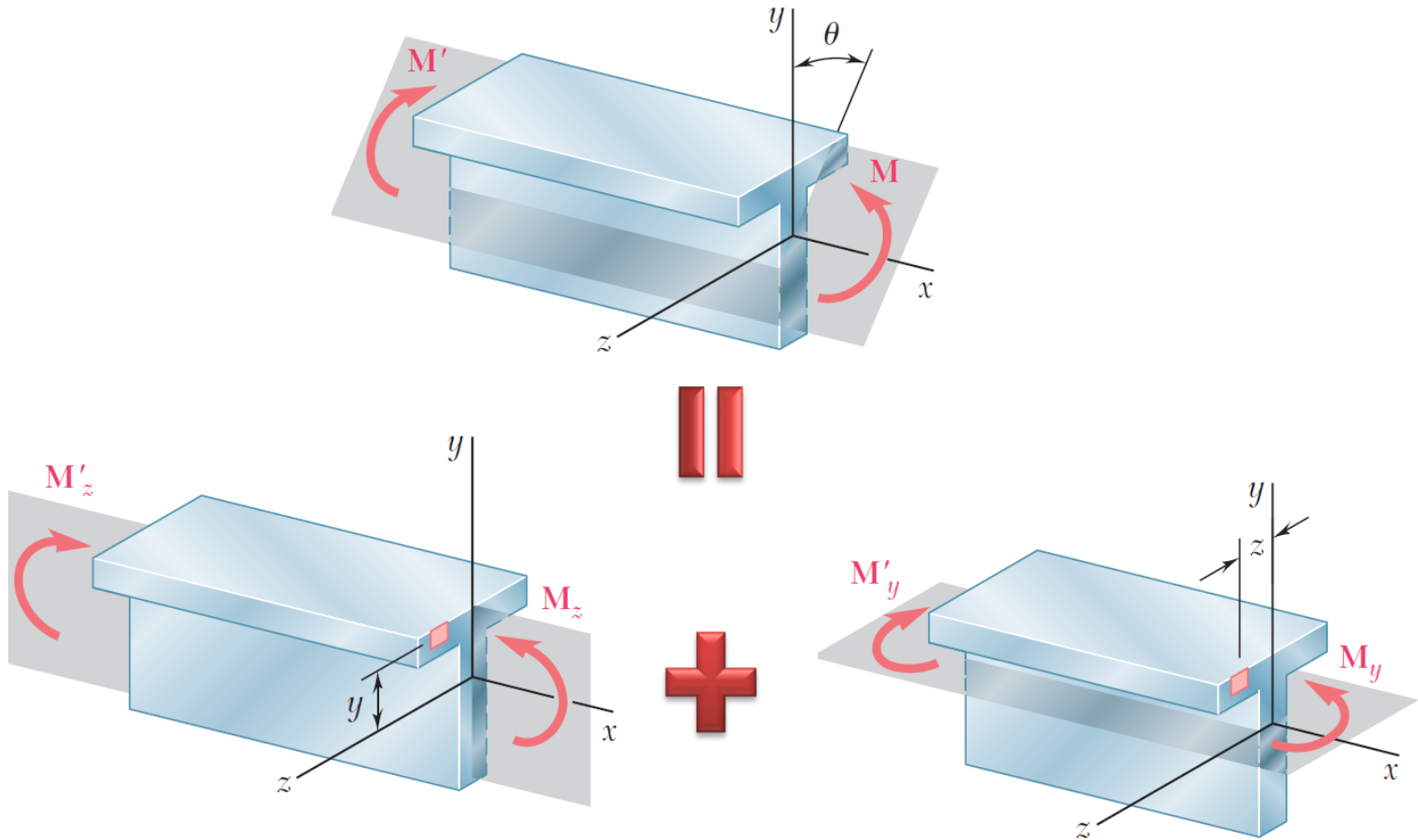
$$(\sigma_x)_{N.A.} = \frac{P}{A} - \frac{M}{I} y_{N.A.} = 0$$

$$\Rightarrow y_{N.A.} = \frac{P}{A} \frac{I}{M} = \left(6.189 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \right) \frac{1017.9 \times 10^{-12} m^4}{11.2 Nm}$$

$$\Rightarrow y_{N.A.} = 5.62 \times 10^{-4} m = 0.562 \text{ mm}$$

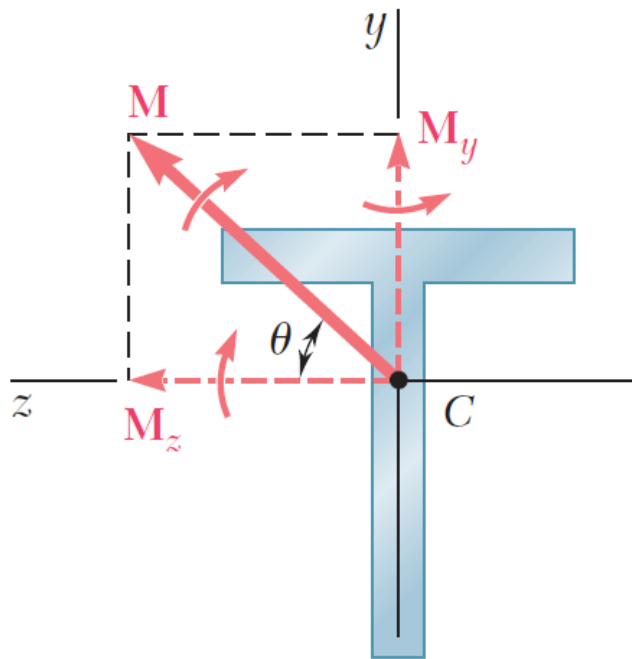


Ανάλυση ασύμμετρης κάμψης

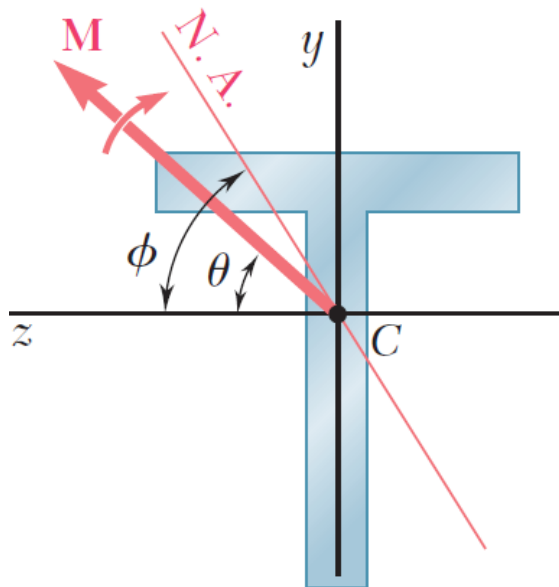


$$M_z = M \cos \theta$$

$$M_y = M \sin \theta$$



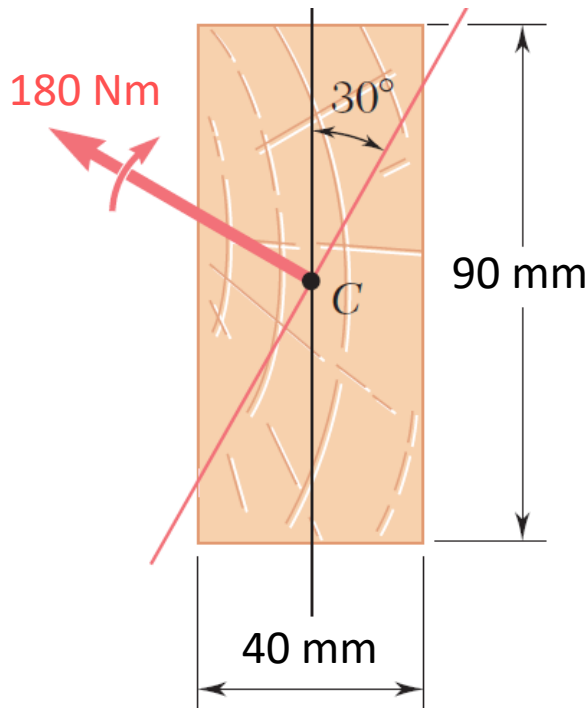
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



$$\sigma_x = 0 \Rightarrow -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z} \right) z = \left(\frac{I_z}{I_y} \frac{M \sin \theta}{M \cos \theta} \right) z$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z = \tan \phi \cdot z$$



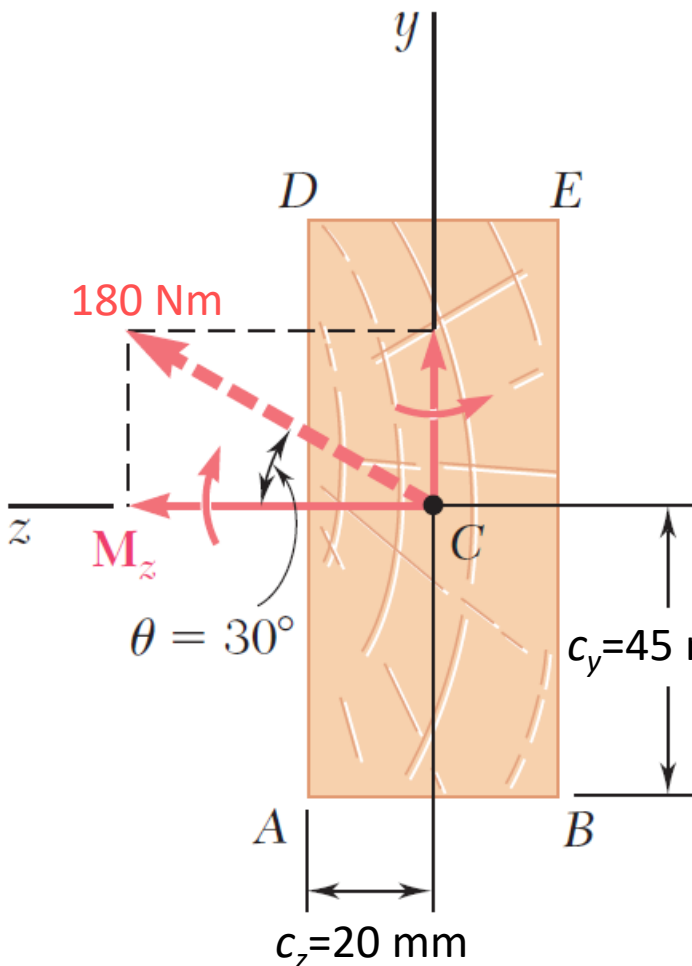
Έστω δοκός ορθογώνιας διατομής 40x90 mm καταπονείται από ζεύγος ροπών $M=180 \text{ Nm}$ που ασκείται σε ένα επίπεδο που σχηματίζει γωνία 30° με το κατακόρυφο επίπεδο.

Προσδιορίστε:

- α) τη μέγιστη τάση στη δοκό,
- β) τη γωνία της ουδέτερης επιφάνειας με το οριζόντιο επίπεδο.

Εφαρμογή 3

α) Μέγιστη τάση:



$$M_z = M \cos \theta = 180 \cos 30^\circ = 180 \frac{\sqrt{3}}{2} = 155.9 \text{ Nm}$$

$$M_y = M \sin \theta = 180 \sin 30^\circ = 180 \frac{1}{2} = 90 \text{ Nm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} (0.04) (0.09)^3 = 2.43 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (0.09) (0.04)^3 = 0.48 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

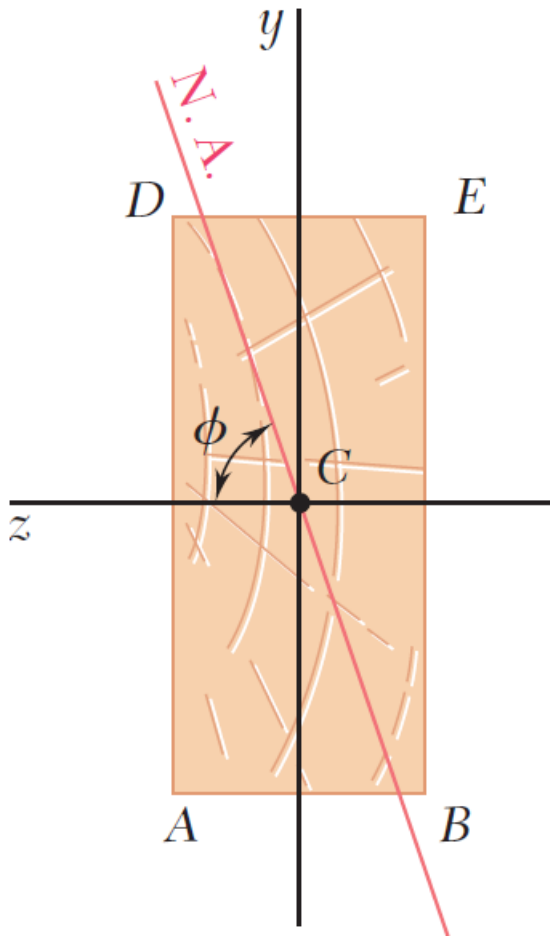
$$\sigma_{m_1} = \frac{M_z c_y}{I_z} = \frac{(155.9)(0.045)}{2.43 \times 10^{-6}} = 2.887 \text{ MPa} \quad (\text{AB})$$

$$\sigma_{m_2} = \frac{M_y c_z}{I_y} = \frac{(90)(0.02)}{0.48 \times 10^{-6}} = 3.75 \text{ MPa} \quad (\text{AD})$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{m_1} + \sigma_{m_2} = 2.887 + 3.75 = 6.637 \text{ MPa} \quad (\text{A})$$

Εφαρμογή 3

β) Γωνία της ουδέτερης επιφάνειας με το οριζόντιο επίπεδο:



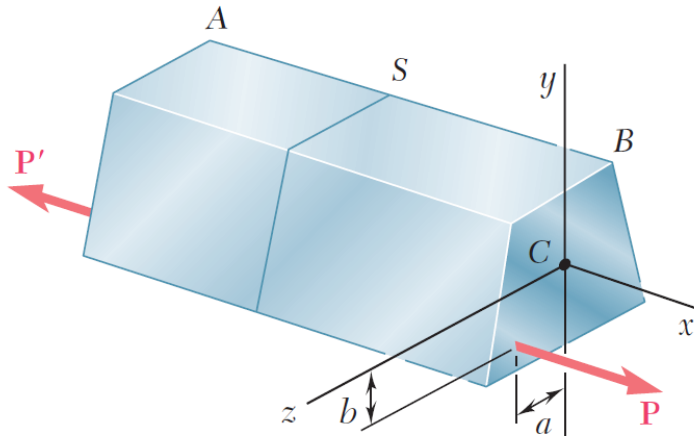
$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{2.43 \times 10^{-6}}{0.48 \times 10^{-6}} \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{2.43 \times 10^{-6}}{0.48 \times 10^{-6}} \frac{\sqrt{3}}{3} = 2.923$$

$$\phi = 71.1^\circ$$

Γενική περίπτωση έκκεντρης αξονικής φόρτισης



(a)

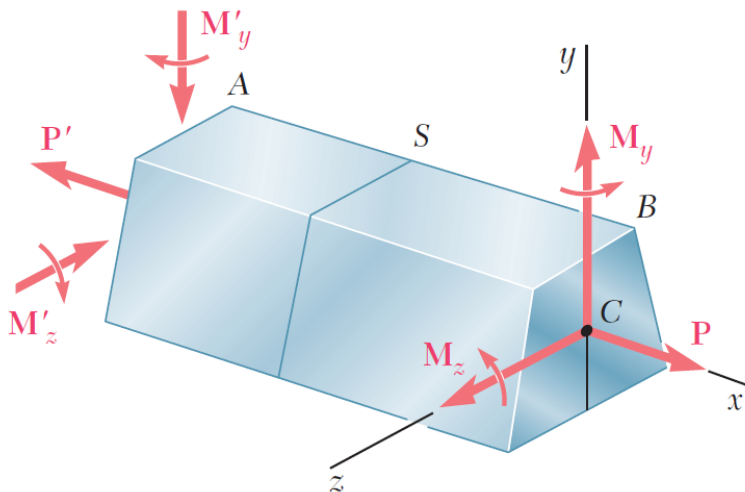
$$M_y = Pa, \quad M_z = Pb$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

Θέση ουδετέρου άξονα:

$$\sigma_x = 0$$

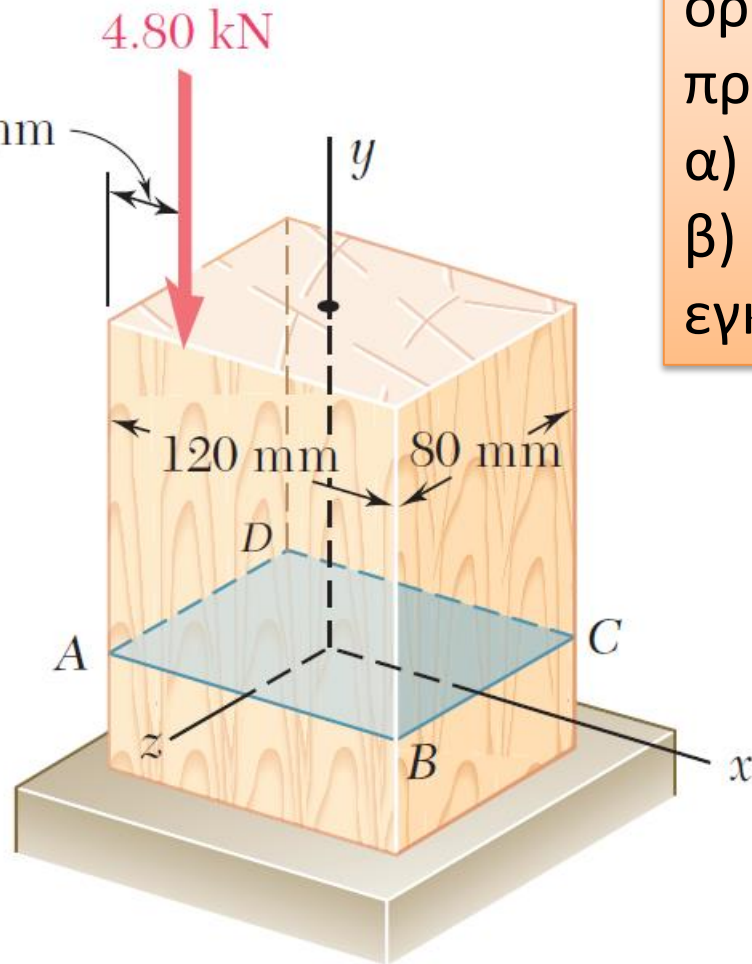
$$\Rightarrow \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$



Εφαρμογή 4

Για την έκκεντρη φόρτιση της δοκού ορθογώνιας διατομής 80x120mm να προσδιορίσετε:

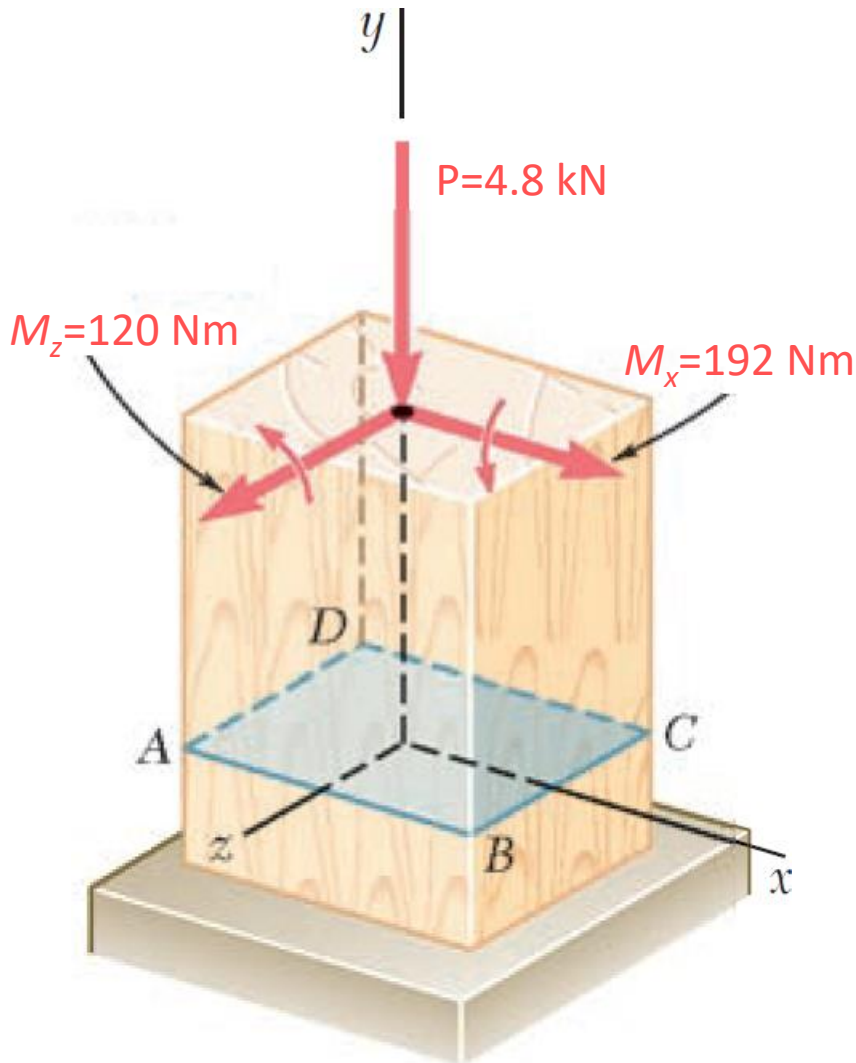
- α) την τάση στα σημεία A, B, C και D.
- β) τη θέση της ουδέτερης γραμμής στην εγκάρσια διατομή



$$M_x = (4.8 \times 10^3)(0.04) = 192 Nm$$

$$M_z = (4.8 \times 10^3)(0.06 - 0.035) = 120 Nm$$

Εφαρμογή 4



$$A = (0.08)(0.12) = 9.6 \times 10^{-3} m^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0.12)(0.08)^3 = 5.12 \times 10^{-6} m^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} (0.08)(0.12)^3 = 11.52 \times 10^{-6} m^4$$

α) Μέγιστες τάσεις:

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{-4.8 \times 10^3}{9.6 \times 10^{-3}} = -0.5 MPa$$

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\max}}{I_x} = \frac{(192)(0.04)}{5.12 \times 10^{-6}} = 1.5 MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\max}}{I_z} = \frac{(120)(0.06)}{11.52 \times 10^{-6}} = 0.625 MPa$$

Εφαρμογή 4

Τάσεις στις γωνίες της διατομής:

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{M_x z}{I_x} + \frac{M_z x}{I_z}$$

$A(-x_{\max}, z_{\max})$:

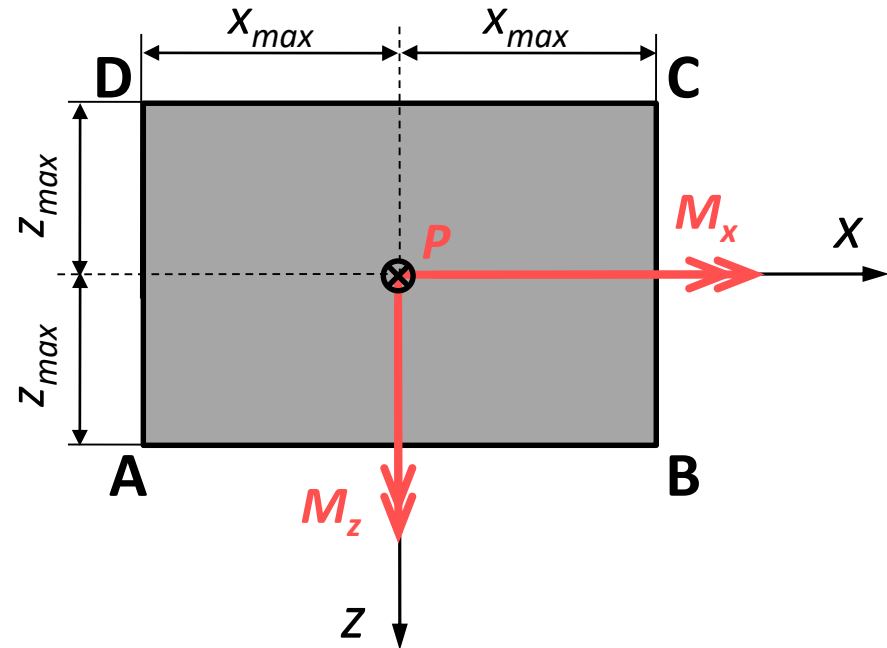
$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{M_x (z_{\max})}{I_x} + \frac{M_z (-x_{\max})}{I_z}$$

$$\sigma_A = \sigma_0 - \sigma_1 - \sigma_2 = -2.625 \text{ MPa}$$

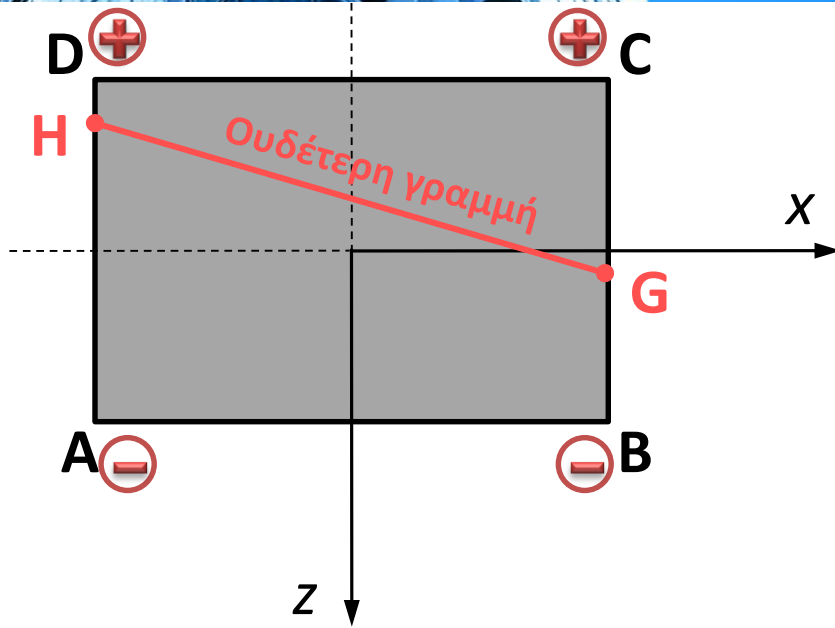
$$\sigma_B = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 = -1.375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = +1.625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2 = +0.375 \text{ MPa}$$



Εφαρμογή 4



$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{M_x}{I_x} z - \frac{M_z}{I_z} x = \frac{P}{A}$$

$$H(-x_{\max}, z_H): \frac{M_x}{I_x} z_H - \frac{M_z}{I_z} (-x_{\max}) = \frac{P}{A} \Rightarrow z_H = -30 \text{ mm}$$

$$G(x_{\max}, z_G): \frac{M_x}{I_x} z_G - \frac{M_z}{I_z} (x_{\max}) = \frac{P}{A} \Rightarrow z_G = 3.33 \text{ mm}$$

