

Θέματα ()

1. (1 μονάδα) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$x e^{x^2} dx + (y^5 - 1) dy = 0, \quad y(0) = 0$$

- (1 μονάδα) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$(x^2 + 1) dx + \frac{1}{y} dy = 0, \quad y(-1) = 1$$

2. (1,5 μονάδες) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$(y \sin x + xy \cos x) dx + (x \sin x + 1) dy = 0$$

- (1,5 μονάδες) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(x + \sin y) dx + (x \cos y - 2y) dy = 0$$

3. (1,5 μονάδες) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

- (1,5 μονάδες) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$y'' - y' - 2y = 4x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

4. (1,5 μονάδες) Με χρήση (μόνον) των μετασχηματισμών Laplace να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' - 8y = e^{8x}, \quad y(0) = 0$$

- (1,5 μονάδες) Με χρήση (μόνον) των μετασχηματισμών Laplace να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 1$$

5. (2 μονάδες) Σε μία καλλιέργεια κυττάρων, μετά από μία ημέρα απομένουν τα δύο τρίτα αυτών. Να καθοριστεί ο αριθμός των ημερών που πρέπει να περάσουν

ώστε ο αρχικός πληθυσμός να μειωθεί στο ένα τρίτο. Υποθέστε ότι ο ρυθμός μείωσης, του πληθυσμού, των κυττάρων, είναι ανάλογος του υπάρχοντος πληθυσμού.

6. (2 μονάδες) Να βρεθεί, (μόνον) με τη μέθοδο των πινάκων, η γενική λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

Καλή επιτυχία

#1

$$(y^5 - 1) dy = -x e^{x^2} dx \Rightarrow$$

(A)

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$$

χωρίς φερόμενων μεταβλητών

$$\int (y^5 - 1) dy = - \int x e^{x^2} dx \Rightarrow$$

$$y^6 - y = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{e^u}{2} + C = -\frac{e^{x^2}}{2} + C \Rightarrow$$

$$\boxed{y^6 - y = -\frac{1}{2} e^{x^2} + C}$$

$$\text{Αν } x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} e^0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η λύση του ΠΑΤ: } \boxed{y^6 - y = -\frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}}$$

(B)

$$(x^2 + 1) dx + \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -(x^2 + 1) dx \Rightarrow$$

χωρίς φερόμενων μεταβλητών

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int (x^2 + 1) dx \Rightarrow \ln y = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C$$

$$y = e^C \cdot e^{-\left(\frac{x^3}{3} + x\right)} = \boxed{C e^{-\left(\frac{x^3}{3} + x\right)} = y}$$

$$\text{Αν } x=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow 1 = C e^{-\left(-\frac{1}{3} - 1\right)} = C e^{\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{e^{\frac{4}{3}}} = e^{-\frac{4}{3}}$$

$$\text{Άρα η λύση του Π.Α.Τ.: } \boxed{y = e^{-\frac{x^3}{3} - x - \frac{4}{3}}}$$

(#2) (A) Έστω $M = y \sin x + x y \cos x$
 $N = x \sin x + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \sin x + x \cos x = \frac{\partial N}{\partial x} \end{array} \right.$

δηλ. η εξίσωση είναι ακριβής

Η γενική λύση της είναι: $\Phi(x, y) = c$ όπου η Φ :

Ικανοποιεί $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = M \quad (1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad (2) \end{array} \right.$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x : $\Phi(x, y) = \int M dx =$
 $= \int (y \sin x + x y \cos x) dx = -y \cos x + x \sin x + \cos x + h(y)$

Άρα $\Phi(x, y) = c \Rightarrow \cancel{-y \cos x} + \cancel{x \sin x} + \cancel{\cos x} + h(y) = c \quad (3)$

Παραγωγίζοντας την (3), ως προς y , έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \cancel{-\cos x} + \cancel{x \sin x} + \cancel{\cos x} + h'(y) \stackrel{(2)}{=} \cancel{x \sin x} + 1$$

$$\Rightarrow h'(y) = 1 \Rightarrow h(y) = y$$

Άρα, η γενική λύση της δ.ε είναι:

$$\Phi(x, y) = c \quad \text{ή}$$

$$\boxed{xy \sin x + y = c}$$

(B) Έστω $M = x + \sin y$
 $N = x \cos y - 2y$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial N}{\partial x}$
 άρα, η δ.ε είναι ακριβής.

Η γενική λύση της δ.ε, είναι: $\Phi(x, y) = C$ όπου η Φ

ικανοποιεί

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = M & (1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N & (2) \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x :

$$\Phi(x, y) = \int M dx = \int (x + \sin y) dx = \frac{x^2}{2} + x \sin y + h(y) \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς y :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \cos y + h'(y) \stackrel{(2)}{=} x \cos y - 2y \Rightarrow$$

$$h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -2 \frac{y^2}{2} = -y^2 \quad (4)$$

Άρα, η γενική λύση της δ.ε (χρησιμοποιώντας τις (3), (4)).

$$\Phi(x, y) = C \text{ ή}$$

$$\frac{x^2}{2} + x \sin y - y^2 = C$$

#3 (A) (i) η γενική λύση της ομογενούς:

η χαρακτηριστική εξίσωση $\tau^2 - \tau - 2 = 0$

$$\tau_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2 \cdot 4}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

(ii) μια μερική λύση, y_H , της μη-ομογενούς είναι της μορφής

$$y_H = A e^{3x} \Rightarrow y_H' = 3A e^{3x}$$

$$y_H'' = 9A e^{3x}$$

ε' αντικαθιστώντας στη δ.ε:

$$9A e^{3x} - 3A e^{3x} - 2A e^{3x} = e^{3x}$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

Άρα, η γενική λύση της δ.ε είναι ίση με:

$$y = y_0 + y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x}$$

$$\text{Από } y(0) = 1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = \frac{3}{4}} \quad (1)$$

$$\text{Ακόμα, } y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \frac{3}{4} e^{3x}$$

$$\text{ε' } y'(0) = 4 = 2C_1 - C_2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{2C_1 - C_2 = \frac{13}{4}} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) \text{ \& } (2) \quad C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = -\frac{7}{12}$$

$$\text{Άρα: } \boxed{y = \frac{4}{3} e^{2x} - \frac{7}{12} e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x}}$$

(B) (i) η γενική λύση της ομογενούς:

χαρακτηριστική εξίσωση: $\tau^2 - \tau - 2 = 0$

$$\tau_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 2 \cdot 4}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

άρα: $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

(ii) μία μερική λύση της μη-ομογενούς, θα είναι της μορφής:

$$y_{\mu} = Ax^2 + Bx + \Gamma \Rightarrow y'_{\mu} = 2Ax + B, \quad y''_{\mu} = 2A$$

Αντικαθιστώντας στη δ.ε, έχουμε:

$$+2A - 2Ax - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2\Gamma = 4x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A - B - 2\Gamma = 0 & \Rightarrow 2(-2) - 2 - 2\Gamma = 0 \Rightarrow 2\Gamma = -6 \Rightarrow \Gamma = -3 \\ -2A - 2B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow B = 2 \\ -2A = 4 \Rightarrow A = -2 \end{cases}$$

Άρα: $y_{\mu} = -2x^2 + 2x - 3$

Η γενική λύση της δ.ε: $y = y_0 + y_{\mu} \Rightarrow$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$$

Άρα: $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 - 3 \Rightarrow \underline{C_1 + C_2 = 4} \quad \textcircled{1}$

Επίσης: $y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 4x + 2 \quad \textcircled{2}$

$$y'(0) = 4 = 2C_1 - C_2 + 2 \Rightarrow 2C_1 - C_2 = 2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad C_1 + C_2 = 4$$

$$3C_1 = 6 \Rightarrow +$$

$$(C_1 = 2)$$

$$\text{π} \quad C_1 + C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = 2$$

Άρα, η λύση των Π.Α.Τ.:

$$y = 2C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$$

(#4) (A) Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace & των δύο μερών, έχουμε:

$$\mathcal{L}(y' - 8y) = \mathcal{L}(e^{8x}) \Rightarrow \mathcal{L}(y') - 8\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{8x})$$

(ή χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετασχηματισμών Laplace)

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) - 8\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-8} \Rightarrow$$

$$(s-8)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-8} \Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-8)^2}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-8)^2}\right) = xe^{8x}$$

(B) Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace & των δύο μερών, έχουμε:

$$\mathcal{L}(y' + 2y) = \mathcal{L}(e^x) \Rightarrow \mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^x) \Rightarrow$$

(από τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace)

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow (s+2)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} + 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s}{(s-1)(s+2)} \underset{\text{απλά}}{\overset{\text{μερική}}{\text{κλάσματα}}} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$A(s-1) + B(s+2) = s \Rightarrow \begin{cases} \text{αν } s=1 \Rightarrow B = \frac{1}{3} \\ \text{αν } s=-2 \Rightarrow A = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } L(y) = \frac{2}{3} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-1}$$

Πάιρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$y = \frac{2}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{y = \frac{2}{3} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x}$$

#5 Έστω $y(t)=0$ αριθμός των κυττάρων τη χρονική στιγμή t (t=ημέρες)
Τότε

$$\frac{dy}{dt} = \kappa y$$

$\kappa = \text{σταθερά (ρυθμός μείωσης)}$

χωρίζουμε
μεταβλητές $\Rightarrow$

$$\frac{1}{y} dy = \kappa dt \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \kappa dt \Rightarrow \ln y = \kappa t + C$$

$$\Rightarrow y = e^C e^{\kappa t} = \boxed{C e^{\kappa t} = y}$$

$$\text{Άρα } \boxed{y(t) = C e^{\kappa t}}$$

Αν τη χ.6 $t=0$ ο αριθμός των κυττάρων $y(0)=y_0$, τότε

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{\kappa t}}$$

Τώρα, τη χ.6 $t=1 \Rightarrow y(1) = \frac{2}{3} y_0 = y_0 e^{\kappa \cdot 1} = y_0 e^{\kappa}$

$$\text{Άρα } e^{\kappa} = \frac{2}{3} \Rightarrow \kappa = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Επομένως: $\boxed{y(t) = y_0 e^{t \ln(\frac{2}{3})}}$

Θέλουμε τη χ.6 t τέτοια ώστε:

$$y(t) = \frac{1}{3} y_0 = y_0 e^{t \ln(\frac{2}{3})} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} e^{t \ln(\frac{2}{3})} = e^{t \ln(\frac{2}{3})} = \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

δηλ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{1}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln(1/3)}{\ln(2/3)} \approx 2,7 \text{ ημέρες}}$$

#6 Με των βοηθητικά πίνακων, το σύστημα γίνεται:

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}}_A x$$

$$\text{όπου } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\text{Για τις ιδιοτιμές του } A: |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -7-\lambda+7\lambda+2^2+16=0 \Rightarrow \lambda^2+6\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda+3)^2=0 \Rightarrow$$

$$\lambda = -3 \text{ διπλή}$$

για ιδιοδιάνυσμα

$$\text{Αν } \lambda = -3 \Rightarrow Ax = \lambda x = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 - 4x_2 = -3x_1 \Rightarrow -4x_2 = -4x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Αν $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$ π' το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Μια λύση του συστήματος είναι η $\phi_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_u e^{-3x}$

Μια 2η λύση του συστήματος είναι η:

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{-3x} + w e^{-3x}$$

$$\text{με } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

π'

$$(A - \lambda I)w = u \Rightarrow (A + 3I)w = u \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+3 & -4 \\ 4 & -7+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4w_1 - 4w_2 &= 1 \quad (\text{ιδίες}) \\ \text{Αν } w_2 &= 0 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow 4w_1 - 4w_2 &= 1 \\ \text{Αν } w_2 &= 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{-3x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3x}$$

Τέλος, η γενική λύση του συστήματος είναι ίση με

$$\phi = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x e^{-3x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3x} \right\}$$