

Θέματα

1. (2 μονάδες) Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης $x \frac{dy}{dx} = \frac{4(y+1)}{x+2}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(2) = 1$.

2. (α) (1 μονάδα) Αν η χαρακτηριστική εξίσωση μιας ομογενούς δ.ε. με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$(r+2)^3(r^2+36)=0$$

να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.

- (β) (1 μονάδα) Να κατασκευαστεί διαφορική εξίσωση που να έχει γενική λύση τη συνάρτηση. $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} + c_3 e^{-5t} \cos 2t + c_4 e^{-5t} \sin 2t$.

3. (2 μονάδες) Ένας βιολόγος μελετά είδος βακτηρίων που ανακαλύφθηκε πρόσφατα. Τοποθετεί 1.000 από αυτά τα βακτήρια σ' ένα περιβάλλον που το θεωρεί κατάλληλο για την ανάπτυξή τους. Μετά από 10 ώρες παρατηρεί ότι ο αριθμός τους είναι 5.000. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των βακτηρίων είναι ανάλογος του υπάρχοντος πληθυσμού.

(α) Να βρεθεί διαφορική εξίσωση που να εκφράζει το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των βακτηρίων σε σχέση με τον υπάρχοντα πληθυσμό, και στη συνέχεια να λυθεί.

(β) Σε πόσες ώρες θα τριπλασιαστεί ο αριθμός των βακτηρίων;

(γ) Πόσος αναμένεται να είναι ο πληθυσμός των βακτηρίων στο τέλος μιας βδομάδας; Ενός μήνα; Στο τέλος ενός χρόνου;

4. (2 μονάδες) Να λυθεί το Π.Α.Τ. με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace: $y' + 4y = e^{-3x}$, $y(0) = 0$.

5. (2 μονάδες) Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με την βοήθεια πινάκων.

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = -3x_1 + 5x_2 \end{cases}$$