

Ασκήσεις επανάληψης

1. (χωριζομένων μεταβλητών) Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης:

(α) $y' = e^{x-2y-3}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(3) = 0$.

(β) $x^2 dx + (y^2 + 1) dy = 0$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 0$.

(γ) $\frac{dy}{dx} = y^2 e^{3x} - e^{3x} y$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$.

2. (ομογενείς) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

(α) $xydy - (y^2 - x^2)dx = 0$ (β) $(4x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

(γ) $x \frac{dy}{dx} = y - 4xe^{\frac{y}{x}}$ (δ) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - y^2}{x^2}$

3. (γραμμικές) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

(α) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

(β) $y' + \frac{1}{x}y = x + e^{x^2}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$.

(γ) $(x^2 - 1)y' + 2xy = 4$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 3$.

4. (ακριβείς) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

(α) $(4x^3 + 5y)dx + (5x + y + 1)dy = 0$ (β) $3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy = 0$

(γ) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xe^y}{x^2 e^y + x}$

5. (Bernoulli) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

(α) $y' - \frac{1}{x}y = y^9$ (β) $y' + x^5 y = x^5 y^7$ (γ) $y' + \frac{2}{x}y = x^2 y^2 \sin x$

(δ) $y' + \frac{1}{x}y = y^2$ (ε) $xy' + y = x^2 y^2 \ln x$

6. Η ατμοσφαιρική πίεση (πίεση του αέρα γύρω μας) ελαττώνεται με ρυθμό ανάλογο του ύψους από την επιφάνεια της θάλασσας. Η πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας είναι ίση με 1013hPa. Ακόμα, η πίεση ελαττώνεται 14% κάθε 1000m.

(α) Να βρεθεί μια έκφραση για την πίεση του αέρα σε συνάρτηση του ύψους (λύνοντας κατάλληλη διαφορική εξίσωση).

(β) Να βρεθεί η πίεση του αέρα στην οροφή του Sears Tower Building (527m).

(γ) Να βρεθεί η πίεση του αέρα στην κορυφή του Λευκού όρους/Άλπεις (4810 m).

7. Μια κρύα μπίρα βγαίνει από το ψυγείο μία ζεστή καλοκαιρινή ημέρα και τοποθετείται σε δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία ίση με 27°C. Η θερμοκρασία της μπίρας ήταν 4,4°C όταν βγήκε από το ψυγείο και 10°C μετά από 20 λεπτά.

(α) Σε πόσο χρόνο η θερμοκρασία της θα φτάσει από τους 15,5°C; Τους 28 °C;

(β) Ποιά θα είναι η θερμοκρασία της μπίρας μετά από ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα;

8. Να λυθούν τα παρακάτω:

(α) $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

(β) $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(γ) $y'' - 12y' + 36y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

(δ) $y''' - 10y'' - 4y' + 40y = 0$

(ε) $y^{(4)} - 7y'' + 12y = 0,$

9. Αν η χαρακτηριστική εξίσωση μιας ομογενούς δ.ε. με σταθερούς συντελεστές είναι αυτή που δίνεται παρακάτω, να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε.

(α) $(r-1)(r-2)=0$ (β) $(r-1)^2=0$ (γ) $(r-1)^2(r^2+5)=0$

(δ) $(r-1)^2(r+1)(r+4)=0$ (ε) $(r-1)^2(r+1)(r+4)(r^2-2r+5)=0$

10. Να κατασκευαστούν διαφορικές εξισώσεις που να έχουν γενικές λύσεις τις παρακάτω συναρτήσεις.

(α) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

(β) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

(γ) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t}$

(δ) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 e^{-t} \cos 3t + c_4 e^{-t} \sin 3t$

Καλή επιτυχία