

A. Τύπος

Ακ. έτος 2020-21

Ακρίβεια επιλογής

χωρίς
μεταβλητή

① (β) $(y^2+1)dy = -x^2 dx \xrightarrow{XM} \int (y^2+1)dy = -\int x^2 dx \Rightarrow$

ΓΕΝΙΚΗ
ΛΥΣΗ $\frac{y^3}{3} + y = -\frac{x^3}{3} + C$

Αν $x=1 \Rightarrow y=0$ οπότε
 $\frac{0^3}{3} + 0 = -\frac{1^3}{3} + C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

Άρα γενική ΠΑΤ. $\frac{y^3}{3} + y = -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$

Εφαρμογή:
Υπόδειξη

(α) $\frac{1}{e^{2y}} dy = e^{x-3} dx \Rightarrow \dots$

(γ) $\frac{dy}{dx} = (y^2-y)e^{3x} \Rightarrow \frac{1}{y(y-1)} dy = e^{3x} dx \Rightarrow \dots$
 $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$ (ανάστροφη αλυσίδα)

ομογενής

② (β) $xydy = (4x^2+y^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2+y^2}{xy} = 4\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

ομογενής

Θέτουμε $\frac{y}{x} = u \Rightarrow u = y/x \Rightarrow y' = u + xu'$

$u + xu' = 4\frac{1}{u} + u \Rightarrow udu = \frac{1}{x} 4dx \Rightarrow \int udu = 4 \int \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow \frac{u^2}{2} = 4 \ln x + C \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} = 4 \ln x + C \Rightarrow y^2 = 8x^2 \ln x + 2Cx^2$
ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: (α) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \Rightarrow u + xu' = u - \frac{1}{u} \Rightarrow \dots$

(γ) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 4e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow u + xu' = u - 4e^u \Rightarrow \dots$
χωρίς μεταβλητή

(δ) $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow u + xu' = 2 - u^2 \Rightarrow 2 - u - u^2 = xu' \Rightarrow \dots$
 $\Rightarrow -\frac{1}{u^2+u-2} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \dots$ (ανάστροφη αλυσίδα)

$$y' + p(x)y = g(x) \quad \text{για την } \mu(x) = e^{\int p(x) dx} \quad y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + C}{\mu(x)}$$

3.

$$(a) \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y = \frac{\int x^2 \frac{\sin x}{x^2} dx + C}{x^2} = \frac{-\cos x + C}{x^2} = y \quad \text{για την } \mu(x)$$

At $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 4$

$$\frac{-\cos \frac{\pi}{2} + C}{\frac{\pi^2}{4}} = 4 \Rightarrow \frac{4C}{\pi^2} = 4 \Rightarrow C = \pi^2$$

After, given P.T.T:

$$y = \frac{-\cos x + \pi^2}{x^2}$$

Υποδείξεις: (b) $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$
 $y = \frac{\int x(x + e^{x^2}) dx + C}{x} = \dots$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \dots$$

$u = x^2$
 $du = 2x dx$

$$(c) y' + \frac{2x}{x^2-1} y = \frac{4}{x^2-1}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx} = e^{\ln(x^2-1)} = x^2-1$$

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} dx = \ln(x^2-1)$$

$$y = \frac{\int (x^2-1) \frac{4}{x^2-1} dx + C}{x^2-1} = \frac{\int 4 dx + C}{x^2-1} = \dots$$

$$\left(\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C \right)$$

4. $M = 4x^3 + 5y$ $N = 5x + y + 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 5 \quad \neq \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 5 \quad \text{και} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ακριβώς}$$

Γενική λύση: $\phi(x, y) = C$

Ισχύουν

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N \quad (2)$$

Ολοκληρώνω την (1) ως προς x:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int M(x, y) dx \Rightarrow$$

$$\phi(x, y) = \int (4x^3 + 5y) dx = \frac{4x^4}{4} + 5yx + h(y)$$

$$\text{δηλ. } \phi(x, y) = x^4 + 5yx + h(y) \quad (3)$$

Παραγωγίζω την (3) ως προς y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 5x + h'(y) \stackrel{(2)}{=} 5x + y + 1 \Rightarrow h'(y) = y + 1$$

$$\Rightarrow h(y) = \int (y + 1) dy = \frac{y^2}{2} + y = c$$

Άρα γενική λύση: $\phi(x, y) = c$ ή

$$\underbrace{x^4 + 5xy + \frac{y^2}{2} + y}_{\substack{M \\ N}} = c$$

Υπόδειξη

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial y} (\underbrace{3x^2y^2}_M) = 6x^2y = \frac{\partial}{\partial x} (\underbrace{2x^3y}_N)$$

ακριβώς

γενική λύση
 $\phi(x, y) = c$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M = 3x^2y^2 \quad (1) \rightarrow \phi(x, y) = \int 3x^2y^2 dx = \frac{3x^3}{3}y^2 + h(y) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N = 2x^3y \quad (2)$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^3y + h'(y) \stackrel{(2)}{=} 2x^3y$$

$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c \quad (4)$$

Άρα $\phi(x, y) = c$

$$\boxed{x^3y^2 = c} \quad \text{γενική λύση}$$

$$(8) \quad 2xe^y dx + (x^2y + x) dy = 0 \Rightarrow \text{ανάλογο}$$

$P(h)$ = ατμοσφαιρική πίεση σε ύψος h m
από την επιφάνεια της θαλάσσης

#5

$$(α) \frac{dP}{dh} = -\rho \Rightarrow \frac{1}{P} dP = -\rho dh \Rightarrow \int \frac{1}{P} dP = \int -\rho dh \Rightarrow \ln P = -\rho h + C \Rightarrow P(h) = e^{-\rho h + C} = e^C \cdot e^{-\rho h} = C e^{-\rho h}$$

ή $P(h) = C e^{-\rho h}$
για $h=0 \Rightarrow P(0) = 1013 = C e^{-\rho \cdot 0} \Rightarrow C = 1013$

Σε $h=1000$ m εγγύτητα 14% άρα η πίεση ίση
 $1013 \times 0.86 = 871.18$

δηλ $h=1000$ m $\Rightarrow P(1000) = 871.18 = 1013 e^{-\rho \cdot 1000} \Rightarrow$

$$\rho = \frac{1}{1000} \ln\left(\frac{871.18}{1013}\right) \approx -0.00015$$

Άρα $P(h) = 1013 e^{-0.00015h}$

(β) $P(527) = 1013 \cdot e^{-0.00015 \times 527} \approx 936$ hPa

(γ) $P(4810) = 1013 \cdot e^{-0.00015 \times 4810} \approx 492$ hPa

#6 Αν $\theta(t)$ = θερμοκρασία μπύρας τη χρονική στιγμή t
τότε T = θερμοκρασία διαβάσιου = 27

(Νόμος γάλλης Νεύτωνα) $\frac{d\theta}{dt} = -\tau(\theta - T) \Rightarrow \frac{1}{\theta - T} d\theta = -\tau dt \Rightarrow \int \frac{1}{\theta - T} d\theta = \int -\tau dt \Rightarrow$

$$\ln(\theta - T) = -\tau t + C \Rightarrow \theta - T = e^{-\tau t + C} = e^C e^{-\tau t} = C e^{-\tau t}$$

ή $\theta - T = C e^{-\tau t} \Rightarrow \theta(t) = T + C e^{-\tau t} = 27 + C e^{-\tau t}$

Αν $t=0 \Rightarrow \theta(0) = 27 + C e^{0} = 4.4 \Rightarrow C = 4.4 - 27 = -22.6$

δηλ $\theta(t) = 27 - 22.6 e^{-\tau t}$

Αν $t=10 \Rightarrow \theta(10) = 10 = 27 - 22.6 e^{-\tau \cdot 10} \Rightarrow \tau = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{17}{22.6}\right) \approx -0.0285$

Αρα: $\theta(t) = 27 - 22.6 e^{-0.0285t}$

(α) $\theta(15.5) = 27 - 22.6 e^{-0.0285t} = 15.5 \Rightarrow t = -\frac{1}{0.0285} \ln\left(\frac{15.5-27}{22.6}\right)$
 $t \approx 23.7$ λεπτά.

(β) μεγάλο χρονικό διάστημα σημαίνει $t \rightarrow \infty$, άρα

$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (27 - 22.6 e^{-0.0285t}) = 27$ (since $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$)

Άρα η θερμοκρασία της γύψας μπορεί να φτάσει μέχρι 27°C (επομένως, δεν θα φτάσει ποτέ τους 28°C) (θερμότητα διασποράς)

#5 (α) $y' - \frac{1}{x}y = y^9$ $n=9$, θέτουμε $z = y^{1-n} = y^{1-9} = y^{-8} = \frac{1}{y^8}$
 ή η δε γίνεται $z' - (1-9)\frac{1}{x}z = (1-9) \cdot 1 \Rightarrow$
 $z' + \frac{8}{x}z = -8$ γραμμική 1ης τάξης
 $\mu(x) = e^{\int \frac{8}{x} dx} = e^{8 \ln x} = e^{\ln x^8} = x^8$
 $z' + \frac{8}{x}z = -8$
 $z = \frac{-\int 8x^8 dx + C}{x^8} = \frac{-\frac{8}{9}x^9 + C}{x^8} = -\frac{8}{9}x + \frac{C}{x^8}$
 Τέλος $z = \frac{1}{y^8} = -\frac{8}{9}x + \frac{C}{x^8}$ γίνου.

(β) θέτουμε $z = y^{1-7} = \frac{1}{y^6}$ ή η δε γίνεται: $z' - 6x^5 z = -6x^5 \Rightarrow \dots$

(γ) θέτουμε $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ ή η δε γίνεται: $z' - \frac{2}{x}z = -x^2 \sin x$

(δ) θέτουμε $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ ή η δε γίνεται: $z' - \frac{1}{x}z = -1$

(ε) θέτουμε $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ } ή η δε γίνεται $z' - \frac{1}{x}z = -x \ln x$
 $y' + \frac{1}{x}y = x y^2 \ln x$

$$\textcircled{\Delta\epsilon} \quad 6y'' - 5y' + y = 0$$

$\frac{a}{6}$

$\textcircled{8} \quad \alpha$ χαρακτηριζόμενη
εξίσωση

$$6\tau^2 - 5\tau + 1 = 0 \quad (\text{τριώνυμο})$$

ρίζες

$$\tau_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow \frac{1}{3} \end{matrix}$$

γενική λύση: $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$ (ρίζες αλγες)

$$y(0) = C_1 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + C_2 e^{\frac{1}{3} \cdot 0} = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3} C_2 e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow$$

$$y'(0) = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 = -1 \quad \text{ή} \quad C_1 + \frac{2}{3} C_2 = -2 \quad \textcircled{2}$$

αφαιρώντας $\frac{1}{3} C_2 = 3 \Rightarrow$
 $C_2 = 9$

και $C_1 + 9 = 1 \Rightarrow C_1 = -8$

Άρα λύση: $y = -8e^{\frac{1}{2}x} + 9e^{\frac{1}{3}x}$

$\textcircled{6} \quad \chi \epsilon \quad \tau^2 - 4\tau + 13 = 0$

$$\tau_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

(ρίζες μιγαδικές) $= \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$

γενική λύση $y(x) = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$

(για Π.Α.Τ, ανάλοχα)

$\textcircled{8} \quad \chi \epsilon \quad \tau^2 - 12\tau + 36 = 0 \Rightarrow (\tau - 6)^2 = 0 \Rightarrow \tau = 6$ διπλή

γενική λύση $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x}$

$\uparrow$ λόγω διπλής

(για Π.Α.Τ $\Rightarrow$ ανάλοχα)

⑧ x.ε $\tau^3 - 10\tau^2 - 4\tau + 40 = 0 \Rightarrow$
 $\tau^2(\tau - 10) - 4(\tau - 10) = 0 \Rightarrow$
 $(\tau - 10)(\tau^2 - 4) = 0 \Rightarrow (\tau - 10)(\tau - 2)(\tau + 2) = 0$
 ρίζες $\tau = 10, \tau = 2$ κ' $\tau = -2$

γενική λύση:

$$y = C_1 e^{10x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

⑨ $\tau^4 - 7\tau^2 + 12 = 0$. Θέτουμε $w = \tau^2$ οπότε ($w^2 = \tau^4$)
 (διτετραγωνική)
 $w^2 - 7w + 12 = 0$

ρίζες $w_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \rightarrow 4$
 $\rightarrow 3$

Άρα $\tau^2 = w = 4 \Rightarrow \tau = \pm 2$
 $\tau^2 = w = 3 \Rightarrow \tau = \pm \sqrt{3}$ } $\Rightarrow$

γενική
λύση

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x}$$

⑨ (α) x.ε $(\tau - 1)(\tau - 2) = 0 \Rightarrow$ ρίζες $\tau = 1, \tau = 2$

γενική
λύση: $y = C_1 e^{1x} + C_2 e^{2x}$

(β) x.ε $(\tau - 1)^2 = 0$

$\tau = 1$ διπλή

γενική
λύση $y = C_1 e^{1x} + C_2 x e^{1x}$

(γ) x.ε $(\tau - 1)^2(\tau^2 + 5) = 0$

ρίζες: $\tau = 1$ διπλή

ε' $\tau^2 = -5 \Rightarrow \tau = \pm \sqrt{5}i = 0 \pm \sqrt{5}i$

γενική λύση:

$$y = C_1 e^{0x} \cos \sqrt{5}x + C_2 e^{0x} \sin(\sqrt{5}x) + C_3 e^x + C_4 x e^x$$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{5}x) + C_2 \sin(\sqrt{5}x) + C_3 e^x + C_4 x e^x$$

(δ) $(\tau - 1)^2(\tau + 1)(\tau + 4) = 0$

ρίζες $\tau = 1$ διπλή, $\tau = -1, \tau = -4$

γ.λ $y = C_1 e^{1x} + C_2 x e^{1x} + C_3 e^{-x} + C_4 e^{-4x}$

$$(\tau-1)^2(\tau+1)(\tau^2-2\tau+5)=0$$

(ε) ρίζες: $\tau=1$ διπλή
 $\tau=-1$
 $\tau=-4$
 $\tau=1 \pm 2i$

για $\tau^2-2\tau+5=0$ $\sqrt{-16}$ (α/8)
 ρίζες $\frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$
 $\tau_{1,2} = 1 \pm 2i$

γενική λύση: $y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 e^{-4ix} + C_5 e^{ix} \cos 2x + C_6 e^{ix} \sin 2x$

(10) (α) $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$ η χε πρέπει να έχει ρίζες το 3
 & το (-1), άρα χε

$$(\tau-3)(\tau-(-1))=0 \Rightarrow (\tau-3)(\tau+1)=0 \Rightarrow (\text{ρίζες})$$

$$\tau^2+\tau-3\tau-3=0$$

$$\tau^2-2\tau-3=0 \Rightarrow$$

διαφορική $y''-2y'-3y=0$
 εξίσωση

(β) $y = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$

διπλή
 ρίζα το 3

χε $(\tau-3)(\tau-3)=0 \Rightarrow$
 $\tau^2-6\tau+9=0$

άρα δ.ε $y''-6y'+9y=0$

(γ) $y = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + C_3 e^{2t}$

διπλή ρίζα
 το 1 ρίζα
 το 2

άρα χε $(\tau-1)^2(\tau-2)=0 \Rightarrow$
 $(\tau^2-2\tau+1)(\tau-2)=0$
 $\tau^3-2\tau^2+\tau-2\tau^2+4\tau-2=0$
 $\tau^3-4\tau^2+5\tau-2=0$

άρα δ.ε $y'''-4y''+5y'-2y=0$

(δ) $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t} \cos 3t + C_4 e^{-t} \sin 3t$

ρίζα
 2 ρίζα
 1

ρίζα το $-1 \pm 3i$
 $(\tau-(-1+3i))(\tau-(-1-3i))$ $\text{ρίζες } (1^2=-1)$
 $\tau^2+2\tau+10$

$$\lambda \in (\tau-2)(\tau-1)(\tau^2+2\tau+10)=0 \Rightarrow$$

$$(\tau^2-3\tau+2)(\tau^2+2\tau+10)=0$$

$$\tau^4-3\tau^3+2\tau^2+2\tau^3-6\tau^2+4\tau+10\tau^2-30\tau+20=0$$

$$\tau^4-\tau^3-6\tau^2-26\tau+20=0$$

para $\delta \in$

$$y^{(4)}-y'''-6y''-26y'+20y=0$$