

1. (15 μονάδες) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε τη διάσταση και μια βάση
- i) για τον χώρο γραμμών του $\mathbb{A}$ ii) για τον μηδενοχώρο του $\mathbb{A}$.
2. (10 μονάδες) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε το (2,3) στοιχείο του αντιστρόφου ως πηλίκο δύο οριζουσών.
3. (15 μονάδες) Εξετάστε αν το $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $\mathbb{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
4. (20 μονάδες) Θέλουμε να βρεθεί το τόξο $y = a + b2^x$ που είναι βέλτιστο τόξο παρεμβολής για τα σημεία $(x, y) = (0, 6), (1, 4)$ και $(2, 0)$.
- (α') (5 μονάδες) Γράψτε τρεις εξισώσεις οι οποίες θα ικανοποιούνταν αν το τόξο διερχόταν από τα δοσμένα σημεία.
- (β') (15 μονάδες) Βρείτε τους συντελεστές a, b που ελαχιστοποιούν το σφάλμα παρεμβολής.
5. (20 μονάδες) Εάν S είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbb{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση για τον $S^\perp$.
6. (20 μονάδες) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$
- (α') διαγωνοποιείστε τον πίνακα $\mathbb{A}$ και βρείτε τον $\mathbb{A}^{2019}$,
- (β') βρείτε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$,
- (γ') βρείτε ένα στοχαστικό διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον πίνακα $\mathbb{A}$,
- (δ') βρείτε ένα πίνακα $\mathbb{B}$ με $\mathbb{B}^{2019} = \mathbb{A}$.

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες. Απαντήσεις που περιέχουν μόνο το αποτέλεσμα ή είναι της μορφής: μετά από πράξεις βρίσκουμε... δεν θα βαθμολογούνται.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 55 λεπτά.

Καλή επιτυχία