

Όνοματεπώνυμο : .....

Αριθμός Μητρώου : ..... Σχολή.....

### Οδηγίες

- Συμπληρώστε, **αμέσως**, τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο και στο έντυπο λύσεων.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση **κάποιου** βοηθήματος καθώς και των κινητών τηλεφώνων σας.
- Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά **όλη** η δουλειά σας.  
Διαφορετικά το πρόβλημα δεν βαθμολογείται.
- Το έντυπο αυτό των εκφωνήσεων των προβλημάτων θα παραδοθεί μαζί με το έντυπο των λύσεων.  
Διαφορετικά το διαγώνισμα δεν μπορεί να βαθμολογηθεί.
- Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι **2** ώρες και **40** λεπτά.

### Πρόβλημα 1: (2,3 μονάδες)

(α) Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις

1. Εάν για το πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  η διαδικασία της απαλοιφής Gauss χωρίς οδήγηση ολοκληρωθεί με επιτυχία, οπότε έχει τη διάσπαση  $A = LU$  με τον κάτω τριγωνικό πίνακα  $L$  με μονάδες στη διαγώνιο και τον άνω τριγωνικό πίνακα  $U$ , τότε δεν μπορεί να υπάρξει άλλη διάσπαση του της ίδιας μορφής.
2. Ο  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ομαλός πίνακας εάν και μόνο εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα δεν έχει μηδενική ρίζα.
3. Ο  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ένας ομαλός τριγωνικός πίνακας εάν και μόνο εάν δεν έχει μηδενική τιμή σε θέση της διαγώνιου του.
4. Ο  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  πίνακας έχει τάξη ίση με  $n$  αν και μόνο αν η μηδενική λύση είναι η μοναδική λύση του ομογενούς γραμμικού συστήματος με πίνακα συντελεστών τον  $A$ .
5. Εάν ο  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι ένας ομαλός και αυτοδύναμος πίνακας τότε είναι ένας μεταθετικός πίνακας.

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Πρόβλημα 2: (1,2 μονάδες)

Να βρεθούν η τάξη του πίνακα  $A$ , μια βάση και η διάσταση για τους χώρους στηλών και μηδενοχώρου του, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Πρόβλημα 3 :**(1,5 μονάδες)

Έστω το γραμμικό σύστημα, με αγνώστους  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\x_1 - x_2 + 2x_4 &= 2 \\-2x_1 + (\kappa - 1)x_4 &= \kappa - 3\end{aligned}$$

(α) Αν ο πίνακας  $A$  είναι αυτός των συντελεστών των αγνώστων του παραπάνω γραμμικού συστήματος να υπολογιστεί ο μεταθετικός πίνακας  $P$ , ο κάτω τριγωνικός πίνακας  $L$  και ο άνω τριγωνικός πίνακας  $U$  που να ικανοποιούν την σχέση  $PA = LU$  σύμφωνα με τη διαδικασία της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.

(β) Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\kappa \in \mathbb{R}$  το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση, για ποιες έχει άπειρες λύσεις και για ποιες δεν έχει λύση;

(γ) Για την περίπτωση ύπαρξης μοναδικής λύσης ποια είναι αυτή ;

**Πρόβλημα 4:**(1,3 μονάδες)

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογιστούν όλα τα ιδιοδιανύσματα του.

(β) Να υπολογιστεί ο δείκτης κατάστασης του πίνακα  $A$  ως προς την ένα νόρμα κάνοντας χρήση του θεωρήματος Caley-Hamilton για τον υπολογισμό του αντιστρόφου πίνακα.

**Πρόβλημα 5:**(1 μονάδα)

Έστω το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned}5x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\-x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3\end{aligned}$$

Να υπολογιστεί η λύση του παραπάνω συστήματος κάνοντας χρήση της πιο αποδοτικής μεθόδου επίλυσης.

**Πρόβλημα 6:**(1,5 μονάδες)

Έστω το γραμμικό σύστημα, με αγνώστους  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 &= 5 \\2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\-3x_2 + 4x_3 &= 1\end{aligned}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης Jacobi συγκλίνει.

(β) Υπολογίστε την πρώτη προσέγγιση της λύσης του γραμμικού συστήματος αν το διάνυσμα  $[0 \ 1 \ 1]^T$  είναι η αρχική προσέγγιση της.

**Πρόβλημα 7:**(1,2 μονάδες)

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(α) Υπολογίστε το αποτέλεσμα της πράξης  $Ae_2$  και  $e_4^T A$  αν  $e_2, e_4 \in \mathbb{R}^5$ .

(β) Υπολογίστε την άπειρη νόρμα του πίνακα  $A$  καθώς και την νόρμα ένα του αναστρόφου του.

(γ) Υπολογίστε το αποτέλεσμα της πράξης  $yAx$  αν  $x = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  και  $y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$ .