

Όνοματεπώνυμο :

Αριθμός Μητρώου :

Οδηγίες

- Συμπληρώστε, **αμέσως**, τα στοιχεία σας στον παραπάνω χώρο και στο έντυπο λύσεων.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση **κάποιου** βοηθήματος καθώς και των κινητών τηλεφώνων σας.
- Σε όλα τα προβλήματα πρέπει να φαίνεται καθαρά **όλη** η δουλειά σας.
Διαφορετικά το πρόβλημα δεν βαθμολογείται.
- Το έντυπο αυτό των εκφωνήσεων των προβλημάτων θα παραδοθεί μαζί με το έντυπο των λύσεων.
Διαφορετικά το διαγώνισμα δεν μπορεί να βαθμολογηθεί.
- Ο χρόνος του διαγωνίσματος είναι **2** ώρες και **30** λεπτά.

Μην σημειώνετε μεταξύ των παρακάτω γραμμών

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1		/18 μονάδες
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2		/19 μονάδες
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3		/15 μονάδες
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4		/18 μονάδες
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5		/15 μονάδες
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6		/15 μονάδες
ΣΥΝΟΛΟ		/100 μονάδες

Πρόβλημα 1:

(α) Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις

1. Ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας ομαλός συμμετρικός πίνακας αν και μόνο αν ο αντίστροφος του A είναι συμμετρικός.
2. Εάν ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας ομαλός πίνακας τότε $k_1(A) \geq 1$.
3. Ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας αν και μόνο αν ο αντίστροφος του A είναι και ο ανάστροφος του.
4. Ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι θετικά ορισμένος (διευθετιμένος) πίνακας αν και μόνο αν ο ανάστροφος του είναι θετικά ορισμένος (διευθετιμένος) πίνακας .
5. Εάν ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας ομαλός πίνακας τότε η ορίζουσα του αντίστροφου του A πολλαπλασιασμένη με την ορίζουσα του A ισούται με 1.

(β) Να δικαιολογηθεί χωρίς όμως να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ότι είναι ίση με μηδέν.

Πρόβλημα 2:

Έστω το γραμμικό σύστημα, με αγνώστους $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x + y - z = 1$$

$$x + 2y + z = 3$$

$$x + y + (\kappa^2 - 26)z = \kappa$$

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$ το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση, για ποιες έχει άπειρες λύσεις και για ποιες δεν έχει λύση;

Πρόβλημα 3 :

Να βρεθούν η τάξη του πίνακα A , μια βάση και η διάσταση του χώρου στηλών και του μηδενохώρου του, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 0 & 2 & -12 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 4:

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(α) Να εξεταστεί αν ο πίνακας A μπορεί να διαγωνοποιηθεί. Σε περίπτωση θετικής απάντησης πώς εκφράζεται η αυτή η σχέση ;

(β) Ισχύει ότι $A^{-1} = \frac{1}{16}A^2 - \frac{1}{2}A + \frac{5}{4}I$;

(γ) Ποιος είναι ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A ως προς την άπειρη νόρμα ;

Πρόβλημα 5:

Έστω το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 34 \\ 3x_1 - 9x_2 - 5x_3 + x_4 - 11x_5 &= -20 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 5x_5 &= -8 \end{aligned} \tag{1}$$

Να υπολογιστεί η διανυσματική λύση $\vec{x}$ του συστήματος, γράφοντας το σύστημα (1) στη μορφή $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της γενικευμένης απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.

Πρόβλημα 6:

Έστω το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T$ καθώς και το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{u} + \|\vec{u}\|_2 \vec{e}_1$.

(α) Αποδείξτε ότι πίνακας $B = I - \frac{2}{\vec{v}^T \vec{v}} \vec{v} \vec{v}^T$ είναι συμμετρικός και ορθογώνιος.

(β) Να βρεθούν οι $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$ και $\|B^{-1}\|_1$ καθώς οι τιμές των οριζουσών των πινάκων B , B^T και B^{-1} .