

Εάν έχουμε το $m \times n$ σύστημα

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

θέλουμε να γνωρίζουμε αν έχει λύση και εάν έχει πόσες λύσεις έχει. Το σύστημα σε μορφή πινάκων γράφεται ως $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ όπου $\mathbf{x}$ και $\mathbb{b}$ είναι οι $n \times 1, m \times 1$ πίνακες

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ας δούμε τη λύση από διανυσματική πλευρά. Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ γράφεται ως

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Εάν πάρουμε τα n -διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ που είναι οι στήλες του πίνακα $\mathbb{A}$ τότε η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι, αν τα $x_1, \dots, x_n$ είναι μια λύση του συστήματος τότε το διάνυσμα $\mathbb{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του $\mathbb{A}$. Επομένως στην περίπτωση που το $\mathbb{b}$ δεν ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν οι στήλες του $\mathbb{A}$ το σύστημα δεν έχει λύση.

Ορισμός 1. Έστω $A = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε

- 1) ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα διανύσματα γραμμές

$$\vec{u}_i = [a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad a_{i,3} \quad \cdots \quad a_{i,n}]^T = \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ονομάζεται χώρος γραμμών του A και συμβολίζεται $\text{Row}(A)$.

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{A} = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε

- 1) ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα διανύσματα γραμμές

$$\vec{u}_i = [a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad a_{i,3} \quad \cdots \quad a_{i,n}]^\top = \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ονομάζεται χώρος γραμμών του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται $\text{Row}(\mathbb{A})$.

- 2) ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα διανύσματα στήλες

$$\vec{u}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ a_{3,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ονομάζεται χώρος στηλών του $\mathbb{A}$, και συμβολίζεται με $\text{Col}(\mathbb{A})$.

Παραδείγματα 1. ι) Εάν πάρουμε τον ταυτοτικό 3×3 πίνακα $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

τότε

$$\text{Row}(I_3) = \text{Col}(I_3) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Παραδείγματα 1. i) Εάν πάρουμε τον ταυτοτικό 3×3 πίνακα $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

τότε

$$\text{Row}(I_3) = \text{Col}(I_3) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3.$$

ii) Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

εφόσον

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 5-4 \\ -3-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Είδαμε ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν το b είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A . Άρα ενδιαφερόμαστε να ξέρουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ που παράγουν οι στήλες του A . Είναι άμεσο ότι αν παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^m$ τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b . Από τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Είδαμε ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν το b είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A . Άρα ενδιαφερόμαστε να ξέρουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ που παράγουν οι στήλες του A . Είναι άμεσο ότι αν παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^m$ τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b . Από τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2. *Εάν $A = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ είναι ένας $m \times n$ -πίνακας τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ αν και μόνο ο χώρος στηλών του A είναι ο $\mathbb{R}^m$.*

Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A , έχουμε δει ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A , έχουμε δει ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A τότε μηδενοχώρος του A , συμβολικά $N(A)$, είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τις λύσεις του συστήματος $Ax = 0$. Έτσι έχουμε

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A , έχουμε δει ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A τότε μηδενοχώρος του A , συμβολικά $N(A)$, είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τις λύσεις του συστήματος $Ax = 0$. Έτσι έχουμε

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος μας χρειάζεται για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$.

Θεώρημα 4. Έστω w_0 μια λύση του συστήματος $Ax = b$. Τότε ένα διάνυσμα $c \neq w_0$ είναι λύση του συστήματος $Ax = b$ αν και μόνο αν το $c - w_0$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$.

Απόδειξη. Εάν c λύση του $Ax = b$ τότε

$$Ac = b = Aw_0 \Rightarrow A(c - w_0) = 0.$$

Έτσι έχουμε ότι το $c - w_0$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$.

Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A , έχουμε δει ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε τον $m \times n$ πίνακα A τότε μηδενοχώρος του A , συμβολικά $N(A)$, είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τις λύσεις του συστήματος $Ax = 0$. Έτσι έχουμε

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος μας χρειάζεται για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$.

Θεώρημα 4. Έστω w_0 μια λύση του συστήματος $Ax = b$. Τότε ένα διάνυσμα $c \neq w_0$ είναι λύση του συστήματος $Ax = b$ αν και μόνο αν το $c - w_0$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$.

Απόδειξη. Εάν c λύση του $Ax = b$ τότε

$$Ac = b = Aw_0 \Rightarrow A(c - w_0) = 0.$$

Έτσι έχουμε ότι το $c - w_0$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$.

Αντιστρόφως έστω ότι το $c - w_0$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$. Τότε

$$A(c - w_0) = 0 \Rightarrow Ac = Aw_0 = b$$

και άρα το c είναι λύση του ομογενούς.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει ότι εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε το σύνολο των λύσεων του $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $w_0 + y$ όπου y λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει ότι εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε το σύνολο των λύσεων του $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $w_0 + y$ όπου y λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Ορισμός 5. Μια λύση w του συστήματος $Ax = b$ την ονομάζουμε ειδική λύση.

Τα παραπάνω μας δίνουν την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1. Εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε ένα διάνυσμα y είναι λύση του συστήματος $Ax = b$ αν και μόνο αν $y = w_0 + w$ για κάποιο $w \in N(A)$.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει ότι εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε το σύνολο των λύσεων του $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $w_0 + y$ όπου y λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Ορισμός 5. Μια λύση w του συστήματος $Ax = b$ την ονομάζουμε ειδική λύση.

Τα παραπάνω μας δίνουν την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1. Εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε ένα διάνυσμα y είναι λύση του συστήματος $Ax = b$ αν και μόνο αν $y = w_0 + w$ για κάποιο $w \in N(A)$.

Έχουμε δει ότι αν έχουμε ένα $m \times n$ -σύστημα $Ax = 0$ με εξισώσεις λιγότερους από αγνώστους τότε το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει ότι εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε το σύνολο των λύσεων του $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $w_0 + y$ όπου y λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Ορισμός 5. Μια λύση w του συστήματος $Ax = b$ την ονομάζουμε ειδική λύση.

Τα παραπάνω μας δίνουν την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1. Εάν w_0 είναι μια λύση του συστήματος $Ax = b$ τότε ένα διάνυσμα y είναι λύση του συστήματος $Ax = b$ αν και μόνο αν $y = w_0 + w$ για κάποιο $w \in N(A)$.

Έχουμε δει ότι αν έχουμε ένα $m \times n$ -σύστημα $Ax = 0$ με εξισώσεις λιγότερους από αγνώστους τότε το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις.

Ας δούμε πως προκύπτει αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας υποχώρους του $\mathbb{R}^m$. Εάν έχουμε το $m \times n$ -σύστημα $Ax = 0$ με εξισώσεις λιγότερους από αγνώστους, $m < n$, τότε οι στήλες είναι n -διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Επειδή $m < n$ έχουμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα, και επομένως έχουμε μια μη-μηδενική λύση του συστήματος.

Θέλουμε να βρούμε ένα τρόπο να βρίσκουμε τον χώρο γραμμών, στηλών και τον μηδενικό χώρο ενός πίνακα A . Για να βρούμε τους παραπάνω υποχώρους θα χρησιμοποιήσουμε την LU-παραγοντοποίηση του πίνακα A .

Θέλουμε να βρούμε ένα τρόπο να βρίσκουμε τον χώρο γραμμών, στηλών και τον μηδενοχώρο ενός πίνακα $\mathbb{A}$. Για να βρούμε τους παραπάνω υποχώρους θα χρησιμοποιήσουμε την $\mathbb{LU}$ -παραγοντοποίηση του πίνακα $\mathbb{A}$.

Ας θυμηθούμε ότι ξεκινώντας από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πίνακες παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$. Έστω $E_1, \dots, E_k$ οι στοιχειώδεις πίνακες που χρησιμοποιήσαμε για την παραγοντοποίηση του $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{LU}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_1} \mathbb{U}_1 \xrightarrow{E_2} \mathbb{U}_2 \cdots \xrightarrow{E_\lambda} \mathbb{U}_\lambda \xrightarrow{E_{\lambda+1}} \mathbb{U}_{\lambda+1} \cdots \xrightarrow{E_k} \mathbb{U}_k = \mathbb{U}.$$

Κάθε πίνακας E_λ είναι είτε πίνακας αλλαγής γραμμών, $P_{i,j}$ είτε πίνακας $E_{i,j}(\lambda_{i,j})$.

Πρόταση 2. Οι πίνακες A και U έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών. Γενικότερα δύο γραμμικά ισοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

Πρόταση 2. Οι πίνακες $\mathbb{A}$ και $\mathbb{U}$ έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών. Γενικότερα δύο γραμμικά ισοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

Από την παραπάνω πρόταση για να βρούμε μια βάση του χώρου γραμμών του πίνακα $\mathbb{A}$ αρκεί να βρούμε μια βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{U}$.

Ο πίνακας $\mathbb{U}$ είναι κλιμακωτός. Οι μη-μηδενικές γραμμές του $\mathbb{U}$ είναι αυτές που περιέχουν οδηγό. Εάν υπάρχουν r -οδηγοί τότε $r \leq m$, και στον πίνακα $\mathbb{U}$ οι πρώτες r -γραμμές περιέχουν τους οδηγούς και οι τελικές $m - r$ -γραμμές είναι μηδενικές.

Πρόταση 2. Οι πίνακες $\mathbb{A}$ και $\mathbb{U}$ έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών. Γενικότερα δύο γραμμικά ισοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

Από την παραπάνω πρόταση για να βρούμε μια βάση του χώρου γραμμών του πίνακα $\mathbb{A}$ αρκεί να βρούμε μια βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{U}$.

Ο πίνακας $\mathbb{U}$ είναι κλιμακωτός. Οι μη-μηδενικές γραμμές του $\mathbb{U}$ είναι αυτές που περιέχουν οδηγό. Εάν υπάρχουν r -οδηγοί τότε $r \leq m$, και στον πίνακα $\mathbb{U}$ οι πρώτες r -γραμμές περιέχουν τους οδηγούς και οι τελικές $m - r$ -γραμμές είναι μηδενικές.

Επίσης έχουμε ότι αν η i -γραμμή περιέχει τον i -οδηγό, τότε αυτός είναι σε μια στήλη j_i και η i -γραμμή είναι η $(u_{i,k})_{k=1}^n$ όπου

$u_{i,1} = u_{i,2} = \dots = u_{i,j_i-1} = 0$ και u_{i,j_i} είναι ο i -οδηγός που είναι μη-μηδενικός αριθμός

Τα διανύσματα που είναι οι γραμμές του $\mathbb{U}$ που περιέχουν οδηγό είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και είναι μια βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{U}$. Από την Πρόταση 2 τα διανύσματα αυτά είναι επίσης βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{A}$.

Πρόταση 2. Οι πίνακες $\mathbb{A}$ και $\mathbb{U}$ έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών. Γενικότερα δύο γραμμικά ισοδύναμοι πίνακες έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών.

Από την παραπάνω πρόταση για να βρούμε μια βάση του χώρου γραμμών του πίνακα $\mathbb{A}$ αρκεί να βρούμε μια βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{U}$.

Ο πίνακας $\mathbb{U}$ είναι κλιμακωτός. Οι μη-μηδενικές γραμμές του $\mathbb{U}$ είναι αυτές που περιέχουν οδηγό. Εάν υπάρχουν r -οδηγοί τότε $r \leq m$, και στον πίνακα $\mathbb{U}$ οι πρώτες r -γραμμές περιέχουν τους οδηγούς και οι τελικές $m - r$ -γραμμές είναι μηδενικές.

Επίσης έχουμε ότι αν η i -γραμμή περιέχει τον i -οδηγό, τότε αυτός είναι σε μια στήλη j_i και η i -γραμμή είναι η $(u_{i,k})_{k=1}^n$ όπου

$u_{i,1} = u_{i,2} = \dots = u_{i,j_i-1} = 0$ και u_{i,j_i} είναι ο i -οδηγός που είναι μη-μηδενικός αριθμός

Τα διανύσματα που είναι οι γραμμές του $\mathbb{U}$ που περιέχουν οδηγό είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και είναι μια βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{U}$. Από την Πρόταση 2 τα διανύσματα αυτά είναι επίσης βάση του χώρου γραμμών του $\mathbb{A}$.

Έτσι έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ο χώρος γραμμών του πίνακα $\mathbb{A}$ έχει διάσταση ίση με τον αριθμό των μη-μηδενικών γραμμών του ισοδύναμου κλιμακωτού πίνακα $\mathbb{U}$. Βάση του χώρου γραμμών είναι οι μη-μηδενικές γραμμές του ισοδύναμου κλιμακωτού.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί ο χώρος γραμμών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί ο χώρος γραμμών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τον άνω τριγωνικό που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί ο χώρος γραμμών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τον άνω τριγωνικό που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο άνω τριγωνικός πίνακας που πήραμε έχει δύο οδηγούς, στη πρώτη και δεύτερη γραμμή. Επομένως ο χώρος γραμμών έχει διάσταση 2 και μια βάση του είναι τα διανύσματα $[1, 4, 10]$ και $[0, -3, -6]$.

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί ο χώρος γραμμών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τον άνω τριγωνικό που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο άνω τριγωνικός πίνακας που πήραμε έχει δύο οδηγούς, στη πρώτη και δεύτερη γραμμή. Επομένως ο χώρος γραμμών έχει διάσταση 2 και μια βάση του είναι τα διανύσματα $[1, 4, 10]$ και $[0, -3, -6]$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η τρίτη γραμμή του $\mathbb{A}$ είναι ίση με $2(2\eta\text{-γραμμή}) - (1\eta\text{-γραμμή})$.

Ο χώρος στηλών

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος στηλών ενός πίνακα A έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κλιμακωτό πίνακα U . Αρχικά θα δούμε ότι το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα A συμπίπτει με αυτό των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα U .

Ο χώρος στηλών

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος στηλών ενός πίνακα A έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κλιμακωτό πίνακα U . Αρχικά θα δούμε ότι το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα A συμπίπτει με αυτό των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα U .

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας A έχει LU παραγοντοποίηση $PA = LU$ τότε το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του A ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του πίνακα U

Ο χώρος στηλών

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος στηλών ενός πίνακα A έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κλιμακωτό πίνακα U . Αρχικά θα δούμε ότι το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα A συμπίπτει με αυτό των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα U .

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας A έχει LU παραγοντοποίηση $PA = LU$ τότε το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του A ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του πίνακα U

Απόδειξη. Έχουμε ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μη-μηδενική λύση.

Ο χώρος στηλών

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος στηλών ενός πίνακα A έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κλιμακωτό πίνακα U . Αρχικά θα δούμε ότι το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα A συμπίπτει με αυτό των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα U .

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας A έχει LU παραγοντοποίηση $PA = LU$ τότε το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του A ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του πίνακα U

Απόδειξη. Έχουμε ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μη-μηδενική λύση. Εάν $PA = LU$ τότε

$$Ax = 0 \Leftrightarrow LUx = 0 \Leftrightarrow Ux = 0,$$

εφόσον L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο.

Ο χώρος στηλών

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος στηλών ενός πίνακα A έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον κλιμακωτό πίνακα U . Αρχικά θα δούμε ότι το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα A συμπίπτει με αυτό των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα U .

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας A έχει LU παραγοντοποίηση $PA = LU$ τότε το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του A ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του πίνακα U

Απόδειξη. Έχουμε ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μη-μηδενική λύση. Εάν $PA = LU$ τότε

$$Ax = 0 \Leftrightarrow LUx = 0 \Leftrightarrow Ux = 0,$$

εφόσον L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο.

Επειδή το σύστημα $Ax = 0$ έχει τις ίδιες λύσεις με το $Ux = 0$, παίρνουμε το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα A συμπίπτει με αυτό των ανεξάρτητων στηλών στον πίνακα U .

Θα βρούμε τώρα το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του $\mathbb{U}$. Χωρίζουμε τις στήλες του $\mathbb{U}$ σε δύο ομάδες.

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τις στήλες για τις οποίες έχει ορισθεί οδηγός. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.

Θα βρούμε τώρα το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του $\mathbb{U}$. Χωρίζουμε τις στήλες του $\mathbb{U}$ σε δύο ομάδες.

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τις στήλες για τις οποίες έχει ορισθεί οδηγός. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.
- Η δεύτερη ομάδα περιέχει τις στήλες οι οποίες δεν περιέχουν οδηγό. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε ελεύθερες μεταβλητές.

Θα βρούμε τώρα το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του $\mathbb{U}$. Χωρίζουμε τις στήλες του $\mathbb{U}$ σε δύο ομάδες.

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τις στήλες για τις οποίες έχει ορισθεί οδηγός. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.
- Η δεύτερη ομάδα περιέχει τις στήλες οι οποίες δεν περιέχουν οδηγό. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε ελεύθερες μεταβλητές.

Θα βρούμε τώρα το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του $\mathbb{U}$. Χωρίζουμε τις στήλες του $\mathbb{U}$ σε δύο ομάδες.

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τις στήλες για τις οποίες έχει ορισθεί οδηγός. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.
- Η δεύτερη ομάδα περιέχει τις στήλες οι οποίες δεν περιέχουν οδηγό. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε ελεύθερες μεταβλητές.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι το πλήθος των στηλών που περιέχουν οδηγούς είναι ίσο με το πλήθος των ανεξάρτητων γραμμών του $\mathbb{A}$.

Θα βρούμε τώρα το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του $\mathbb{U}$. Χωρίζουμε τις στήλες του $\mathbb{U}$ σε δύο ομάδες.

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τις στήλες για τις οποίες έχει ορισθεί οδηγός. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.
- Η δεύτερη ομάδα περιέχει τις στήλες οι οποίες δεν περιέχουν οδηγό. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε ελεύθερες μεταβλητές.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι το πλήθος των στηλών που περιέχουν οδηγούς είναι ίσο με το πλήθος των ανεξάρτητων γραμμών του $\mathbb{A}$.

Εάν πάρουμε τις στήλες του $\mathbb{U}$ που έχουν οδηγούς είναι εύκολο να δούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θα βρούμε τώρα το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών του U . Χωρίζουμε τις στήλες του U σε δύο ομάδες.

- Η πρώτη ομάδα περιέχει τις στήλες για τις οποίες έχει ορισθεί οδηγός. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε βασικές μεταβλητές.
- Η δεύτερη ομάδα περιέχει τις στήλες οι οποίες δεν περιέχουν οδηγό. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε αυτές τις στήλες τις ονομάζουμε ελεύθερες μεταβλητές.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι το πλήθος των στηλών που περιέχουν οδηγούς είναι ίσο με το πλήθος των ανεξάρτητων γραμμών του A .

Εάν πάρουμε τις στήλες του U που έχουν οδηγούς είναι εύκολο να δούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Επίσης οποιαδήποτε στήλη δεν έχει οδηγό είναι γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων στηλών.

Επομένως οι στήλες του U που περιέχουν οδηγό είναι μια βάση του χώρου στηλών του U . Επίσης η διάσταση του χώρου στηλών του U είναι ίση με τη διάσταση του χώρου γραμμών του A .

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι οι στήλες του A που είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι αυτές που περιέχουν οδηγούς.

Έτσι έχουμε ότι οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του U είναι Έτσι έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πρόταση 5. Ο χώρος στηλών $R(A)$ του πίνακα A έχει διάσταση ίση με χώρο γραμμών του A . Μια βάση του χώρου στηλών του A είναι οι στήλες που περιέχουν τις βασικές μεταβλητές.

Παρατήρηση 6. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$. Ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A}$ δεν συμπίπτει κατανάγκη με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$.

Παρατήρηση 6. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$. Ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A}$ δεν συμπίπτει κατανάγκη με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τον άνω τριγωνικό που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 6. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$. Ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A}$ δεν συμπίπτει κατανάγκη με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τον άνω τριγωνικό που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στον άνω τριγωνικό πίνακα που προκύπτει η πρώτη και η δεύτερη στήλη έχουν οδηγούς. Επομένως οι βασικές μεταβλητές είναι η πρώτη και η δεύτερη. Αυτό μας δίνει ότι ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει διάσταση δύο και μια βάση του είναι τα

διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Παρατήρηση 6. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$. Ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A}$ δεν συμπίπτει κατανάγκη με τον χώρο στηλών του $\mathbb{U}$.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί ο χώρος στηλών του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τον άνω τριγωνικό που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στον άνω τριγωνικό πίνακα που προκύπτει η πρώτη και η δεύτερη στήλη έχουν οδηγούς. Επομένως οι βασικές μεταβλητές είναι η πρώτη και η δεύτερη. Αυτό μας δίνει ότι ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει διάσταση δύο και μια βάση του είναι τα

διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}$ είναι ίση με $2(1\eta\text{-στήλη} + 2\eta\text{ στήλη})$.

Ορισμός 7. Τάξη ενός $m \times n$ πίνακα A , συμβολικά $\text{rank}(A)$, ορίζουμε να είναι η διάσταση του χώρου γραμμών του (που ισούται με τη διάσταση του χώρου στηλών του).

Ορισμός 7. Τάξη ενός $m \times n$ πίνακα A , συμβολικά $\text{rank}(A)$, ορίζουμε να είναι η διάσταση του χώρου γραμμών του (που ισούται με τη διάσταση του χώρου στηλών του).

Ο μηδενοχώρος του $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$, συμβολικά $N(\mathbb{A})$, ορίζεται να είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$N(\mathbb{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Έχουμε δει ότι ο $N(\mathbb{A})$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 7. Τάξη ενός $m \times n$ πίνακα A , συμβολικά $\text{rank}(A)$, ορίζουμε να είναι η διάσταση του χώρου γραμμών του (που ισούται με τη διάσταση του χώρου στηλών του).

Ο μηδενοχώρος του $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$, συμβολικά $N(\mathbb{A})$, ορίζεται να είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$N(\mathbb{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Έχουμε δει ότι ο $N(\mathbb{A})$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει πως σχετίζεται η τάξη ενός πίνακα με τη διάσταση του μηδενοχώρου.

Πρόταση 6. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας τότε ο υπόχωρος $N(\mathbb{A})$ έχει διάσταση $n - \text{rank}(\mathbb{A})$.

Απόδειξη. Επειδή ο $N(\mathbb{A})$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ εάν $\dim N(\mathbb{A}) = k$ έχει μια βάση από k -διανύσματα. Έστω $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ μια βάση του $N(\mathbb{A})$. Επιλέγουμε $n - k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$ ώστε τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Έστω $S = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}\} \subset \mathbb{R}^n \setminus N(\mathbb{A})$ και T ο γραμμικός τελεστής που έχει πίνακα τον $\mathbb{A}$. Επειδή $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ για κάθε $i \leq k$ έχουμε ότι ο $T(\mathbb{R}^n) = \text{span}\{T(\mathbf{w}_1), \dots, T(\mathbf{w}_{n-k})\} = \text{span } T(S)$. Τα διανύσματα $T(\mathbf{w}_1), \dots, T(\mathbf{w}_{n-k})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι εάν

$$\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i T(\mathbf{w}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \mathbf{w}_i\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \mathbf{w}_i \in \ker(T) = N(\mathbb{A}).$$

Επειδή $N(\mathbb{A}) \cap \text{span}(S) = \{\mathbf{0}\}$ και $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$ γραμμικά ανεξάρτητα παίρνουμε ότι $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = 0$. Επομένως τα $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι έχουμε ότι τα $A(\mathbf{w}_1), \dots, A(\mathbf{w}_{n-k})$ είναι βάση του $\{A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \text{Col}(A)$.

Επομένως

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n = k + (n - k) = \dim N(\mathbb{A}) + \dim \text{Col}(A) = \dim N(\mathbb{A}) + \text{rank}(\mathbb{A}).$$

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.

Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
- 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ όπου

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
- 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ όπου
 - α) $x_i = 1$ αν i είναι η ελεύθερη μεταβλητή στην οποία δώσαμε την τιμή 1,

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
- 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ όπου
 - α) $x_i = 1$ αν i είναι η ελεύθερη μεταβλητή στην οποία δώσαμε την τιμή 1,
 - β) $x_j = 0$ αν j είναι κάποια από τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
- 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ όπου
 - α) $x_i = 1$ αν i είναι η ελεύθερη μεταβλητή στην οποία δώσαμε την τιμή 1,
 - β) $x_j = 0$ αν j είναι κάποια από τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές
 - γ) στις υπόλοιπες μεταβλητές, που είναι οι βασικές μεταβλητές, δίνουμε την τιμή που βρήκαμε από τη λύση του συστήματος.

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
- 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ όπου
 - α) $x_i = 1$ αν i είναι η ελεύθερη μεταβλητή στην οποία δώσαμε την τιμή 1,
 - β) $x_j = 0$ αν j είναι κάποια από τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές
 - γ) στις υπόλοιπες μεταβλητές, που είναι οι βασικές μεταβλητές, δίνουμε την τιμή που βρήκαμε από τη λύση του συστήματος.
- 4ο. Επαναλαμβάνουμε το 3ο βήμα για κάθε ελεύθερη μεταβλητή

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
- 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ όπου
 - α) $x_i = 1$ αν i είναι η ελεύθερη μεταβλητή στην οποία δώσαμε την τιμή 1,
 - β) $x_j = 0$ αν j είναι κάποια από τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές
 - γ) στις υπόλοιπες μεταβλητές, που είναι οι βασικές μεταβλητές, δίνουμε την τιμή που βρήκαμε από τη λύση του συστήματος.
- 4ο. Επαναλαμβάνουμε το 3ο βήμα για κάθε ελεύθερη μεταβλητή

Για να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου, και τη γενική λύση του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ κάνουμε τα επόμενα βήματα

- 1ο. Ξεκινάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών παίρνουμε τον κλιμακωτό πίνακα $\mathbb{U}$.
Με αυτό τον τρόπο το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - 2ο. Στον πίνακα $\mathbb{U}$ βρίσκουμε τις στήλες που έχουν οδηγούς.
 - 3ο. Επιλέγουμε μια ελεύθερη μεταβλητή και τις δίνουμε την τιμή 1. Στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τις βασικές μεταβλητές. Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε μια λύση του συστήματος $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ όπου
 - α) $x_i = 1$ αν i είναι η ελεύθερη μεταβλητή στην οποία δώσαμε την τιμή 1,
 - β) $x_j = 0$ αν j είναι κάποια από τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές
 - γ) στις υπόλοιπες μεταβλητές, που είναι οι βασικές μεταβλητές, δίνουμε την τιμή που βρήκαμε από τη λύση του συστήματος.
 - 4ο. Επαναλαμβάνουμε το 3ο βήμα για κάθε ελεύθερη μεταβλητή
- Με αυτό τον τρόπο εάν $k = \text{αριθμός ελεύθερων μεταβλητών}$, έχουμε παράγει k -λύσεις $\mathbf{x}_i$, $i \leq k$ του συστήματος. Τότε η γενική λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι η

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \quad \text{όπου } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ να βρεθούν βάσεις για τους μηδενохώρους των $\mathbb{A}, \mathbb{A}^\top \mathbb{A}$.

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ να βρεθούν βάσεις για τους μηδενохώρους

των $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$.

Για τον μηδενохώρο του πίνακα $\mathbb{A}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(0)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ να βρεθούν βάσεις για τους μηδενοχώρους

των $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$.

Για τον μηδενοχώρο του πίνακα $\mathbb{A}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(0)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}) = 2$ και άρα ο μηδενοχώρος έχει διάσταση ένα.

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ να βρεθούν βάσεις για τους μηδενοχώρους

των $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$.

Για τον μηδενοχώρο του πίνακα $\mathbb{A}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(0)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}) = 2$ και άρα ο μηδενοχώρος έχει διάσταση ένα.

Επειδή έχουμε δύο οδηγούς, τον 1 στη θέση $(1, 1)$ και τον -1 στη θέση $(2, 2)$, έχουμε ότι η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ να βρεθούν βάσεις για τους μηδενοχώρους

των $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$.

Για τον μηδενοχώρο του πίνακα $\mathbb{A}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(0)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}) = 2$ και άρα ο μηδενοχώρος έχει διάσταση ένα.

Επειδή έχουμε δύο οδηγούς, τον 1 στη θέση $(1, 1)$ και τον -1 στη θέση $(2, 2)$, έχουμε ότι η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Έτσι για $z = 1$, έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = -5.$$

Επομένως $N(\mathbb{A}) = \text{span}\{[-5, 2, 1]^\top\}$.

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ να βρεθούν βάσεις για τους μηδενохώρους

των $\mathbb{A}, \mathbb{A}^\top \mathbb{A}$.

Για τον μηδενохώρο του πίνακα $\mathbb{A}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(0)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}) = 2$ και άρα ο μηδενохώρος έχει διάσταση ένα.

Επειδή έχουμε δύο οδηγούς, τον 1 στη θέση (1, 1) και τον -1 στη θέση (2, 2), έχουμε ότι η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Έτσι για $z = 1$, έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = -5.$$

Επομένως $N(\mathbb{A}) = \text{span}\{[-5, 2, 1]^\top\}$.

Για τον πίνακα $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$,

$$\mathbb{A}^\top \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Κάνουμε αναγωγή του $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$ σε κλιμακωτό πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{3,1(2)E_{2,1}(3/2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Κάνουμε αναγωγή του $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$ σε κλιμακωτό πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{3,1(2)E_{2,1}(3/2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = 2 \Rightarrow N(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = 1$.

Η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη, εφόσον έχουμε δύο οδηγούς στην πρώτη και δεύτερη στήλη.

Κάνουμε αναγωγή του $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$ σε κλιμακωτό πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{3,1(2)E_{2,1}(3/2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = 2 \Rightarrow N(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = 1$.

Η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη, εφόσον έχουμε δύο οδηγούς στην πρώτη και δεύτερη στήλη.

Έτσι για $z = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 0.5y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = -5.$$

Κάνουμε αναγωγή του $\mathbb{A}^\top \mathbb{A}$ σε κλιμακωτό πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{3,1(2)E_{2,1}(3/2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $\text{rank}(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = 2 \Rightarrow N(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = 1$.

Η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη, εφόσον έχουμε δύο οδηγούς στην πρώτη και δεύτερη στήλη.

Έτσι για $z = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 0.5y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = -5.$$

Έτσι έχουμε ότι $N(\mathbb{A}^\top \mathbb{A}) = \text{span}\{[-5, 2, 1]^\top\}$.

Τα παρακάτω θεωρήματα μας δίνουν πληροφορίες για τις λύσεις του συστήματος $Ax = b$.

Τα παρακάτω θεωρήματα μας δίνουν πληροφορίες για τις λύσεις του συστήματος $Ax = b$.

Έχουμε ήδη δει ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $b \in \text{Col}(A)$. Εάν το $b \in \text{Col}(A)$ τότε εάν ο μηδενοχώρος περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός από το μηδενικό διάνυσμα, το σύστημα $Ax = b$ θα έχει άπειρες λύσεις.

Τα παρακάτω θεωρήματα μας δίνουν πληροφορίες για τις λύσεις του συστήματος $Ax = b$.

Έχουμε ήδη δει ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $b \in \text{Col}(A)$. Εάν το $b \in \text{Col}(A)$ τότε εάν ο μηδενοχώρος περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός από το μηδενικό διάνυσμα, το σύστημα $Ax = b$ θα έχει άπειρες λύσεις.

Θεώρημα 8. Έστω A ένας $(m \times n)$ -πίνακας. Εάν $\text{rank}(A) = m$ τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν $m \leq n$.

Τα παρακάτω θεωρήματα μας δίνουν πληροφορίες για τις λύσεις του συστήματος $Ax = b$.

Έχουμε ήδη δει ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $b \in \text{Col}(A)$. Εάν το $b \in \text{Col}(A)$ τότε εάν ο μηδενοχώρος περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός από το μηδενικό διάνυσμα, το σύστημα $Ax = b$ θα έχει άπειρες λύσεις.

Θεώρημα 8. Έστω A ένας $(m \times n)$ -πίνακας. Εάν $\text{rank}(A) = m$ τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$.
Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν $m \leq n$.

Πράγματι στην περίπτωση που $\text{rank}(A) = m$ έχουμε ότι οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^m$ και άρα κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του A . Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το $Ax = b$ λύνεται.

Τα παρακάτω θεωρήματα μας δίνουν πληροφορίες για τις λύσεις του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Έχουμε ήδη δει ότι το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν $\mathbf{b} \in \text{Col}(\mathbb{A})$. Εάν το $\mathbf{b} \in \text{Col}(\mathbb{A})$ τότε εάν ο μηδενοχώρος περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός από το μηδενικό διάνυσμα, το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ θα έχει άπειρες λύσεις.

Θεώρημα 8. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $(m \times n)$ -πίνακας. Εάν $\text{rank}(\mathbb{A}) = m$ τότε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν $m \leq n$.

Πράγματι στην περίπτωση που $\text{rank}(\mathbb{A}) = m$ έχουμε ότι οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$ και άρα κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ λύνεται.

Παρατήρηση 9. Ας παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα μας δίνει, ότι εάν έχουμε το ομογενούς $n \times n$ -σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $\text{rank}(\mathbb{A}) = n$, τότε ότι η μηδενική λύση του συστήματος είναι η μοναδική.

Θεώρημα 10. Έστω A ένας $(m \times n)$ -πίνακας.

Εάν $m > n$ τότε το σύστημα $Ax = b$ δεν λύνεται για άπειρα $b \in \mathbb{R}^m$ εφόσον $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\} < m$.

Εάν $m < n$ τότε το σύστημα $Ax = b$ είτε δεν λύνεται (αν $\text{rank}(A) < m$) είτε έχει άπειρες λύσεις εφόσον $\dim N(A) = n - \text{rank}(A) \geq n - m > 0$. Σε αυτή την περίπτωση το $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Απόδειξη. Επειδή $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ εάν $n < m$ τότε ο υπόχωρος που παράγουν τα διανύσματα στήλες είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Επομένως για κάθε $b \in \mathbb{R}^m \setminus \text{Col}(A)$ το σύστημα δεν έχει λύση.

Ας δούμε τώρα ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Θεώρημα 10. Έστω A ένας $(m \times n)$ -πίνακας.

Εάν $m > n$ τότε το σύστημα $Ax = b$ δεν λύνεται για άπειρα $b \in \mathbb{R}^m$ εφόσον $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\} < m$.

Εάν $m < n$ τότε το σύστημα $Ax = b$ είτε δεν λύνεται (αν $\text{rank}(A) < m$) είτε έχει άπειρες λύσεις εφόσον $\dim N(A) = n - \text{rank}(A) \geq n - m > 0$. Σε αυτή την περίπτωση το $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Απόδειξη. Επειδή $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ εάν $n < m$ τότε ο υπόχωρος που παράγουν τα διανύσματα στήλες είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Επομένως για κάθε $b \in \mathbb{R}^m \setminus \text{Col}(A)$ το σύστημα δεν έχει λύση.

Ας δούμε τώρα ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

Εάν το $Ax = b$ έχει λύση τότε έχουμε ότι $b \in \text{Col}(A)$. Αυτό μας δίνει ότι $\text{Col}(A) = \text{Col}(A|b)$. Επειδή η τάξη ενός πίνακα είναι ίση με τη διάσταση του χώρου στηλών έχουμε ότι αν το $Ax = b$ έχει λύση $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$. Αντιστρόφως εάν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$ τότε επειδή $\text{Col}(A) \subset \text{Col}(A|b)$ έχουμε ότι $b \in \text{Col}(A)$. Πράγματι αν $b \notin \text{Col}(A)$

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) < \dim(\text{Col}(A|b)) = \text{rank}(A|b)$$

που είναι άτοπο. Επειδή $b \in \text{Col}(A)$ το σύστημα έχει λύση.

Ιδιαίτερα για τους $(n \times n)$ -πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Ιδιαίτερα για τους $(n \times n)$ -πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $(n \times n)$ -πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) το $\mathbb{A}x = 0$ έχει μοναδική λύση

Ιδιαίτερα για τους $(n \times n)$ -πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11. Έστω A ένας $(n \times n)$ -πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) το $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση
- 2) το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$

Ιδιαίτερα για τους $(n \times n)$ -πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11. Έστω A ένας $(n \times n)$ -πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) το $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση
- 2) το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$
- 3) το $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$

Ιδιαίτερα για τους $(n \times n)$ -πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11. Έστω A ένας $(n \times n)$ -πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) το $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση
- 2) το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$
- 3) το $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$
- 4) $\text{rank}(A) = n$

Ιδιαίτερα για τους $(n \times n)$ -πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11. Έστω A ένας $(n \times n)$ -πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) το $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση
- 2) το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$
- 3) το $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$
- 4) $\text{rank}(A) = n$
- 5) A είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 4. Να λυθεί το σύστημα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ξεκινάμε από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ του συστήματος.

Παράδειγμα 4. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ξεκινάμε από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ του συστήματος.

Ας παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας του συστήματος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Στο σύστημα αυτό έχουμε δύο οδηγούς, στην πρώτη και τρίτη στήλη. Άρα η πρώτη και τρίτη μεταβλητή είναι βασικές και οι υπόλοιπες είναι ελεύθερες.

Παράδειγμα 4. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ξεκινάμε από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ του συστήματος.

Ας παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας του συστήματος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Στο σύστημα αυτό έχουμε δύο οδηγούς, στην πρώτη και τρίτη στήλη. Άρα η πρώτη και τρίτη μεταβλητή είναι βασικές και οι υπόλοιπες είναι ελεύθερες. Δίνουμε τώρα την τιμή 1 στην δεύτερη μεταβλητή και την τιμή 0 στην τέταρτη. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 + 3x_3 + 2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ και } x_3 = 0.$$

Άρα μια λύση του συστήματος είναι η $x_1 = [-2, 1, 0, 0]^T$.

Δίνουμε τώρα την τιμή 0 στη δεύτερη μεταβλητή και την τιμή 1 στην τέταρτη. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 + 4 = 0 \\ x_3 + 3 = 0 \end{array} \Rightarrow x_3 = -3 \text{ και } x_1 = 5.$$

Άρα μια δεύτερη λύση του συστήματος είναι η $x_2 = [5, 0, -3, 1]^T$.

Δίνουμε τώρα την τιμή 0 στη δεύτερη μεταβλητή και την τιμή 1 στην τέταρτη. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4 &= 0 \\ x_3 + 3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_3 = -3 \text{ και } x_1 = 5.$$

Άρα μια δεύτερη λύση του συστήματος είναι η $x_2 = [5, 0, -3, 1]^T$.

Από τα παραπάνω παίρνουμε ότι οι λύσεις του συστήματος είναι τα διανύσματα

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5. Έστω το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = b_1 \\ x + y - z - w = b_2 \\ 2x - 2y + 3z = b_3 \end{cases}.$$

- ι) Ποια πρέπει να είναι σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.
 ιι) Βρείτε το σύνολο των λύσεων του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ εάν τα b_1, b_2, b_3 ικανοποιούν τα
 σχέση του ι) ερωτήματος.

Παράδειγμα 5. Έστω το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = b_1 \\ x + y - z - w = b_2 \\ 2x - 2y + 3z = b_3 \end{cases}.$$

- ι) Ποια πρέπει να είναι σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.
 ιι) Βρείτε το σύνολο των λύσεων του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ εάν τα b_1, b_2, b_3 ικανοποιούν τα σχέση του ι) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επανξημένο πίνακα του συστήματος,

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & b_2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & b_3 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 5. Έστω το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = b_1 \\ x + y - z - w = b_2 \\ 2x - 2y + 3z = b_3 \end{cases}.$$

- ι) Ποια πρέπει να είναι σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.
 ιι) Βρείτε το σύνολο των λύσεων του $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ εάν τα b_1, b_2, b_3 ικανοποιούν τα σχέση του ι) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επανζημένο πίνακα του συστήματος,

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & b_2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & b_3 \end{array} \right].$$

Εφαρμόζουμε τους πίνακες $E_{2,1}(1/3)$, $E_{3,1}(2/3)$ και $E_{3,2}(1)$ διαδοχικά στον επανζημένο πίνακα και παίρνουμε

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] \xrightarrow{E_{3,2}(-1)E_{3,1}(2/3)E_{2,1}(1/3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 5/3 & -4/3 & -5/3 & b_2 - b_1/3 \\ 0 & 0 & 9/5 & -2 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 5. Έστω το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = b_1 \\ x + y - z - w = b_2 \\ 2x - 2y + 3z = b_3 \end{cases}$$

- ι) Ποια πρέπει να είναι σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.
 ιι) Βρείτε το σύνολο των λύσεων του $\mathbb{A}x = \mathbb{b}$ εάν τα b_1, b_2, b_3 ικανοποιούν τα σχέση του ι) ερωτήματος.

Λύση. Παίρνουμε τον επανζημένο πίνακα του συστήματος,

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & b_2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & b_3 \end{array} \right].$$

Εφαρμόζουμε τους πίνακες $E_{2,1}(1/3)$, $E_{3,1}(2/3)$ και $E_{3,2}(1)$ διαδοχικά στον επανζημένο πίνακα και παίρνουμε

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] \xrightarrow{E_{3,2}(-1)E_{3,1}(2/3)E_{2,1}(1/3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 5/3 & -4/3 & -5/3 & b_2 - b_1/3 \\ 0 & 0 & 9/5 & -2 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι τάξης 3 και η τέταρτη μεταβλητή w είναι ελεύθερη. Επομένως η διάσταση του χώρου στηλών είναι 3 και επειδή τα διανύσματα στήλες είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ έχουμε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε τριάδα b_1, b_2, b_3 .

Για το ερώτημα ι) παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή ίση με μηδέν. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rrrrcl} 3x & -2y & +z & +0 & = b_1 \\ 0x & +\frac{5}{3}y & -\frac{4}{3}z & -0 & = b_2 - b_1/3 \\ 0x & +0y & +\frac{9}{5}z & -0 & = b_3 + b_2 - b_1 \end{array}$$

Για το ερώτημα ι) παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή ίση με μηδέν. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rrrrr} 3x & -2y & +z & +0 & = b_1 \\ 0x & +\frac{5}{3}y & -\frac{4}{3}z & -0 & = b_2 - b_1/3 \\ 0x & +0y & +\frac{9}{5}z & -0 & = b_3 + b_2 - b_1 \end{array}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό, λύνεται και έχει μοναδική. Η τελευταία εξίσωση μας δίνει ότι $z = \frac{5}{9}(b_3 + b_2 - b_1)$.

Για το ερώτημα ι) παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή ίση με μηδέν. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{rrrrr} 3x & -2y & +z & +0 & = b_1 \\ 0x & +\frac{5}{3}y & -\frac{4}{3}z & -0 & = b_2 - b_1/3 \\ 0x & +0y & +\frac{9}{5}z & -0 & = b_3 + b_2 - b_1 \end{array}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό, λύνεται και έχει μοναδική. Η τελευταία εξίσωση μας δίνει ότι $z = \frac{5}{9}(b_3 + b_2 - b_1)$.

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε $y = \frac{1}{9}(4b_3 + 13b_2 - 13b_1)$. Τέλος από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x = \frac{1}{3}(2y - z + b_1) = \frac{1}{27}(3b_3 + 21b_2 - 20b_1).$$

Για το ερώτημα ι) παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή ίση με μηδέν. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{array}{cccccc} 3x & -2y & +z & +0 & = & b_1 \\ 0x & +\frac{5}{3}y & -\frac{4}{3}z & -0 & = & b_2 - b_1/3 \\ 0x & +0y & +\frac{9}{5}z & -0 & = & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό, λύνεται και έχει μοναδική. Η τελευταία εξίσωση μας δίνει ότι $z = \frac{5}{9}(b_3 + b_2 - b_1)$.

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε $y = \frac{1}{9}(4b_3 + 13b_2 - 13b_1)$. Τέλος από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x = \frac{1}{3}(2y - z + b_1) = \frac{1}{27}(3b_3 + 21b_2 - 20b_1).$$

Επομένως βρήκαμε μια λύση του συστήματος, την $w_0 = [x, y, z, 0]^T$.

Πρέπει να βρούμε τις λύσεις του ομογενούς.

Έχουμε μια ελεύθερη μεταβλητή την τέταρτη. Τις δίνουμε την τιμή 1 και έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{cccccc} 3x & -2y & +z & +2 & = & 0 \\ 0x & +\frac{5}{3}y & -\frac{4}{3}z & -\frac{5}{3} & = & 0 \\ 0x & +0y & +\frac{9}{5}z & -2 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccccc} 3x & -2y & +z & & = & -2 \\ & \frac{5}{3}y & -\frac{4}{3}z & & = & \frac{5}{3} \\ & & \frac{9}{5}z & & = & 2 \end{array}$$

Άρα $z = 10/9$, $y = 4z + 5 = x = 2y - z - 2$.

Άρα λύσεις του ομογενούς $\lambda \begin{bmatrix} 10/9 \\ 95/9 \\ 142/9 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Εάν y είναι μια λύση του ομογενούς τότε έχουμε δει ότι η $w_0 + y$ είναι επίσης λύση του συστήματος.

Έτσι έχουμε ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι οι

$$w_0 + \lambda \begin{bmatrix} 10/9 \\ 95/9 \\ 142/9 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 6. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2 \\ 2x + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Παράδειγμα 6. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2 \\ 2x \qquad \qquad + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$[A : b] \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z + 0w = b_3 - b_2 - b_1$.

Εάν $b_3 - b_2 - b_1 \neq 0$ τότε το σύστημα δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 6. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x \qquad \qquad + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επανξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$\begin{aligned} [A : b] &\xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x \qquad \qquad + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$\begin{aligned} [A : b] &\xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z + 0w = b_3 - b_2 - b_1$.

Παράδειγμα 6. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x \qquad \qquad + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$\begin{aligned} [A : b] &\xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z + 0w = b_3 - b_2 - b_1$.

Εάν $b_3 - b_2 - b_1 \neq 0$ τότε το σύστημα δεν έχει λύση.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα είναι τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα είναι τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα είναι τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή

Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 .

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα είναι τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή

Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 .

Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και τέταρτη, ίσες με μηδέν.

Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ -2y &= b_2 - b_1 \end{aligned} .$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα είναι τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή

Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 .

Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και τέταρτη, ίσες με μηδέν.

Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ -2y &= b_2 - b_1 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό και έχει μοναδική λύση τη $[\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}]^\top$. Άρα ειδική λύση του συστήματος είναι η $[\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}, 0, 0]^\top$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα είναι τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή

Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 .

Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και τέταρτη, ίσες με μηδέν.

Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ -2y &= b_2 - b_1 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό και έχει μοναδική λύση τη $[\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}]^T$. Άρα ειδική λύση του συστήματος είναι η $[\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}, 0, 0]^T$.

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, σύμφωνα με την Θεώρημα ?? θα πρέπει να βρούμε τον μηδενοχώρο του $\mathbb{A}$.

Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (2). Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (2). Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = [0, -1, 1, 0]^T$.

Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (2). Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = [0, -1, 1, 0]^\top$.

Παίρνοντας $z = 0$ και $w = 1$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad x = -1.$$

Άρα μια δεύτερη λύση του ομογενούς είναι η $w_2 = [-1, 0, 0, 1]^\top$.

Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (2). Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = [0, -1, 1, 0]^\top$.

Παίρνοντας $z = 0$ και $w = 1$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad x = -1.$$

Άρα μια δεύτερη λύση του ομογενούς είναι η $w_2 = [-1, 0, 0, 1]^\top$. Έτσι έχουμε ότι λύσεις του συστήματος είναι οι

$$\begin{bmatrix} \frac{b_1+b_2}{2} \\ \frac{b_1-b_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1+b_2}{2} - \lambda_2 \\ \frac{b_1-b_2}{2} - \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$