

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in V$.
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in V$.
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 7) $(\lambda \cdot \mu)x = \lambda \cdot (\mu x)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in V$.
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 7) $(\lambda \cdot \mu)x = \lambda \cdot (\mu x)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 8) $1x = x$ για κάθε $x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in V$.
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 7) $(\lambda \cdot \mu)x = \lambda \cdot (\mu x)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 8) $1x = x$ για κάθε $x \in V$.

Διανυσματικοί χώροι

Εάν έχουμε ένα σύνολο V λέμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης, $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, $\cdot$, εάν

- 1) Για κάθε $x, y \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $x + y \in V$.
- 2) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ έχει ορισθεί το στοιχείο $\lambda x \in V$.

Ορισμός 1. Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ονομάζεται διανυσματικός χώρος εάν

- 1) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in V$.
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in V$.
- 3) Υπάρχει ένα στοιχείο που συμβολίζεται με 0 ώστε $x + 0 = 0 + x$ για κάθε $x \in V$.
- 4) Για κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $y \in V$ με $x + y = 0$. Αυτό το y συμβολίζεται με $-x$.
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x, y \in V$.
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 7) $(\lambda \cdot \mu)x = \lambda \cdot (\mu x)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
- 8) $1x = x$ για κάθε $x \in V$.

Ένα διανυσματικό χώρο θα τον συμβολίζουμε με $(V, +, \cdot)$. Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου συχνά τα αποκαλούμε διανύσματα.

Παραδείγματα 2. α) Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος. Για κάθε δύο

$$\text{διανύσματα } \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ορίζεται το άθροισμα } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ορίζεται το γινόμενο } \lambda \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}.$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του ορισμού.

Παραδείγματα 2. α) Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος. Για κάθε δύο

$$\text{διανύσματα } \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ορίζεται το άθροισμα } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ορίζεται το γινόμενο } \lambda \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}.$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του ορισμού.

β) Το σύνολο των $m \times n$ -πινάκων είναι διανυσματικός χώρος με την πράξη της πρόσθεσης πινάκων και πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα.

Παραδείγματα 2. α) Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος. Για κάθε δύο

$$\text{διανύσματα } \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ορίζεται το άθροισμα } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ορίζεται το γινόμενο } \lambda \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}.$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του ορισμού.

β) Το σύνολο των $m \times n$ -πινάκων είναι διανυσματικός χώρος με την πράξη της πρόσθεσης πινάκων και πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα.

γ) Έστω $C([\alpha, \beta]) = \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$. Τότε ο $C([\alpha, \beta])$ είναι διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, δηλαδή

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{και} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος τότε ένα μη-κενό υποσύνολο S του V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V εάν

- 1) για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $x + y \in S$

Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος τότε ένα μη-κενό υποσύνολο S του V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V εάν

- 1) για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $x + y \in S$
- 2) για κάθε $x \in S$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda x \in S$.

Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος τότε ένα μη-κενό υποσύνολο S του V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V εάν

- 1) για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $x + y \in S$
- 2) για κάθε $x \in S$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda x \in S$.

Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος τότε ένα μη-κενό υποσύνολο S του V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V εάν

- 1) για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $x + y \in S$
- 2) για κάθε $x \in S$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda x \in S$.

Για να δείξουμε ότι S είναι διανυσματικός υπόχωρος του V αρκεί να δείξουμε ότι

$$x + \lambda y \in S \text{ για κάθε } x, y \in S \text{ και κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 1. Στον $\mathbb{R}^3$ το σύνολο των διανυσμάτων

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος. Γεωμετρικά ο υπόχωρος αυτός είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$.

Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος τότε ένα μη-κενό υποσύνολο S του V ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V εάν

- 1) για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $x + y \in S$
- 2) για κάθε $x \in S$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda x \in S$.

Για να δείξουμε ότι S είναι διανυσματικός υπόχωρος του V αρκεί να δείξουμε ότι

$$x + \lambda y \in S \text{ για κάθε } x, y \in S \text{ και κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 1. Στον $\mathbb{R}^3$ το σύνολο των διανυσμάτων

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος. Γεωμετρικά ο υπόχωρος αυτός είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$.

Παράδειγμα 2. Το σύνολο των διαγώνιων $n \times n$ πινάκων είναι υπόχωρος των $n \times n$ πινάκων.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 + \lambda y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n + \lambda y_n \end{bmatrix}.$$

Άρα άθροισμα διαγώνιων είναι διαγώνιος και πολλαπλάσιο διαγώνιου πίνακα είναι διαγώνιος.

Παράδειγμα 3. Το σύνολο των 2×1 πινάκων $\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος διότι

$$\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

και δεν ισχύει ότι $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ για κάθε x, y . Η προηγούμενη ταυτότητα ισχύει αν $xy = 0$.

Επίσης $\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix}$ και δεν ισχύει $(\lambda x)^2 = \lambda x^2$ για κάθε λ, x .

Παράδειγμα 3. Το σύνολο των 2×1 πινάκων $\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος διότι

$$\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

και δεν ισχύει ότι $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ για κάθε x, y . Η προηγούμενη ταυτότητα ισχύει αν $xy = 0$.

Επίσης $\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix}$ και δεν ισχύει $(\lambda x)^2 = \lambda x^2$ για κάθε λ, x .

Παράδειγμα 4. Το σύνολο

$$S = \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και } f'' + f = 0\}$$

είναι υπόχωρος του $C([\alpha, \beta])$.

Παράδειγμα 3. Το σύνολο των 2×1 πινάκων $\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος διότι

$$\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

και δεν ισχύει ότι $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ για κάθε x, y . Η προηγούμενη ταυτότητα ισχύει αν $xy = 0$.

Επίσης $\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix}$ και δεν ισχύει $(\lambda x)^2 = \lambda x^2$ για κάθε λ, x .

Παράδειγμα 4. Το σύνολο

$$S = \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και } f'' + f = 0\}$$

είναι υπόχωρος του $C([\alpha, \beta])$.

Πράγματι η μηδενική συνάρτηση $0 \in S$ και αν $f, g \in S$ τότε

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)'' + f + \lambda g &= f'' + \lambda g'' + f + \lambda g \\ &= (f'' + f) + \lambda(g'' + g) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $f, g \in S$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f + \lambda g \in S$.

Παράδειγμα 5. Έστω A ένας μη-μηδενικός $m \times n$ πίνακας. Τότε το σύνολο των διανυσμάτων x του $\mathbb{R}^n$ που είναι λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$, είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας μη-μηδενικός $m \times n$ πίνακας. Τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ που είναι λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι εάν $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $\mathbb{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ τότε

$$\mathbb{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{A}(\lambda\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \lambda\mathbb{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Επομένως αν τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος τότε και το διάνυσμα $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος.

Παράδειγμα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας μη-μηδενικός $m \times n$ πίνακας. Τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ που είναι λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι εάν $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $\mathbb{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ τότε

$$\mathbb{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{A}(\lambda\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \lambda\mathbb{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Επομένως αν τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος τότε και το διάνυσμα $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος.

Ορισμός 4. Έστω V διανυσματικός χώρος και $x_1, \dots, x_k \in V$. Γραμμικό συνδυασμό των $x_1, \dots, x_k \in V$ ονομάζουμε κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Με $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $x_1, \dots, x_k$. Επομένως

$$\text{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Πρόταση 1. Εάν $x_1, \dots, x_k$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Πρόταση 1. Εάν $x_1, \dots, x_k$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Πρόταση 1. Εάν $x_1, \dots, x_k$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Πρόταση 2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου και $S = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Τότε

- 1) Εάν $\lambda \neq 0$ και αντικαταστήσουμε το x_i με το λx_i τότε παράγεται ο ίδιος υπόχωρος, δηλαδή

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Πρόταση 1. Εάν $x_1, \dots, x_k$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Πρόταση 2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου και $S = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Τότε

- 1) Εάν $\lambda \neq 0$ και αντικαταστήσουμε το x_i με το λx_i τότε παράγεται ο ίδιος υπόχωρος, δηλαδή

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

- 2) Εάν αντικαταστήσουμε ένα από τα x_i με ένα διάνυσμα $x_i - \lambda x_j, i \neq j$, τότε παράγεται ο ίδιος υπόχωρος, δηλαδή

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \lambda x_j, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Πρόταση 1. Εάν $x_1, \dots, x_k$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Πρόταση 2. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου και $S = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Τότε

- 1) Εάν $\lambda \neq 0$ και αντικαταστήσουμε το x_i με το λx_i τότε παράγεται ο ίδιος υπόχωρος, δηλαδή

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

- 2) Εάν αντικαταστήσουμε ένα από τα x_i με ένα διάνυσμα $x_i - \lambda x_j, i \neq j$, τότε παράγεται ο ίδιος υπόχωρος, δηλαδή

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - \lambda x_j, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

- 3) Εάν το x_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}.$$

Το 1) είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ισότητας

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i (\lambda x_i) + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k \\ = & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (\lambda_i \lambda) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Το 1) είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ισότητας

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i (\lambda x_i) + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k \\ = & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (\lambda_i \lambda) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Για το 2) για απλότητα υποθέσουμε ότι έχουμε 4 διανύσματα. Έστω ότι αντικαθιστούμε το x_2 με το $x_2 - \lambda x_4$. Τότε έχουμε ότι,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_2 - \lambda x_4) + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$$

Το 1) είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ισότητας

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i (\lambda x_i) + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k \\ = & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (\lambda_i \lambda) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Για το 2) για απλότητα υποθέσουμε ότι έχουμε 4 διανύσματα. Έστω ότι αντικαθιστούμε το x_2 με το $x_2 - \lambda x_4$. Τότε έχουμε ότι,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_2 - \lambda x_4) + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + (\lambda_4 - \lambda_2 \lambda) x_4.$$

Το 1) είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ισότητας

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i (\lambda x_i) + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k \\ = & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (\lambda_i \lambda) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Για το 2) για απλότητα υποθέσουμε ότι έχουμε 4 διανύσματα. Έστω ότι αντικαθιστούμε το x_2 με το $x_2 - \lambda x_4$. Τότε έχουμε ότι,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_2 - \lambda x_4) + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + (\lambda_4 - \lambda_2 \lambda) x_4.$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, x_2 - \lambda x_4, x_3, x_4\}.$$

Το 1) είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ισότητας

$$\begin{array}{cccccccc} \lambda_1 x_1 & + \lambda_2 x_2 & + \dots & + \lambda_{i-1} x_{i-1} & + \lambda_i (\lambda x_i) & + \lambda_{i+1} x_{i+1} & + \dots & + \lambda_k x_k \\ = & \lambda_1 x_1 & + \lambda_2 x_2 & + \dots & + \lambda_{i-1} x_{i-1} & + (\lambda_i \lambda) x_i & + \lambda_{i+1} x_{i+1} & + \dots & + \lambda_k x_k. \end{array}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Για το 2) για απλότητα υποθέσουμε ότι έχουμε 4 διανύσματα. Έστω ότι αντικαθιστούμε το x_2 με το $x_2 - \lambda x_4$. Τότε έχουμε ότι,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_2 - \lambda x_4) + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + (\lambda_4 - \lambda_2 \lambda) x_4.$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, x_2 - \lambda x_4, x_3, x_4\}.$$

3) Πάλι για απλότητα θα υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερα διανύσματα και το x_3 είναι γραμμικός συνδυασμός των x_1, x_2, x_4 . Επομένως υπάρχουν t_1, t_2, t_4 ώστε

$$x_3 = t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_4 x_4.$$

Το 1) είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ισότητας

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i (\lambda x_i) + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k \\ = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (\lambda_i \lambda) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\}.$$

Για το 2) για απλότητα υποθέσουμε ότι έχουμε 4 διανύσματα. Έστω ότι αντικαθιστούμε το x_2 με το $x_2 - \lambda x_4$. Τότε έχουμε ότι,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (x_2 - \lambda x_4) + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + (\lambda_4 - \lambda_2 \lambda) x_4.$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, x_2 - \lambda x_4, x_3, x_4\}.$$

3) Πάλι για απλότητα θα υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερα διανύσματα και το x_3 είναι γραμμικός συνδυασμός των x_1, x_2, x_4 . Επομένως υπάρχουν t_1, t_2, t_4 ώστε

$$x_3 = t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_4 x_4.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 (t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_4 x_4) + \lambda_4 x_4 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3 t_1) x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 t_2) x_2 + (\lambda_4 + \lambda_3 t_4) x_4. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$x \in \text{span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \Leftrightarrow x \in \text{span}\{x_1, x_2, x_4\}.$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι $(m \times n), (n \times r)$ πίνακες αντίστοιχα και $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ δείξτε ότι

- 1) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$.
- 2) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{A}$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι $(m \times n), (n \times r)$ πίνακες αντίστοιχα και $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ δείξτε ότι

- 1) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$.
- 2) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{A}$.

Λύση . 1) Έστω $\Sigma_i(\mathbb{A})$ το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{A}$ και $\Sigma_i(\mathbb{C})$ το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{C}$. Τότε

$$\begin{aligned}\Sigma_j(\mathbb{C}) &= j - \text{στήλη } \mathbb{C} = \mathbb{A} \times (j - \text{στήλη}) \mathbb{B} \\ &= b_{1,j} \Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,j} \Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,j} \Sigma_n(\mathbb{A}).\end{aligned}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι $(m \times n), (n \times r)$ πίνακες αντίστοιχα και $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ δείξτε ότι

- 1) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$.
- 2) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{A}$.

Λύση . 1) Έστω $\Sigma_i(\mathbb{A})$ το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{A}$ και $\Sigma_i(\mathbb{C})$ το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{C}$. Τότε

$$\begin{aligned}\Sigma_j(\mathbb{C}) &= j - \text{στήλη } \mathbb{C} = \mathbb{A} \times (j - \text{στήλη}) \mathbb{B} \\ &= b_{1,j}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,j}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,j}\Sigma_n(\mathbb{A}).\end{aligned}$$

Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned}\lambda_1\Sigma_1(\mathbb{C}) + \lambda_2\Sigma_2(\mathbb{C}) + \cdots + \lambda_r\Sigma_r(\mathbb{C}) &= \\ &\lambda_1(b_{1,1}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,1}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,1}\Sigma_n(\mathbb{A})) \\ &+ \lambda_2(b_{1,2}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,2}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,2}\Sigma_n(\mathbb{A})) \\ &+ \cdots \\ &+ \lambda_r(b_{1,r}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,r}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,r}\Sigma_n(\mathbb{A})) \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_{1,i}\right)\Sigma_1(\mathbb{A}) + \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_{2,i}\right)\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_{n,i}\right)\Sigma_n(\mathbb{A}).\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι $(m \times n), (n \times r)$ πίνακες αντίστοιχα και $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ δείξτε ότι

- 1) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$.
- 2) κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{A}$.

Λύση . 1) Έστω $\Sigma_i(\mathbb{A})$ το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{A}$ και $\Sigma_i(\mathbb{C})$ το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{C}$. Τότε

$$\begin{aligned}\Sigma_j(\mathbb{C}) &= j - \text{στήλη } \mathbb{C} = \mathbb{A} \times (j - \text{στήλη}) \mathbb{B} \\ &= b_{1,j}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,j}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,j}\Sigma_n(\mathbb{A}).\end{aligned}$$

Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned}\lambda_1\Sigma_1(\mathbb{C}) + \lambda_2\Sigma_2(\mathbb{C}) + \cdots + \lambda_r\Sigma_r(\mathbb{C}) &= \\ &\lambda_1(b_{1,1}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,1}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,1}\Sigma_n(\mathbb{A})) \\ &+ \lambda_2(b_{1,2}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,2}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,2}\Sigma_n(\mathbb{A})) \\ &+ \dots \\ &+ \lambda_r(b_{1,r}\Sigma_1(\mathbb{A}) + b_{2,r}\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + b_{n,r}\Sigma_n(\mathbb{A})) \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_{1,i}\right)\Sigma_1(\mathbb{A}) + \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_{2,i}\right)\Sigma_2(\mathbb{A}) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_{n,i}\right)\Sigma_n(\mathbb{A}).\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{A}$.

2) Επειδή $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$. Από το 1) έχουμε ότι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{C}^\top$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του $\mathbb{B}^\top$. Επομένως από τον ορισμό του ανάστροφου έχουμε έχουμε ότι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{C}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων γραμμών του $\mathbb{B}$.

Εάν $\mathfrak{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ τότε η ευθεία που παράγει και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι τα παράλληλα του διανύσματος, δηλαδή τα

$$\mathbb{b} = \lambda \mathfrak{a} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathfrak{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ τότε η ευθεία που παράγει και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι τα παράλληλα του διανύσματος, δηλαδή τα

$$\mathbb{b} = \lambda \mathfrak{a} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\mathbb{b}$ είναι εξαρτημένο από το διάνυσμα $\mathfrak{a}$.

Εάν α ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ τότε η ευθεία που παράγει και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι τα παράλληλα του διανύσματος, δηλαδή τα

$$\mathbb{b} = \lambda \alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\mathbb{b}$ είναι εξαρτημένο από το διάνυσμα α . Διαιρώντας με λ την σχέση $\mathbb{b} = \lambda \alpha$ παίρνουμε $\alpha = \lambda^{-1} \mathbb{b}$ και άρα έχουμε ότι το α εξαρτάται από το $\mathbb{b}$.

Εάν α ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ τότε η ευθεία που παράγει και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι τα παράλληλα του διανύσματος, δηλαδή τα

$$\mathbb{b} = \lambda \alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\mathbb{b}$ είναι εξαρτημένο από το διάνυσμα α . Διαιρώντας με λ την σχέση $\mathbb{b} = \lambda \alpha$ παίρνουμε $\alpha = \lambda^{-1} \mathbb{b}$ και άρα έχουμε ότι το α εξαρτάται από το $\mathbb{b}$.

Ορισμός 5. Εάν δύο διανύσματα $\alpha, \mathbb{b}$ συνδέονται με μια σχέση της μορφής $\alpha = \lambda \mathbb{b}$ τότε λέμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν έχουμε τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ και υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = 0$ τότε αν ο $c_i \neq 0$ παίρνουμε

$$c_i\alpha_i = -c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 - \dots - c_{i-1}\alpha_{i-1} - c_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - c_k\alpha_k \Leftrightarrow$$

$$\alpha_i = \left(\frac{-c_1}{c_i}\right)\alpha_1 + \left(\frac{-c_2}{c_i}\right)\alpha_2 + \dots + \left(\frac{-c_{i-1}}{c_i}\right)\alpha_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\alpha_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\alpha_k.$$

Εάν έχουμε τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ και υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = 0$ τότε αν ο $c_i \neq 0$ παίρνουμε

$$c_i\alpha_i = -c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 - \dots - c_{i-1}\alpha_{i-1} - c_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - c_k\alpha_k \Leftrightarrow$$

$$\alpha_i = \left(\frac{-c_1}{c_i}\right)\alpha_1 + \left(\frac{-c_2}{c_i}\right)\alpha_2 + \dots + \left(\frac{-c_{i-1}}{c_i}\right)\alpha_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\alpha_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\alpha_k.$$

Έτσι έχουμε ότι το α_i εξαρτάται από τα διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k$. Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Εάν έχουμε τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ και υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = 0$ τότε αν ο $c_i \neq 0$ παίρνουμε

$$c_i\alpha_i = -c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 - \dots - c_{i-1}\alpha_{i-1} - c_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - c_k\alpha_k \Leftrightarrow$$

$$\alpha_i = \left(\frac{-c_1}{c_i}\right)\alpha_1 + \left(\frac{-c_2}{c_i}\right)\alpha_2 + \dots + \left(\frac{-c_{i-1}}{c_i}\right)\alpha_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\alpha_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\alpha_k.$$

Έτσι έχουμε ότι το α_i εξαρτάται από τα διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k$. Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Λέμε ότι τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Εάν έχουμε τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ και υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k = 0$ τότε αν ο $c_i \neq 0$ παίρνουμε

$$c_i\alpha_i = -c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 - \dots - c_{i-1}\alpha_{i-1} - c_{i+1}\alpha_{i+1} - \dots - c_k\alpha_k \Leftrightarrow$$

$$\alpha_i = \left(\frac{-c_1}{c_i}\right)\alpha_1 + \left(\frac{-c_2}{c_i}\right)\alpha_2 + \dots + \left(\frac{-c_{i-1}}{c_i}\right)\alpha_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\alpha_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\alpha_k.$$

Έτσι έχουμε ότι το α_i εξαρτάται από τα διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k$. Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Λέμε ότι τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.
Ισοδύναμα τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν υπάρχουν αριθμοί $t_1, \dots, t_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_kv_k = 0.$$

Παράδειγμα 6. Τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\mathfrak{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διότι

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 6. Τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\mathfrak{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διότι

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 7. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Λέμε ότι τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα λέμε ότι τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0.$$

Παρατηρήσεις 8. i) Ας παρατηρήσουμε ότι αν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε για κάθε $j \leq k$, τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_j$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατηρήσεις 8. i) Ας παρατηρήσουμε ότι αν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε για κάθε $j \leq k$, τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_j$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένα τότε ένα από αυτά θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Εάν το v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j$ θα ήταν και γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ που είναι άτοπο εφόσον έχουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατηρήσεις 8. i) Ας παρατηρήσουμε ότι αν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε για κάθε $j \leq k$, τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_j$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένα τότε ένα από αυτά θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Εάν το v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j$ θα ήταν και γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ που είναι άτοπο εφόσον έχουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ii) Δεν ισχύει το ανάλογο για τα γραμμικά εξαρτημένα.

Παρατηρήσεις 8. i) Ας παρατηρήσουμε ότι αν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε για κάθε $j \leq k$, τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_j$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένα τότε ένα από αυτά θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Εάν το v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j$ θα ήταν και γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ που είναι άτοπο εφόσον έχουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ii) Δεν ισχύει το ανάλογο για τα γραμμικά εξαρτημένα. Δηλαδή αν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και $j \leq k$, τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_j$ μπορεί να είναι εξαρτημένα αλλά μπορεί να είναι και ανεξάρτητα.

Για παράδειγμα τα διανύσματα $\varkappa_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varkappa_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\varkappa_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εφόσον $\varkappa_2 = 2\varkappa_1 + 0\varkappa_3$.

Τα διανύσματα $\varkappa_1, \varkappa_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ενώ τα $\varkappa_1, \varkappa_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;).

Παράδειγμα 7. Τα n -διανύσματα

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{i\text{-θέση}} \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι,

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατήρηση 9. Επειδή

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

έχουμε ότι

τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση, όπου $\mathbb{A}$ ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Αυτό μας δίνει ότι αν το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική τότε τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατήρηση 9. Επειδή

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

έχουμε ότι

τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση, όπου $\mathbb{A}$ ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Αυτό μας δίνει ότι αν το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική τότε τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 8. Έστω ότι έχουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα $\mathbb{U} = (u_{i,j})_{i=1,j=i}^{n,n}$ με μη -μηδενικά στην διαγώνιο.

Παρατήρηση 9. Επειδή

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

έχουμε ότι

τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση, όπου $\mathbb{A}$ ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Αυτό μας δίνει ότι αν το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική τότε τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 8. Έστω ότι έχουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα $\mathbb{U} = (u_{i,j})_{i=1,j=i}^{n,n}$ με μη-μηδενικά στην διαγώνιο.

Σε αυτή την περίπτωση το ομογενές σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Επομένως από τα παραπάνω τα διανύσματα που είναι οι στήλες του $\mathbb{U}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 9. Δείτε ότι τα πολυώνυμα $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$,
 $P_2(x) = 2x^2 + x + 8$ και $P_3(x) = x^2 + 8x - 7$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
στοιχεία του $C([0, 1])$.

Παράδειγμα 9. Δείτε ότι τα πολυώνυμα $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$, $P_2(x) = 2x^2 + x + 8$ και $P_3(x) = x^2 + 8x - 7$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $C([0, 1])$.

Έστω c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί με $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 = \mathbb{0}$ όπου $\mathbb{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε

$$\mathbb{0} = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 \Leftrightarrow$$

Παράδειγμα 9. Δείτε ότι τα πολυώνυμα $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$, $P_2(x) = 2x^2 + x + 8$ και $P_3(x) = x^2 + 8x - 7$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $C([0, 1])$.
Έστω c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί με $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 = 0$ όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε

$$0 = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 \Leftrightarrow$$

$$0 = c_1(x^2 - 2x + 3) + c_2(2x^2 + x + 8) + c_3(x^2 + 8x - 7) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Παράδειγμα 9. Δείτε ότι τα πολυώνυμα $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$, $P_2(x) = 2x^2 + x + 8$ και $P_3(x) = x^2 + 8x - 7$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $C([0, 1])$.

Έστω c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί με $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 = 0$ όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε

$$0 = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 \Leftrightarrow$$

$$0 = c_1(x^2 - 2x + 3) + c_2(2x^2 + x + 8) + c_3(x^2 + 8x - 7) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$0 = (c_1 + 2c_2 + c_3)x^2 + (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x + 3c_1 + 8c_2 - 7c_3 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Παράδειγμα 9. Δείτε ότι τα πολυώνυμα $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$, $P_2(x) = 2x^2 + x + 8$ και $P_3(x) = x^2 + 8x - 7$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $C([0, 1])$.
Έστω c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί με $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 = 0$ όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 \Leftrightarrow \\ 0 &= c_1(x^2 - 2x + 3) + c_2(2x^2 + x + 8) + c_3(x^2 + 8x - 7) \quad \forall x \in [0, 1] \\ 0 &= (c_1 + 2c_2 + c_3)x^2 + (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x + 3c_1 + 8c_2 - 7c_3 \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα για κάθε $x \in [0, 1]$ θα πρέπει

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0, \quad -2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0 \quad \text{και} \quad 3c_1 + 8c_2 - 7c_3 = 0.$$

Παράδειγμα 9. Δείτε ότι τα πολυώνυμα $P_1(x) = x^2 - 2x + 3$, $P_2(x) = 2x^2 + x + 8$ και $P_3(x) = x^2 + 8x - 7$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $C([0, 1])$.

Έστω c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί με $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 = 0$ όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 \Leftrightarrow \\ 0 &= c_1(x^2 - 2x + 3) + c_2(2x^2 + x + 8) + c_3(x^2 + 8x - 7) \quad \forall x \in [0, 1] \\ 0 &= (c_1 + 2c_2 + c_3)x^2 + (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x + 3c_1 + 8c_2 - 7c_3 \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα για κάθε $x \in [0, 1]$ θα πρέπει

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0, \quad -2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0 \quad \text{και} \quad 3c_1 + 8c_2 - 7c_3 = 0.$$

Η παραπάνω εξισώσεις είναι ένα 3×3 ομογενές σύστημα. Ο πίνακας του

συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε τις λύσεις με απαλοιφή Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(2/5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} = \mathbb{U}.$$

Ο πίνακας $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός με μη-μηδενικά στη διαγώνιο. Άρα το ομογενές $\mathbb{U}\mathbf{x} = 0$ έχει μόνο λύση τη μηδενική. Επομένως και το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση τη $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Επομένως τα πολυώνυμα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.