

Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας, ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός

$$\det(\mathbb{A}) = ad - cb.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ συμβολίζεται επίσης με $\det(\mathbb{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Παραδείγματα 1. 1) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 10$.

2) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 5 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 0$.

Ορισμός 1. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας τη i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$, ονομάζεται (i,j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i,j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 1. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Για τους παραπάνω πίνακες έχουμε ότι

$$\det \mathbb{M}_{1,1} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3, \quad \det \mathbb{M}_{1,2} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6,$$

και

$$\det \mathbb{M}_{1,3} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3,$$

Ο ορισμός της ορίζουσας για $n \times n$ -πίνακες, $n \geq 3$, γίνεται επαγωγικά.

Ορισμός 2. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας $n \times n$ -πίνακας (i,j) -συμπαράγοντα ονομάζουμε τον αριθμό

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\mathbb{M}_{i,j}).$$

Ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= a_{11}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \cdots + a_{1,n}A_{1,n} \\ &= a_{11} \det(\mathbb{M}_{1,1}) - a_{1,2} \det(\mathbb{M}_{1,2}) + \cdots + (-1)^{i+1} a_{1,i} \det(\mathbb{M}_{1,i}) + \\ &\quad \cdots + (-1)^{n+1} \det(\mathbb{M}_{1,n}). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε τους ελάχιστονες πίνακες τους έχουμε

βρει στο Παράδειγμα 1.

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 1 \det(\mathbb{M}_{1,1}) - 2 \det(\mathbb{M}_{1,2}) + 3 \det(\mathbb{M}_{1,3}) \\ &= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,3}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Τέλος

$$\mathbb{M}_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,4}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2 \det(\mathbb{M}_{1,1}) - 0 \det(\mathbb{M}_{1,2}) + 0 \det(\mathbb{M}_{1,3}) - 3 \det(\mathbb{M}_{1,4}) \\ &= -3(-9) = 27. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Βρείτε για ποια λ η ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ είναι μηδέν.}$$

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0. \text{ Η εξίσωση αυτή έχει λύσεις } \lambda = 6, -1.$$

Παράδειγμα 4. Βρείτε αναλυτικό τύπο για τη συνάρτηση

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 2-x & 2 & 1 \\ 0 & -x & -2 \\ 3 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x) \det \begin{bmatrix} -x & -2 \\ 0 & -x \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -x \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} 0 & -x \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (2-x)x^2 - 2(0(-x) - 3(-2)) + 1(0 - 3(-x)) \\ &= 2x^2 - x^3 - 12 + 3x \\ &= -x^3 + 2x^2 + 3x - 12. \end{aligned}$$

Για ένα 3×3 πίνακα $\mathbb{A}$ είναι απλό να ελέγξουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του ξεκινώντας από τη δεύτερη ή τρίτη γραμμή αντί για την πρώτη, δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= a_{2,1}A_{2,1} + a_{2,2}A_{2,2} + a_{2,3}A_{2,3} \\ &= a_{3,1}A_{3,1} + a_{3,2}A_{3,2} + a_{3,3}A_{3,3}. \quad (A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}).\end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι αυτό ισχύει για κάθε $n \times n$ πίνακα και επιπλέον μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του χρησιμοποιώντας τις στήλες αντί τις γραμμές.

Θεώρημα 4. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας $(n \times n)$ -πίνακας τότε για οποιοδήποτε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει

$$\det(\mathbb{A}) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + a_{i,3}A_{i,3} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}. \quad (1)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα παίρνοντας το άθροισμα των στοιχείων της i -γραμμής πολλαπλασιασμένα με τον αντίστοιχο συμπαράγοντα.

Επίσης για οποιοδήποτε $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\det(\mathbb{A}) = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + a_{3,j}A_{3,j} + \dots + a_{n,j}A_{n,j}. \quad (2)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα παίρνοντας το άθροισμα των στοιχείων της j -στήλης πολλαπλασιασμένα με τον αντίστοιχο συμπαράγοντα.

Πόρισμα 5. Για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$ ισχύει $\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}^\top)$.

Παράδειγμα 5. Στο Παράδειγμα 3 υπολογίσαμε την ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ με τον ορισμό.}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την ορίζουσα του χρησιμοποιώντας την 4η στήλη που έχει πολλά μηδενικά και άρα θα χρειαστεί να υπολογίσουμε λιγότερους συμπαράγοντες.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 3(-1)^5 \det(\mathbb{M}_{1,4}) + 0(-1)^6 \det(\mathbb{M}_{2,4}) + 0(-1)^7 \det(\mathbb{M}_{3,4}) + 0(-1)^8 \det(\mathbb{M}_{4,4}) \\ &= (-3) \det \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3) \cdot (-3) \det \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{αναπτύσσοντας κατά την 1η γραμμή} \\ &= (-3)(-3) \cdot 3 = 27. \end{aligned}$$

Επίσης εάν

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ τότε επειδή } \mathbb{B} = \mathbb{A}^\top \text{ έχουμε ότι } \det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) = 27.$$

Θα δούμε τώρα κάποιες απλές ιδιότητες των οριζουσών οι οποίες αποδεικνύονται με επαγωγή.

- P1) Εάν σ' ένα πίνακα $\mathbb{A}$ αλλάξουμε τη θέση 2 γραμμών (ή 2-στηλών) τότε η ορίζουσα του νέου πίνακα $\mathbb{B}$ ισούται με $-\det(\mathbb{A})$, δηλαδή

$$\det(\mathbb{B}) = -\det(\mathbb{A}).$$

Έτσι έχουμε ότι αν $P_{i,j}$ είναι ο στοιχειώδης πίνακας που αλλάζει θέση στις i, j γραμμές ισχύει

$$\det(P_{i,j}\mathbb{A}) = -\det(\mathbb{A}). \quad (3)$$

Ας το δούμε για 2×2 πίνακες. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ τότε κάνοντας τη 2 γραμμή πρώτη παίρνουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$.

Τότε

$$\det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} = a_{2,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{2,2} = -\det(\mathbb{A}).$$

- P2) Εάν σ' πίνακα $\mathbb{A}$ υπάρχει μια γραμμή ή μια στήλη που όλα της τα στοιχεία είναι μηδέν τότε $\det(\mathbb{A}) = 0$.

Πράγματι εάν η i -γραμμή αποτελείται από μηδενικούς αριθμούς τότε από το Θεώρημα 4 παίρνουμε

$$\det(\mathbb{A}) = 0A_{i,1} + 0A_{i,2} + \cdots + 0A_{i,n} = 0$$

- P3) Εάν σ' ένα πίνακα $\mathbb{A}$ δύο γραμμές (ή δύο στήλες) είναι ίσες τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν.

Πράγματι εάν εναλλάξουμε τη θέση των δύο ίσων στηλών, τότε έχουμε ότι η ορίζουσα του καινούργιου πίνακα είναι ίση με αυτή του αρχικού. Από την ιδιότητα $P1$) η ορίζουσα θα είναι επίσης ίση με $-\det(\mathbb{A})$. Άρα

$$\det(\mathbb{A}) = -\det(\mathbb{A}) \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = 0.$$

- P4) Εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής μ' ένα αριθμό λ τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει είναι ίση με $\lambda \det(\mathbb{A})$. Δηλαδή ισχύει $\det(\mathbb{M}_i(\lambda)\mathbb{A}) = \lambda \det(\mathbb{A})$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{M}_i(\lambda)\mathbb{A}) &= \lambda a_{i,1} A_{i,1} + \lambda a_{i,2} A_{i,2} + \cdots + \lambda a_{i,n} A_{i,n} \\ &\text{εφόσον ο } (i, j) \text{ ελάσσων πίνακας του } \mathbb{M}_i(\lambda)\mathbb{A} \\ &\text{είναι ίσος με τον } (i, j) \text{ ελάσσων πίνακα του } \mathbb{A} \\ &= \lambda(a_{i,1} A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2} + \cdots + a_{i,n} A_{i,n}) \\ &= \lambda \det(\mathbb{A}). \end{aligned}$$

- P5) Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας άνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός) πίνακας τότε η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του, δηλαδή

$$\det(\mathbb{A}) = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

Ιδιαίτερα για τον ταυτοτικό $n \times n$ -πίνακα $\mathbb{I}_n$ ισχύει $\det(\mathbb{I}_n) = 1$.

Ας δούμε γιατί η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του. Εάν $\mathbb{A}$ ένας 2×2 άνω τριγωνικός πίνακας τότε

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = a_{1,1}a_{2,2} - 0a_{1,2} = a_{1,1}a_{2,2}.$$

Άρα ισχύει το συμπέρασμα. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα για κάθε $k \times k$ -άνω τριγωνικό πίνακα, $k = 2, \dots, n-1$. Έστω $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ -άνω τριγωνικός πίνακας. Η απόδειξη στηρίζεται στην παρατήρηση ότι ο ελάσσων πίνακας $\mathbb{M}_{1,1}$ είναι άνω τριγωνικός. Πράγματι αν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Επομένως από επαγωγική υπόθεση $\det(\mathbb{M}_{1,1}) = a_{2,2}a_{3,3} \cdots a_{n,n}$. Έτσι εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι άνω τριγωνικός, και άρα $a_{2,1} = a_{3,1} = \cdots = a_{n,1} = 0$, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της πρώτης στήλης για τον υπολογισμό της ορίζουσας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= a_{1,1} \det(\mathbb{M}_{1,1}) - 0 \det(\mathbb{M}_{2,1}) + \cdots + 0(-1)^{1+n} \det(\mathbb{M}_{n,1}) \\ &= a_{1,1} \det(\mathbb{M}_{1,1}) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \cdots a_{n,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Παράδειγμα 6. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$.

Παράδειγμα 7.

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ τότε επειδή } \mathbb{A} = M_3(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbb{A}) = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Είδαμε ότι η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίση με

$$\det(\mathbb{A}) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}.$$

Το επόμενο λήμμα μας λέει ότι αν αντικαταστήσουμε τους συμπαράγοντες $A_{i,k}$ με τους συμπαράγοντες $A_{j,k}$ που αντιστοιχούν σε μια άλλη γραμμή τότε το άθροισμα γίνεται ίσο με μηδέν.

Λήμμα 6. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας τότε για κάθε $i \neq j$ ισχύει

$$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \cdots + a_{i,n}A_{j,n} = 0.$$

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η ορίζουσα ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται αν σε μια γραμμή του πίνακα προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής.

Πρόταση 1. Εάν στη i -γραμμή του πίνακα $\mathbb{A}$ προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο της j -γραμμής, $j \neq i$, τότε η ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ δεν αλλάζει.

Ας θυμηθούμε ότι η αφαίρεση ενός πολλαπλάσιου της j -γραμμής από την i -γραμμή δίνεται από τον στοιχειώδη πίνακα $E_{i,j}(\lambda)$. Η παραπάνω ιδιότητα μας λέει ότι

$$\det(E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}). \quad (5)$$

Ας δούμε γιατί ισχύει αυτή η ιδιότητα. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του πίνακα $E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A}$ κατά μήκος της i -γραμμής. Τα στοιχεία της i -γραμμής του πίνακα $E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A}$ είναι τα $a_{i,k} - \lambda_{j,k}a_{j,k}$, $k = 1, \dots, n$. Επίσης $(E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A})_{i,k} = \mathbb{M}_{i,k}$ εφόσον οι πίνακες $E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A}$ και $\mathbb{A}$ εκτός της i -γραμμής έχουν ίσες τις υπόλοιπες γραμμές. Επομένως υπολογίζοντας την ορίζουσα χρησιμοποιώντας την i -γραμμή,

$$\begin{aligned} \det(E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A}) &= \sum_{k=1}^n (a_{i,k} - \lambda a_{j,k}) (-1)^{i+k} \det((E_{i,j}\mathbb{A})_{i,k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{i,k} - \lambda a_{j,k}) (-1)^{i+k} \det(\mathbb{M}_{i,k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{i,k} (-1)^{i+k} \det(\mathbb{M}_{i,k}) - \lambda \sum_{k=1}^n a_{j,k} (-1)^{i+k} \det(\mathbb{M}_{i,k})) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \det(\mathbb{M}_{i,k}) \end{aligned}$$

$$\text{διότι από Λήμμα 6 } \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{j,k} \det(\mathbb{M}_{i,k}) = 0.$$

$$= \det(\mathbb{A}).$$

Οι ορίζουσες των πινάκων $E_{i,j}(\lambda)$, $M_i(\lambda)$ και $P_{i,j}$ είναι ίσες με

$$\det(E_{i,j}(\lambda)) = 1, \quad \det(M_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{και} \quad \det(P_{i,j}) = -1.$$

Οι ισότητες αυτές ισχύουν διότι

- ο $E_{i,j}(\lambda)$ είναι άνω ή κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο.
- ο $M_i(\lambda)$ είναι διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της διαγωνίου ίσα με ένα εκτός αυτό της i -θέσης που είναι ίσο με λ .
- Τέλος ο $P_{i,j}$ προκύπτει με εναλλαγή των i, j -γραμμών του πίνακα $\mathbb{I}_n$ και άρα έχει ορίζουσα ίση με $-\det(\mathbb{I}_n) = -1$.

Από τις ιδιότητες των οριζουσών και την Πρόταση 1 παίρνουμε ότι για κάθε πίνακα $\mathbb{A}$,

- ❶ $\det(E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}) \det(E_{i,j}(\lambda)) = \det(\mathbb{A}E_{i,j}(\lambda)),$
- ❷ $\det(\mathbb{M}_i(\lambda)\mathbb{A}) = \lambda \det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{M}_{i,j}(\lambda)) = \det(\mathbb{A}\mathbb{M}_i(\lambda))$
- ❸ $\det(\mathbb{P}_{i,j}\mathbb{A}) = -\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{P}_{i,j}) = \det(\mathbb{A}\mathbb{P}_{i,j}).$

Ας δούμε γιατί $\det(\mathbb{A}) \det(E_{i,j}(\lambda)) = \det(\mathbb{A}E_{i,j}(\lambda)).$

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}E_{i,j}(\lambda)) &= \det((\mathbb{A}E_{i,j}(\lambda))^{\top}) = \det((E_{i,j}(\lambda))^{\top} \mathbb{A}^{\top}) \\ &= \det(E_{j,i}(\lambda) \mathbb{A}^{\top}) = \det(\mathbb{A}^{\top}) = \det(\mathbb{A}) \\ &= \det(\mathbb{A}) \det(E_{i,j}(\lambda))\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{M}_{i,j}(\lambda)) = \det(\mathbb{A}\mathbb{M}_i(\lambda))$ και $\det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{P}_{i,j}) = \det(\mathbb{A}\mathbb{P}_{i,j}).$

Από τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε ότι αν $\mathbb{E}$ είναι το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ τότε

$$\det(\mathbb{E}) = \prod_{i=1}^n \det(\mathbb{E}_i). \quad (6)$$

Ιδιαίτερα αν $\mathbb{E}$ είναι πεπερασμένο γινόμενο στοιχειωδών πινάκων $E_{i,j}(\lambda)$ και $P_{i,j}$ τότε

$$\det(\mathbb{E}\mathbb{A}) = \pm \det(\mathbb{A}) \quad (7)$$

όπου έχουμε το πρόσημο $+$, αν έχουμε άρτιο αριθμό αλλαγών γραμμών και έχουμε το πρόσημο $-$, αν έχουμε περιττό αριθμό αλλαγών γραμμών.

Από τα παραπάνω έχουμε τα εξής

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ είναι η $\mathbb{L}\mathbb{U}$ παραγοντοποίηση του πίνακα $\mathbb{A}$ τότε

$$\det(\mathbb{A}) = \pm \det(\mathbb{U}) = \pm u_{1,1} u_{2,2} \dots u_{n,n} = \pm \text{γινόμενο οδηγών}$$

όπου το πρόσημο είναι $+$, εάν έχουμε άρτιο πλήθος εναλλαγών γραμμών και είναι $-$ εάν έχουμε περιττό πλήθος εναλλαγών γραμμών.

Παράδειγμα 8. Έστω $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του.
Φέρνουμε τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{2,3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$P_{2,3}E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}) = -(2(-6)(-5)) = 30$$

όπου το πρόσημο – εμφανίζεται γιατί έχουμε έλουμε ένα πίνακα $P_{i,j}$.

Παράδειγμα 9. Έστω $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστεί η ορίζουσά του.

Φέρνουμε τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(0)E_{2,1}(-1/2)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2/3)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(E_{3,2}(-2/3)E_{3,1}(0)E_{2,1}(-1/2)\mathbb{A}) &= \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \det(\mathbb{A}) = 2(3/2)(4/3) = 4. \end{aligned}$$

Έχουμε δει ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας είναι μη-ιδιόμορφος αν και μόνο αν έχει n οδηγούς αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος.

Θα δούμε τώρα ένα χαρακτηρισμό της αντιστρεψιμότητας μέσω της ορίζουσας.

Θεώρημα 7. *Ο τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A}$ είναι ιδιόμορφος αν και μόνο αν $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.*

Ισοδύναμα ο τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

Απόδειξη.

Συμβολίζουμε με $\mathbb{E}$ το γινόμενο των στοιχειωδών πινάκων ώστε $\mathbb{E}\mathbb{A} = \mathbb{U}$ όπου $\mathbb{U}$ είναι κλιμακωτός. Από την Πρόταση 2 έχουμε ότι

$$\det(\mathbb{A}) = 0 \text{ αν και μόνο αν } \det(\mathbb{U}) = 0.$$

Εάν ο $\mathbb{A}$ είναι ιδιόμορφος τότε έχει λιγότερους από n -οδηγούς και άρα ο $\mathbb{U}$ έχει μια μηδενική γραμμή. Από ιδιότητα $P5$) παίρνουμε $\det(\mathbb{U}) = 0$ και άρα και $\det(\mathbb{A}) = 0$.

Αντιστρόφως εάν $\det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow \det(\mathbb{U}) = 0$. Επειδή ο $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός έχουμε $0 = \det(\mathbb{U}) = u_{1,1}u_{2,2} \dots u_{n,n}$. Τα στοιχεία της διαγωνίου του $\mathbb{U}$ είναι οι οδηγοί του πίνακα $\mathbb{A}$. Επειδή $0 = u_{1,1}u_{2,2} \dots u_{n,n}$ έχουμε ότι τουλάχιστον ένα στοιχείο της διαγωνίου του $\mathbb{U}$ είναι μηδέν και άρα ο $\mathbb{A}$ δεν έχει n -οδηγούς. Επομένως είναι ιδιόμορφος. □

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών.

Θεώρημα 8. Ισχύει $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B})$.

Απόδειξη.

Εάν ο $\mathbb{B}$ είναι ιδιόμορφος τότε $\det(\mathbb{B}) = 0$. Ας θυμηθούμε ότι ένας πίνακας $\mathbb{B}$ είναι ιδιόμορφος αν και μόνο αν το σύστημα $\mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση. Εάν το σύστημα $\mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση τότε και το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση και άρα και ο $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι ιδιόμορφος. Επομένως $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = 0$. Εάν ο $\mathbb{B}$ δεν είναι ιδιόμορφος τότε υπάρχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχειωδών πινάκων $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_k$ ώστε

$$\mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_1 \mathbb{B} = \mathbb{I}_n \Rightarrow \mathbb{B} = \mathbb{E}_1^{-1} \cdots \mathbb{E}_k^{-1}.$$

Από την (6) παίρνουμε $\det(\mathbb{B}) = \prod_{i=1}^k \det(\mathbb{E}_i^{-1})$.
Επίσης $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{E}_1^{-1} \cdots \mathbb{E}_k^{-1}$ και άρα

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}\mathbb{E}_1^{-1} \cdots \mathbb{E}_k^{-1}) = \det(\mathbb{A}) \prod_{i=1}^k \det(\mathbb{E}_i^{-1}) = \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}).$$



Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ -πίνακας τότε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

τον ονομάζουμε πίνακα συμπαραγόντων και συμβολίζεται με $\mathbb{A}_{\text{συμπ}}$.

Έχουμε δει ότι

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \text{ και } \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{k,j} = 0 \text{ για κάθε } i \neq k.$$

Αυτές οι δύο ιδιότητες μας δίνουν

$$\mathbb{A} \mathbb{A}_{\text{συμπ}} = \begin{bmatrix} \det(\mathbb{A}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(\mathbb{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \det(\mathbb{A}) \end{bmatrix} = \det(\mathbb{A}) \mathbb{I}_n.$$

Πράγματι το (i, j) -στοιχείο του πίνακα $\mathbb{A} \mathbb{A}_{\text{συμπ}}$ είναι το

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{k,j} = \begin{cases} \det(\mathbb{A}) & \text{εάν } i=j \\ 0 & \text{εάν } i \neq j \text{ από το Λήμμα 6.} \end{cases}$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\mathbb{A} \left(\frac{1}{\det(\mathbb{A})} \mathbb{A}_{\text{συμπ}} \right) = \mathbb{I}_n \Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \mathbb{A}_{\text{συμπ}}$$

όταν $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

Παράδειγμα 10. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ τότε

$$M_{11} = [4], \quad M_{1,2} = [3], \quad M_{2,1} = [2] \text{ και } M_{2,2} = [1].$$

Επομένως

$$A_{11} = 4, \quad A_{1,2} = -3, \quad A_{2,1} = -2 \text{ και } A_{2,2} = 1.$$

Έτσι παίρνουμε

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \mathbb{A}_{\text{συμπ}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 11. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε την $\det(\mathbb{A})$ και να βρεθεί ο $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τους ορισμούς παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 27 - 32 - (18 - 20) + 16 - 15 = -2. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\mathbb{A}_{\text{συμπ}} = \begin{bmatrix} \det \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & -2 & 1 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbb{A}$ αντιστρέψιμος τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b} \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}.$$

Έτσι σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $\mathbb{x} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})}\mathbb{A}_{\text{συμπ}}\mathbb{b}$.

Η i -συντεταγμένη του $\mathbb{x}$ είναι το

$$\begin{aligned} & \left(\text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής του } \frac{1}{\det(\mathbb{A})}\mathbb{A}_{\text{συμπ}} \right) \cdot \mathbb{b} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} [\mathbb{A}_{1,i}, \mathbb{A}_{2,i}, \dots, \mathbb{A}_{n,i}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{k,i} b_k \\ &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{bmatrix} & & & i\text{-στήλη} & & & \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Την τελευταία ισότητα την παίρνουμε αναπτύσσοντας την ορίζουσα του παραπάνω πίνακα κατά την i -στήλη.

Εάν συμβολίσουμε με $A_i(b)$ τον πίνακα που προκύπτει αντικαθιστώντας στον πίνακα A την i -στήλη με το διάνυσμα b έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9. (Κανόνας Cramer) Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$ η μοναδική λύση x του συστήματος $Ax = b$ έχει συντεταγμένες

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Παράδειγμα 12. Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\det(A) \neq 0$ και να βρεθεί

το $(3, 4)$ στοιχείο του αντιστρόφου ως πηλίκο δύο οριζουσών.

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του A . Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Έχουμε ότι $AA^{-1} = I_4$ και η 4η στήλη του I_4 προκύπτει από το γινόμενο του πίνακα A με την τέταρτη στήλη του A^{-1} . Έτσι εάν $[b_{14}, b_{24}, b_{34}, b_{44}]^T$ είναι η τέταρτη στήλη του A^{-1}

$$A \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \\ b_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε

$$b_{3,4} = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{8} (\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}) = -\frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 13. Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\det(A) \neq 0$ και να βρεθεί το

$(2, 3)$ στοιχείο του αντιστρόφου ως πηλίκο δύο οριζουσών.

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του A . Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

Για τη 2ο ερώτημα, έχουμε ότι $AA^{-1} = I_3$ και η 3η στήλη του I_3 προκύπτει από το γινόμενο του πίνακα A με την τρίτη στήλη του A^{-1} . Έτσι εάν $[b_{13}, b_{23}, b_{33}]^T$ είναι η τρίτη στήλη του A^{-1}

$$A \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε

$$b_{2,3} = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{4} (\det \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \det \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \det \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}) = -\frac{3}{4}.$$

Παράδειγμα 14. Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και

$$C = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ να βρεθούν}$$

- 1) η ορίζουσα του πίνακα A
- 2) ο συμπαράγων $A_{1,1}$ και η η ορίζουσα του πίνακα B σε συνάρτηση με την ορίζουσα του πίνακα A .
- 3) η ορίζουσα του πίνακα C για κάθε x .

- 1) Η ορίζουσα του πίνακα A είναι μηδέν γιατί δύο γραμμές τους είναι ίσες.
- 2) Ο συμπαράγων $A_{1,1}$ του πίνακα A είναι ίσος με

$$A_{11} = \det(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Για τον πίνακα B ας παρατηρήσουμε ότι έχει τα ίδια στοιχεία με τον πίνακα A εκτός από το στοιχείο στη θέση $(1, 1)$. Έτσι έχουμε ότι οι συμπαραγόντες $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3}, B_{1,4}$ είναι ίσοι με τους $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}$.
Επομένως

$$\begin{aligned} \det(B) &= 0B_{1,1} - B_{1,2} + B_{1,3} - B_{1,4} \\ &= 0A_{1,1} - A_{1,2} + A_{1,3} - A_{1,4} \\ &= \det(A) - A_{1,1} = -1. \end{aligned}$$

Ο πίνακας C έχει επίσης τα ίδια στοιχεία με τον πίνακα A εκτός από το στοιχείο στη θέση $(1, 1)$. Επομένως

$$\begin{aligned}\det(C) &= xC_{1,1} - C_{1,2} + C_{1,3} - C_{1,4} \\ &= xA_{1,1} - A_{1,2} + A_{1,3} - A_{1,4} \\ &= \det(A) - A_{1,1} + xA_{1,1} = 1 - x.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 15. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας.

- ι) Εάν $A^2 = O$ δείξτε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος
 - ii) Εάν $A^2 + 2A + I = O$ ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.
- ι) Εάν $A^2 = O \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A) = 0$ και επομένως $\det(A) = 0$. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
- ii) Από την $A^2 + 2A + I = O \Rightarrow (-A^2 + 2A) = I$ και άρα $A(-A - 2I) = I$. Έτσι έχουμε ότι $A^{-1} = -A - 2I$.