

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1-1 εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1. 1-1 εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- 2. Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1. 1-1 εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- 2. Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1 $1 - 1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- 1 OT είναι $1 - 1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1 $1-1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- 1 OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
- 2 OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1 $1-1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- 2 Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- 1 OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
- 2 OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- ❶ $1-1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- ❷ Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- ❶ OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
- ❷ OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

Απόδειξη.

1) ($\Rightarrow$) Πράγματι αν ο T είναι $1-1$ και $T(x) = T(y)$ τότε αν $x \neq y$ θα είχαμε ότι $T(x) \neq T(y)$ που είναι άτοπο.

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- 1) $1-1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- 2) Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- 1) OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
- 2) OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

Απόδειξη.

1) ($\Rightarrow$) Πράγματι αν ο T είναι $1-1$ και $T(x) = T(y)$ τότε αν $x \neq y$ θα είχαμε ότι $T(x) \neq T(y)$ που είναι άτοπο.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως εάν $x \neq y$ από την υπόθεση θα έχουμε ότι αν $T(x) = T(y) \Rightarrow$

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- ❶ $1-1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- ❷ Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- ❶ OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
- ❷ OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

Απόδειξη.

1) ($\Rightarrow$) Πράγματι αν ο T είναι $1-1$ και $T(x) = T(y)$ τότε αν $x \neq y$ θα είχαμε ότι $T(x) \neq T(y)$ που είναι άτοπο.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως εάν $x \neq y$ από την υπόθεση θα έχουμε ότι αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$ που είναι άτοπο.

Ορισμός 1. Ένας $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι

- ❶ $1-1$ εάν $Tx \neq Ty$ για κάθε $x \neq y \in \mathbb{R}^n$.
- ❷ Επί του $\mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $y = Tx$

Λήμμα 2.

- ❶ OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
- ❷ OT είναι $1-1$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$.

Απόδειξη.

1) ($\Rightarrow$) Πράγματι αν ο T είναι $1-1$ και $T(x) = T(y)$ τότε αν $x \neq y$ θα είχαμε ότι $T(x) \neq T(y)$ που είναι άτοπο.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως εάν $x \neq y$ από την υπόθεση θα έχουμε ότι αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$ που είναι άτοπο.

Το 2) αποδεικνύεται παρόμοια. □

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη.

1) Ας θυμηθούμε ότι

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη.

1) Ας θυμηθούμε ότι

-οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ισοδύναμο με το ότι το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη.

1) Ας θυμηθούμε ότι

-οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ισοδύναμο με το ότι το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Επειδή το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμο με την $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ από το παραπάνω λήμμα έχουμε το ζητούμενο.

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη.

1) Ας θυμηθούμε ότι

-οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ισοδύναμο με το ότι το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Επειδή το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμο με την $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ από το παραπάνω λήμμα έχουμε το ζητούμενο.

2) Ας θυμηθούμε ότι οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμο με το ότι το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό αυτών των ιδιοτήτων βάση του πίνακα που αντιστοιχεί στον .

Θεώρημα 3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής και $\mathbb{A}$ ο πίνακας του. Τότε

- α) ο είναι 1-1 αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- β) ο είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη.

1) Ας θυμηθούμε ότι

-οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες είναι ισοδύναμο με το ότι το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Επειδή το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμο με την $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ από το παραπάνω λήμμα έχουμε το ζητούμενο.

2) Ας θυμηθούμε ότι οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμο με το ότι το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Αυτό μας δίνει το



Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Ο πίνακας του T είναι $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Ο πίνακας του T είναι $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

α) Ζητάμε να βρούμε $\mathbf{x}$ με

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow -3x_1 + x_2 = -1$$

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Ο πίνακας του T είναι $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

α) Ζητάμε να βρούμε $\mathbf{x}$ με

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow -3x_1 + x_2 = -1$$

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Ο πίνακας του T είναι $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

α) Ζητάμε να βρούμε $\mathbf{x}$ με

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow -3x_1 + x_2 = -1$$

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Ο πίνακας του T είναι $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

α) Ζητάμε να βρούμε $\mathbf{x}$ με

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ \mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} &\Leftrightarrow -3x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 4. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$, β) Είναι ο T επί του $\mathbb{R}^3$?

Ο πίνακας του T είναι $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

α) Ζητάμε να βρούμε $\mathbf{x}$ με

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ \mathbb{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \Leftrightarrow -3x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Το παραπάνω σύστημα έχει 2-οδηγούς. Η δεύτερη εξίσωση μας δίνει $x_2 = 2$ και η πρώτη $x_1 = 1$. Επομένως $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right]$$

Εάν $b_3 - 4b_2 - 7b_1 \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Έτσι από το Θεώρημα 3 ο T δεν είναι επί.

Ένα διάνυσμα $\mathbb{b}$ για το οποίο το σύστημα δεν έχει λύση είναι το $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι έχουμε ότι δεν υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ με $T(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3$.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right]$$

Εάν $b_3 - 4b_2 - 7b_1 \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Έτσι από το Θεώρημα 3 ο T δεν είναι επί.

Ένα διάνυσμα $\mathbb{b}$ για το οποίο το σύστημα δεν έχει λύση είναι το $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι έχουμε ότι δεν υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ με $T(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3$.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3 - 4b_2 - 7b_1 \end{array} \right]$$

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3 - 4b_2 - 7b_1 \end{array} \right]$$

Εάν $b_3 - 4b_2 - 7b_1 \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3 - 4b_2 - 7b_1 \end{array} \right]$$

Εάν $b_3 - 4b_2 - 7b_1 \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Έτσι από το Θεώρημα 3 ο T δεν είναι επί.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3 - 4b_2 - 7b_1 \end{array} \right]$$

Εάν $b_3 - 4b_2 - 7b_1 \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Έτσι από το Θεώρημα 3 ο T δεν είναι επί.

Ένα διάνυσμα $\mathbb{b}$ για το οποίο το σύστημα δεν έχει λύση είναι το $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για το β) έστω $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ζητάμε να δούμε αν το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Επαυξημένος πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ -3 & 1 & b_2 \\ 2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1/2 & b_2 + \frac{3b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_3 - 4b_2 - 7b_1 \end{array} \right]$$

Εάν $b_3 - 4b_2 - 7b_1 \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Έτσι από το Θεώρημα 3 ο T δεν είναι επί.

Ένα διάνυσμα $\mathbb{b}$ για το οποίο το σύστημα δεν έχει λύση είναι το $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι έχουμε ότι δεν υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ με $T(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για να είναι γραμμικά εξαρτημένα αρκεί να βρούμε αριθμούς λ_1, λ_2 με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδέν ώστε $\lambda_1 \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για να είναι γραμμικά εξαρτημένα αρκεί να βρούμε αριθμούς λ_1, λ_2 με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδέν ώστε $\lambda_1 \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρούμε λ ώστε $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{c}$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για να είναι γραμμικά εξαρτημένα αρκεί να βρούμε αριθμούς λ_1, λ_2 με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδέν ώστε $\lambda_1 \mathbb{b} + \lambda_2 \mathbb{c} = \mathbf{0}$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρούμε λ ώστε $\mathbb{b} = \lambda \mathbb{c}$.

Έχουμε ότι

$$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 2 \\ (-2) \cdot (-3) \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (-2) \mathbb{b}$$

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για να είναι γραμμικά εξαρτημένα αρκεί να βρούμε αριθμούς λ_1, λ_2 με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδέν ώστε $\lambda_1 \mathbb{b} + \lambda_2 \mathbb{c} = \mathbf{0}$.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρούμε λ ώστε $\mathbb{b} = \lambda \mathbb{c}$.

Έχουμε ότι

$$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 2 \\ (-2) \cdot (-3) \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (-2) \mathbb{b}$$

Επομένως τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Δίνονται τα διανύσματα $\mathbb{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{C}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Εάν $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το $\mathbb{b}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$.

Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Εάν $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

Ψάχνουμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}$.

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με τον να βρούμε λύσεις του συστήματος $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{A}$ ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

$$\text{Δίνονται τα διανύσματα } \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

Ψάχνουμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}$.

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με τον να βρούμε λύσεις του συστήματος $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{A}$ ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\text{Δίνονται τα διανύσματα } \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

Ψάχνουμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}$.

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με τον να βρούμε λύσεις του συστήματος $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{A}$ ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

$$\text{Δίνονται τα διανύσματα } \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

Ψάχνουμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}$.

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με τον να βρούμε λύσεις του συστήματος $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{A}$ ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{Δίνονται τα διανύσματα } \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το $\mathbf{b}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

Ψάχνουμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}$.

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με τον να βρούμε λύσεις του συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{A}$ ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $\lambda_3 = 3, \lambda_2 = 6$ και $\lambda_1 = 7$.

$$\text{Δίνονται τα διανύσματα } c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ και } c_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ εξετάστε αν το b γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των c_1, c_2, c_3 .

Ψάχνουμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = b$.

Αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με τον να βρούμε λύσεις του συστήματος $Ax = b$ όπου A ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα c_1, c_2, c_3 .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $\lambda_3 = 3, \lambda_2 = 6$ και $\lambda_1 = 7$.

Επομένως $7c_1 + 6c_2 + 3c_3 = b$.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Για να βρούμε τον πίνακα του T αρκεί να βρούμε σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Για να βρούμε τον πίνακα του T αρκεί να βρούμε σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$.

Λύνοντας το σύστημα $\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$ βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$. Τέλος ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3$.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Για να βρούμε τον πίνακα του T αρκεί να βρούμε σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$.

Λύνοντας το σύστημα $\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$ βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$. Τέλος ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3$.

Επομένως

$$T(\mathbf{e}_1) = T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Για να βρούμε τον πίνακα του T αρκεί να βρούμε σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$.

Λύνοντας το σύστημα $\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$ βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$. Τέλος ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3$.

Επομένως

$$T(\mathbf{e}_1) = T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Όμοια βρίσκουμε

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Για να βρούμε τον πίνακα του T αρκεί να βρούμε σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$.

Λύνοντας το σύστημα $\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$ βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$. Τέλος ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3$.

Επομένως

$$T(\mathbf{e}_1) = T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Όμοια βρίσκουμε

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε να απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στα διανύσματα $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αντίστοιχα. Βρείτε τον πίνακα του T .

Για να βρούμε τον πίνακα του T αρκεί να βρούμε σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$.

Λύνοντας το σύστημα $\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$ βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$. Τέλος ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3$.

Επομένως

$$T(\mathbf{e}_1) = T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Όμοια βρίσκουμε

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο πίνακας του T είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ας δούμε παραδείγματα πινάκων που χρησιμοποιούνται από τους υπολογιστές για τις γραφικές παραστάσεις.

Ας δούμε παραδείγματα πινάκων που χρησιμοποιούνται από τους υπολογιστές για τις γραφικές παραστάσεις.

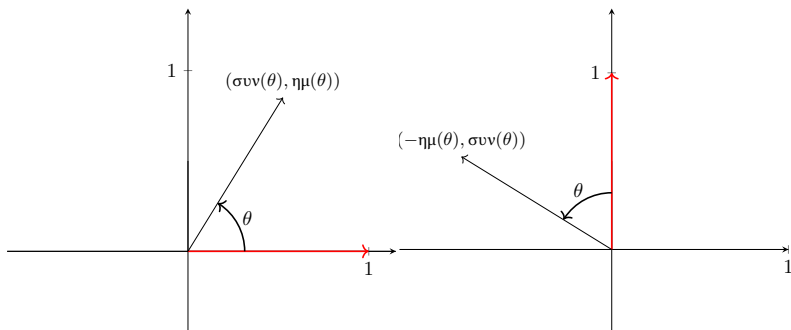
Παράδειγμα 5. Ο πίνακας στροφή του $\mathbb{R}^2$.

Ας δούμε παραδείγματα πινάκων που χρησιμοποιούνται από τους υπολογιστές για τις γραφικές παραστάσεις.

Παράδειγμα 5. Ο πίνακας στροφή του $\mathbb{R}^2$.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα $[x, y]$ στον $\mathbb{R}^2$ και μια γωνία $\theta > 0$ τότε παίρνουμε την απεικόνιση που στρέφει το διάνυσμα κατά γωνία θ (με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού), δηλαδή την $T_\theta([x, y]) = [x_1, y_1]$ με την ιδιότητα η γωνία μεταξύ των $[x, y]$, $[x_1, y_1]$ να είναι θ και το μήκος του $[x, y]$ να είναι με το μήκος $T_\theta([x, y])$. Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο

$$xx_1 + yy_1 = \langle [x, y], [x_1, y_1] \rangle = \|[x, y]\| \cdot \|[x_1, y_1]\| \cdot \sin(\phi).$$



(α') Η στροφή του βασικού διανύσματος $[1, 0]^T$ κατά γωνία θ είναι το διάνυσμα $(\sin(\theta), \cos(\theta))$.

(β') Η στροφή του βασικού διανύσματος $[0, 1]^T$ κατά γωνία θ είναι το διάνυσμα $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

Για να βρούμε τον πίνακα του T_θ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $T([1, 0]^\top)$ και $T([0, 1]^\top)$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) \end{bmatrix} \text{ και } T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\eta\mu(\theta) \\ \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) & -\eta\mu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix}$$

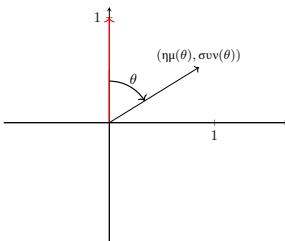
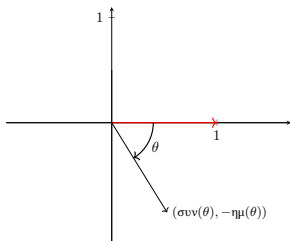
είναι ο πίνακας στροφή.

Για να βρούμε τον πίνακα του T_θ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $T([1, 0]^T)$ και $T([0, 1]^T)$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) \end{bmatrix} \text{ και } T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\eta\mu(\theta) \\ \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) & -\eta\mu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας στροφής.

Αν πάρουμε τη γωνία $-\theta$, στρέφουμε με φορά των δεικτών του ρολογιού φορά τότε έχουμε ο πίνακας του $T_{-\theta}$ είναι ο $\mathbb{A}_{-\theta} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) & \eta\mu(\theta) \\ -\eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix}$

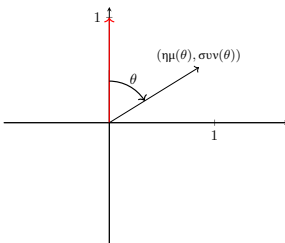
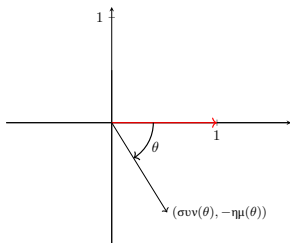


Για να βρούμε τον πίνακα του T_θ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $T([1, 0]^\top)$ και $T([0, 1]^\top)$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\eta\mu(\theta) \\ \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) & -\eta\mu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας στροφής.

Αν πάρουμε τη γωνία $-\theta$, στρέφουμε με φορά των δεικτών του ρολογιού φορά τότε έχουμε ο πίνακας του $T_{-\theta}$ είναι ο $\mathbb{A}_{-\theta} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu(\theta) & \eta\mu(\theta) \\ -\eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\nu(\theta) \end{bmatrix}$



Είναι άμεσο ότι $\mathbb{A}_\theta \mathbb{A}_{-\theta} = \mathbb{I}$ και χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες $\mathbb{A}_\theta \mathbb{A}_\phi = \mathbb{A}_{\theta+\phi}$.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας προβολή.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας προβολή.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε η προβολή ενός $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$.

Εάν πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μήκους 1 τότε η απεικόνιση προβολή

$P_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}$ είναι γραμμική.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας προβολή.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε η προβολή ενός $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$.

Εάν πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μήκους 1 τότε η απεικόνιση προβολή $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}$ είναι γραμμική.

Για να βρούμε τον πίνακα του $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}$ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας προβολή.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε η προβολή ενός $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$.

Εάν πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μήκους 1 τότε η απεικόνιση προβολή $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}$ είναι γραμμική.

Για να βρούμε τον πίνακα του $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}$ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Εάν $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a_1 \vec{\alpha}$$

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας προβολή.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε η προβολή ενός $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$.

Εάν πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μήκους 1 τότε η απεικόνιση προβολή $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}$ είναι γραμμική.

Για να βρούμε τον πίνακα του $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}$ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Εάν $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a_1 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_1 a_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = a_2 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2^2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας προβολή.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε η προβολή ενός $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\|^2} \vec{\alpha}$.

Εάν πάρουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μήκους 1 τότε η απεικόνιση προβολή $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}$ είναι γραμμική.

Για να βρούμε τον πίνακα του $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}$ θα πρέπει να βρούμε τα διανύσματα $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Εάν $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a_1 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_1 a_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = a_2 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2^2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο πίνακας του $\mathbb{P}_{\vec{\alpha}}$ είναι ο

$$\mathbb{A}_{T_{\vec{\alpha}}} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{bmatrix}.$$

Εάν έχουμε την ευθεία $y = ax$ αυτή είναι παράλληλη στο μοναδιαίο διάνυσμα $(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$.

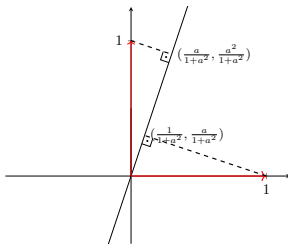
Εάν έχουμε την ευθεία $y = ax$ αυτή είναι παράλληλη στο μοναδιαίο διάνυσμα $(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$.

Για να βρούμε τον πίνακα προβολή στην ευθεία $y = ax$ αρκεί να βρούμε την προβολή στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})^\top$.

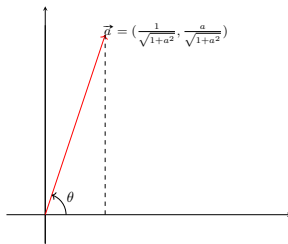
Εάν έχουμε την ευθεία $y = ax$ αυτή είναι παράλληλη στο μοναδιαίο διάνυσμα $(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$.

Για να βρούμε τον πίνακα προβολή στην ευθεία $y = ax$ αρκεί να βρούμε την προβολή στο διάνυσμα $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})^\top$. Από τα παραπάνω ο πίνακας προβολής στην ευθεία $y = ax$ είναι ο

$$\mathbb{P}_{y=ax} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix}$$



(α') η προβολή του μοναδιαίου διανύσματος $[1, 0]^\top$ στην ευθεία $y = ax$ είναι το $(\frac{1}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2})$ και η η προβολή του μοναδιαίου διανύσματος $[0, 1]^\top$ στην ευθεία $y = ax$ είναι το $(\frac{a}{1+a^2}, \frac{a^2}{1+a^2})$.



(β') Εάν θ η γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$, στο οποίο είναι παράλληλη η ευθεία $y = ax$, με τον x -άξονα τότε $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

Θα δούμε τώρα τη μορφή που παίρνει ο πίνακας προβολής χρησιμοποιώντας τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό x -άξονα.

Θα δούμε τώρα τη μορφή που παίρνει ο πίνακας προβολής χρησιμοποιώντας τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό x -άξονα. Εάν θ η γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα

$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}))$ με τον x -άξονα τότε $\cos(\theta) = a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ και $\sin(\theta) = a_2 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Έτσι ο πίνακας προβολής γίνεται

$$P_{y=ax} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 7. Ο πίνακας προβολή στον $\mathbb{R}^3$. Έστω $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Για να βρούμε τον πίνακα του τελεστή $P_{\vec{\alpha}}(\mathbb{b}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle \vec{\alpha}$

θα πρέπει να βρούμε τα $P_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $P_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ και $P_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Για αυτά τα διανύσματα,

$$P_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a_1 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_1 a_2 \\ a_1 a_3 \end{bmatrix}, \quad P_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = a_2 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2^2 \\ a_2 a_3 \end{bmatrix}$$

και

$$P_{\vec{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = a_3 \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 a_3 \\ a_3 a_2 \\ a_3^2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας προβολής σε αυτή την περίπτωση είναι ο

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η προβολή για διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιώντας ότι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων x, y του $\mathbb{R}^n$ δίνεται από την

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\theta).$$

Ο πίνακας προβολής σε αυτή την περίπτωση είναι ο

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον y -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον y -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς την $y = x$, είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 8. Εάν έχουμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ Θέλουμε να βρούμε την ανάκλαση του ως προς τον x -άξονα και στη συνέχεια να στρέψουμε την ανάκλαση του κατά 90° και να το πάμε στο τρίτο τεταρτημόριο.

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον y -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς την $y = x$, είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 8. Εάν έχουμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ Θέλουμε να βρούμε την ανάκλαση του ως προς τον x -άξονα και στη συνέχεια να στρέψουμε την ανάκλαση του κατά 90° και να το πάμε στο τρίτο τεταρτημόριο. Ο πίνακας ανάκλασης ως προς τον x -άξονα πάει τις κορυφές $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ στα σημεία $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(3, -1)$.

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον x -άξονα είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς τον y -άξονα είναι ο πίνακας

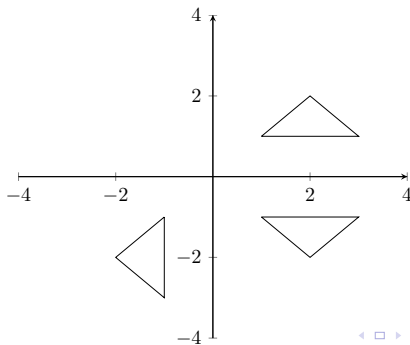
$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό ως προς την $y = x$, είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 8. Εάν έχουμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ Θέλουμε να βρούμε την ανάκλαση του ως προς τον x -άξονα και στη συνέχεια να στρέψουμε την ανάκλαση του κατά 90° και να το πάμε στο τρίτο τεταρτημόριο. Ο πίνακας ανάκλασης ως προς τον x -άξονα πάει τις κορυφές $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ στα σημεία $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(3, -1)$.

Στη συνέχεια ο πίνακας στροφή κατά 90° με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, πάει τα σημεία $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(3, -1)$ στα σημεία $(-1, -1)$, $(-2, 2)$, $(-1, -3)$.



Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 ,

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 ,
στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_2 κ.ο.κ.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 ,
στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_2 κ.ο.κ.

Ένας πίνακας $m \times n$ έχει

- m γραμμές, όπου η i — γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i —συντεταγμένη των διανυσμάτων $w_1, w_2, \dots, w_n$ (με αυτή την σειρά).

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 ,
στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_2 κ.ο.κ.

Ένας πίνακας $m \times n$ έχει

- m γραμμές, όπου η i — γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i —συντεταγμένη των διανυσμάτων $w_1, w_2, \dots, w_n$ (με αυτή την σειρά).
- n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα w_j .

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 ,
στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_2 κ.ο.κ.

Ένας πίνακας $m \times n$ έχει

- m γραμμές, όπου η i - γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $w_1, w_2, \dots, w_n$ (με αυτή την σειρά).
- n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα w_j .
- mn στοιχεία τα $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ - πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 ,
στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_2 κ.ο.κ.

Ένας πίνακας $m \times n$ έχει

- m γραμμές, όπου η i - γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $w_1, w_2, \dots, w_n$ (με αυτή την σειρά).
- n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα w_j .
- mn στοιχεία τα $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ας θυμηθούμε ότι $(m \times n)$ -πίνακα ορίσαμε να είναι n διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_1 , στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του w_2 κ.ο.κ.

Ένας πίνακας $m \times n$ έχει

- m γραμμές, όπου η i -γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $w_1, w_2, \dots, w_n$ (με αυτή την σειρά).
- n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα w_j .
- mn στοιχεία τα $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$.

Ένας $(m \times n)$ -πίνακας $\mathbb{A}$ συμβολίζεται με $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n}$.

Το (i, j) -στοιχείο του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i -γραμμή και j -στήλη και είναι το $a_{i,j}$.

Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται τετραγωνικός.

Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται τετραγωνικός.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, κύρια διαγώνιο του πίνακα ονομάζουμε τα στοιχεία $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{n,n}$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται τετραγωνικός.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, κύρια διαγώνιο του πίνακα ονομάζουμε τα στοιχεία $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{n,n}$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι τα $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$.

Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται τετραγωνικός.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, κύρια διαγώνιο του πίνακα ονομάζουμε τα στοιχεία $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{n,n}$.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,1} & \textcolor{red}{a}_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \textcolor{red}{a}_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & \textcolor{red}{a}_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι τα $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$.

Ο μηδενικός $(m \times n)$ -πίνακας, συμβολικά $\mathbb{O}_{m,n}$ είναι ο πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν, δηλαδή

$$\mathbb{O}_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο τετραγωνικός $(n \times n)$ -πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου ίσα ε τη μονάδα και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσο με μηδέν ονομάζεται μοναδιαίος $(n \times n)$ -πίνακας και συμβολίζεται με $\mathbb{I}_n$.

Δηλαδή

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Ο τετραγωνικός $(n \times n)$ -πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου ίσα ε τη μονάδα και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσο με μηδέν ονομάζεται μοναδιαίος $(n \times n)$ -πίνακας και συμβολίζεται με $\mathbb{I}_n$.

Δηλαδή

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ είναι δύο $m \times n$ πίνακες τότε ο πίνακας $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ είναι ο πίνακας που το (i, j) -στοιχείο του είναι το άθροισμα του (i, j) -στοιχείου του $\mathbb{A}$ με το (i, j) -στοιχείο του $\mathbb{B}$.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ είναι δύο $m \times n$ πίνακες τότε ο πίνακας $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ είναι ο πίνακας που το (i, j) -στοιχείο του είναι το άθροισμα του (i, j) -στοιχείου του $\mathbb{A}$ με το (i, j) -στοιχείο του $\mathbb{B}$.
Δηλαδή $\mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ είναι δύο $m \times n$ πίνακες τότε ο πίνακας $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ είναι ο πίνακας που το (i, j) -στοιχείο του είναι το άθροισμα του (i, j) -στοιχείου του $\mathbb{A}$ με το (i, j) -στοιχείο του $\mathbb{B}$.

Δηλαδή $\mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Σε αναλυτική μορφή

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ είναι ο πίνακας $\mathbb{A} - \mathbb{B} = (a_{i,j} - b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Ο πίνακας $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ είναι ο πίνακας $\mathbb{A} - \mathbb{B} = (a_{i,j} - b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Το (i, j) -στοιχείο του $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ είναι η διαφορά των (i, j) -στοιχείων των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Ο πίνακας $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ είναι ο πίνακας $\mathbb{A} - \mathbb{B} = (a_{i,j} - b_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Το (i, j) -στοιχείο του $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ είναι η διαφορά των (i, j) -στοιχείων των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Σε αναλυτική μορφή

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} - b_{1,n} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} - b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} - b_{m,1} & a_{m,2} - b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} - b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-2 \\ -2+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-2 \\ -2+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-(-2) \\ -2-1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-2 \\ -2+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-(-2) \\ -2-1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 1-2 & -4+1 \\ -2+1 & 1+1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-2 \\ -2+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-(-2) \\ -2-1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & 1-2 & -4+1 \\ -2+1 & 1+1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1-3 & 1-(-2) & -4-1 \\ -2-1 & 1-1 & 3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ένας αριθμός και $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ ο πίνακας $\lambda \mathbb{A}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $\lambda \mathbb{A} = (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ένας αριθμός και $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ ο πίνακας $\lambda \mathbb{A}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $\lambda \mathbb{A} = (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Σε αναλυτική μορφή

$$\lambda \mathbb{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ένας αριθμός και $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ ο πίνακας $\lambda\mathbb{A}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $\lambda\mathbb{A} = (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Σε αναλυτική μορφή

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ τότε

$$2\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -8 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ένας αριθμός και $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ ο πίνακας $\lambda\mathbb{A}$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $\lambda\mathbb{A} = (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$.

Σε αναλυτική μορφή

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ τότε

$$2\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -8 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(-3)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 12 \\ 6 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$