

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ για τον οποίο υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ για τον οποίο υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ για τον οποίο υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ γράφεται και ως

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ για τον οποίο υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ γράφεται και ως

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή αν η εξίσωση (1) έχει μη-τετριμμένη λύση. Επειδή ο μηδενοχώρος ενός πίνακα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1. Έστω $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ για τον οποίο υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ γράφεται και ως

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή αν η εξίσωση (1) έχει μη-τετριμμένη λύση. Επειδή ο μηδενοχώρος ενός πίνακα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Γνωρίζουμε ότι το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n$ είναι ιδιόμορφος ή ισοδύναμα αν $\det \mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n = 0$. Η ορίζουσα $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n)$ εξαρτάται από την τιμή του λ , επομένως είναι συνάρτηση του λ . Ιδιαίτερα εάν ο $\mathbb{A}$ είναι $n \times n$ -τετραγωνικός πίνακας τότε η ορίζουσα $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n του λ . Το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n) \quad (2)$$

εξαρτάται από την τιμή του λ , επομένως είναι συνάρτηση του λ . Ιδιαίτερα εάν ο $\mathbb{A}$ είναι $n \times n$ -τετραγωνικός πίνακας τότε η ορίζουσα $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n του λ . Το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_n) \quad (3)$$

ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathbb{A}$ και η εξίσωση (2) χαρακτηριστική εξίσωση του $\mathbb{A}$.

Ορισμός 2. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας.

Το σύνολο το ιδιοτιμών του $\mathbb{A}$ ονομάζεται φάσμα του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbb{A})$.

Εάν λ μια ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο υπόχωρος

$$N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0\}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ .

Ορισμός 2. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας.

Το σύνολο το ιδιοτιμών του $\mathbb{A}$ ονομάζεται φάσμα του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbb{A})$.

Εάν λ μια ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο υπόχωρος

$$N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0\}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ .

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και λ είναι ένας αριθμός τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) ο λ είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$.

Ορισμός 2. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας.

Το σύνολο το ιδιοτιμών του $\mathbb{A}$ ονομάζεται φάσμα του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbb{A})$.

Εάν λ μια ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο υπόχωρος

$$N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0\}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ .

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και λ είναι ένας αριθμός τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) ο λ είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$.
- 2) το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0$ είναι μη-τετριμμένη λύση.

Ορισμός 2. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας.

Το σύνολο το ιδιοτιμών του $\mathbb{A}$ ονομάζεται φάσμα του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbb{A})$.

Εάν λ μια ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο υπόχωρος

$$N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0\}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ .

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και λ είναι ένας αριθμός τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) ο λ είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$.
- 2) το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0$ είναι μη-τετρμμένη λύση.
- 3) ο μηδενοχώρος του $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n$ είναι διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του ένα.

Ορισμός 2. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας.

Το σύνολο το ιδιοτιμών του $\mathbb{A}$ ονομάζεται φάσμα του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbb{A})$.

Εάν λ μια ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο υπόχωρος

$$N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0\}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ .

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και λ είναι ένας αριθμός τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) ο λ είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$.
- 2) το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0$ είναι μη-τετριμμένη λύση.
- 3) ο μηδενχώρος του $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n$ είναι διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του ένα.
- 4) ο πίνακας $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n$ είναι ιδιόμορφος

Ορισμός 2. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας.

Το σύνολο το ιδιοτιμών του $\mathbb{A}$ ονομάζεται φάσμα του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbb{A})$.

Εάν λ μια ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο υπόχωρος

$$N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0\}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ .

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και λ είναι ένας αριθμός τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) ο λ είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$.
- 2) το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)x = 0$ είναι μη-τετρμμένη λύση.
- 3) ο μηδενχώρος του $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n$ είναι διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του ένα.
- 4) ο πίνακας $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n$ είναι ιδιόμορφος
- 5) $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει λύσεις $\lambda = 4, -3$.

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
 Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει λύσεις $\lambda = 4, -3$.

Για $\lambda = 4$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει λύσεις $\lambda = 4, -3$.

Για $\lambda = 4$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η στήλη που έχει οδηγό είναι η πρώτη. Άρα εάν δώσουμε την τιμή 1 στη δεύτερη μεταβλητή λύνουμε το σύστημα $-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
 Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει λύσεις $\lambda = 4, -3$.

Για $\lambda = 4$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η στήλη που έχει οδηγό είναι η πρώτη. Άρα εάν δώσουμε την τιμή 1 στη δεύτερη μεταβλητή λύνουμε το σύστημα $-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Άρα $N(\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2) = \text{span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει λύσεις $\lambda = 4, -3$.

Για $\lambda = 4$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η στήλη που έχει οδηγό είναι η πρώτη. Άρα εάν δώσουμε την τιμή 1 στη δεύτερη μεταβλητή λύνουμε το σύστημα $-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Άρα $N(\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2) = \text{span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Για $\lambda = -3$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(1/2)} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς

$\lambda = 4, -3$ και ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Πράγματι

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 2 = -12 - \lambda + \lambda^2.$$

Η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει λύσεις $\lambda = 4, -3$.

Για $\lambda = 4$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η στήλη που έχει οδηγό είναι η πρώτη. Άρα εάν δώσουμε την τιμή 1 στη δεύτερη μεταβλητή λύνουμε το σύστημα $-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Άρα $N(\mathbb{A} - 4\mathbb{I}_2) = \text{span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Για $\lambda = -3$ έχουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(1/2)} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η στήλη που έχει οδηγό είναι η πρώτη. Εάν δώσουμε την τιμή 1 στη δεύτερη μεταβλητή λύνουμε το σύστημα $6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1/3$. Άρα

$$N(\mathbb{A} - (-3)\mathbb{I}_2) = \text{span} \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Πρόταση 2. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει γεωμετρική διάσταση μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας της λ .

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Πρόταση 2. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει γεωμετρική διάσταση μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας της λ .

Παράδειγμα 2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις διαστάσεις των ιδιοχώρων για τον

$$\text{πίνακα } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση .

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -(1+\lambda)^3. \end{aligned}$$

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Πρόταση 2. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει γεωμετρική διάσταση μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας της λ .

Παράδειγμα 2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις διαστάσεις των ιδιοχώρων για τον

$$\text{πίνακα } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση .

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -(1+\lambda)^3. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε μια ιδιοτιμή, την $\lambda = -1$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 3 και άρα ο ιδιοχώρος θα έχει διάσταση το πολύ 3.

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Πρόταση 2. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει γεωμετρική διάσταση μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας της λ .

Παράδειγμα 2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις διαστάσεις των ιδιοχώρων για τον

$$\text{πίνακα } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση .

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -(1+\lambda)^3. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε μια ιδιοτιμή, την $\lambda = -1$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 3 και άρα ο ιδιοχώρος θα έχει διάσταση το πολύ 3. Θα βρούμε τον ιδιοχώρο για την $\lambda = -1$. Φέρνουμε τον $\mathbb{A} - (-1)\mathbb{I}_3$ σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} - (-1)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 3. Εάν έχουμε μια ιδιοτιμή λ_0 του πίνακα $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι αλγεβρικής πολλαπλότητας r εάν

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = (\lambda - \lambda_0)^r p(\lambda)$$

όπου $p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ με $p(\lambda_0) \neq 0$.

γεωμετρικής πολλαπλότητας k εάν $\dim N(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = k$.

Πρόταση 2. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει γεωμετρική διάσταση μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας της λ .

Παράδειγμα 2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις διαστάσεις των ιδιοχώρων για τον

$$\text{πίνακα } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση .

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -(1+\lambda)^3. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε μια ιδιοτιμή, την $\lambda = -1$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 3 και άρα ο ιδιοχώρος θα έχει διάσταση το πολύ 3. Θα βρούμε τον ιδιοχώρο για την $\lambda = -1$. Φέρνουμε τον $\mathbb{A} - (-1)\mathbb{I}_3$ σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} - (-1)\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{2,1}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ένα μόνο οδηγό στην πρώτη στήλη. Επομένως η δεύτερη και τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερες.

Για $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Επομένως το $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Επομένως το $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0$$

Για $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Επομένως το $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2.$$

Για $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Επομένως το $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2.$$

Επομένως το $x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι το δεύτερο στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Επομένως το $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2.$$

Επομένως το $x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι το δεύτερο στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Έτσι έχουμε ότι ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1 , έχει διάσταση 2 και έχει βάση

Για $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Επομένως το $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Για $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$ λύνουμε το σύστημα

$$2x_1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2.$$

Επομένως το $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι το δεύτερο στοιχείο της βάσης του ιδιοχώρου.

Έτσι έχουμε ότι ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1 , έχει διάσταση 2 και έχει βάση

$$N(\mathbb{A} + (-1)\mathbb{I}_3) = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}.$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Θεώρημα 4. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε

$$\text{ένας αριθμός } \lambda_0 \text{ είναι ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0.$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Θεώρημα 4. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε

$$\text{ένας αριθμός } \lambda_0 \text{ είναι ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0.$$

Απόδειξη.

Εάν λ_0 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ ώστε $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x}_0 = 0$. Επομένως το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0$ έχει μη-μηδενική λύση και άρα $\det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$.

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Θεώρημα 4. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε

$$\text{ένας αριθμός } \lambda_0 \text{ είναι ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0.$$

Απόδειξη.

Εάν λ_0 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ ώστε $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x}_0 = 0$. Επομένως το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0$ έχει μη-μηδενική λύση και άρα $\det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$. Επομένως

$$\lambda_0 \text{ ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \text{το σύστημα } (\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0 \text{ έχει μη-τετριμμένη λύση}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Θεώρημα 4. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε

$$\text{ένας αριθμός } \lambda_0 \text{ είναι ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0.$$

Απόδειξη.

Εάν λ_0 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ ώστε $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x}_0 = 0$. Επομένως το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0$ έχει μη-μηδενική λύση και άρα $\det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} \lambda_0 \text{ ιδιοτιμή του } \mathbb{A} &\Leftrightarrow \text{το σύστημα } (\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0 \text{ έχει μη-τετριμμένη λύση} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I} \text{ μη-αντιστρέψιμος} \end{aligned}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Θεώρημα 4. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε

$$\text{ένας αριθμός } \lambda_0 \text{ είναι ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0.$$

Απόδειξη.

Εάν λ_0 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ ώστε $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x}_0 = 0$. Επομένως το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0$ έχει μη-μηδενική λύση και άρα $\det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} \lambda_0 \text{ ιδιοτιμή του } \mathbb{A} &\Leftrightarrow \text{το σύστημα } (\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0 \text{ έχει μη-τετριμμένη λύση} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I} \text{ μη-αντιστρέψιμος} \\ &\Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0 \end{aligned}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βρήκαμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Θα δούμε τώρα ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Θεώρημα 4. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε

$$\text{ένας αριθμός } \lambda_0 \text{ είναι ιδιοτιμή του } \mathbb{A} \Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0.$$

Απόδειξη.

Εάν λ_0 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ ώστε $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x}_0 = 0$. Επομένως το ομογενές σύστημα $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0$ έχει μη-μηδενική λύση και άρα $\det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} \lambda_0 \text{ ιδιοτιμή του } \mathbb{A} &\Leftrightarrow \text{το σύστημα } (\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})\mathbf{x} = 0 \text{ έχει μη-τετριμμένη λύση} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I} \text{ μη-αντιστρέψιμος} \\ &\Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) = 0 \\ &\Leftrightarrow p(\lambda_0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$



Εάν έχουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Εάν έχουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n και

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) c_{n-1} \lambda + c_n$$

όπου $c_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ και $c_n = \det(\mathbb{A})$

Εάν έχουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n και

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) c_{n-1} \lambda + c_n$$

όπου $c_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ και $c_n = \det(\mathbb{A})$

Εάν έχουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n και

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) c_{n-1} \lambda + c_n$$

όπου $c_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ και $c_n = \det(\mathbb{A})$

Επίσης το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ (όχι κατανάγκη διαφορετικές ανά δύο).

Εάν έχουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n και

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) c_{n-1} \lambda + c_n$$

όπου $c_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ και $c_n = \det(\mathbb{A})$

Επίσης το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ (όχι κατανάγκη διαφορετικές ανά δύο). Ιδιαίτερα για $\lambda = 0$ παίρνουμε

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = p(0) = \det(\mathbb{A}).$$

Εάν έχουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 5. Έστω $\mathbb{A}$ ένας $n \times n$ -πίνακας και $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n και

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1) c_{n-1} \lambda + c_n$$

όπου $c_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ και $c_n = \det(\mathbb{A})$

Επίσης το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ (όχι κατανάγκη διαφορετικές ανά δύο). Ιδιαίτερα για $\lambda = 0$ παίρνουμε

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = p(0) = \det(\mathbb{A}).$$

Επίσης

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}.$$

Το άθροισμα $a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα $\mathbb{A}$ το συμβολίζουμε με $\text{tr}(\mathbb{A})$.

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Πόρισμα 7. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $p(0) \neq 0$.

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Πόρισμα 7. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $p(0) \neq 0$.

Ιδιαίτερα εάν $\mathbb{A}$ αντιστρέψιμος και $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο τότε

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{-1}{c_0} \left((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \cdots + c_1 \mathbb{I}_{n-1} \right)$$

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Πόρισμα 7. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $p(0) \neq 0$.

Ιδιαίτερα εάν $\mathbb{A}$ αντιστρέψιμος και $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο τότε

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{-1}{c_0} ((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \cdots + c_1 \mathbb{I}_{n-1})$$

Ας δούμε πως βγαίνει ο τύπος για τον αντίστροφο. Από το θεώρημα Caley-Hamilton

$$(-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}$$

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \dots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Πόρισμα 7. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $p(0) \neq 0$.

Ιδιαίτερα εάν $\mathbb{A}$ αντιστρέψιμος και $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο τότε

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{-1}{c_0} \left((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \dots + c_1 \mathbb{I}_{n-1} \right)$$

Ας δούμε πως βγαίνει ο τύπος για τον αντίστροφο. Από το θεώρημα Caley-Hamilton

$$\begin{aligned} & (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \dots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O} \\ \Rightarrow & (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \dots + c_1 \mathbb{A} = -c_0 \mathbb{I}_n \end{aligned}$$

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Πόρισμα 7. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $p(0) \neq 0$.

Ιδιαίτερα εάν $\mathbb{A}$ αντιστρέψιμος και $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο τότε

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{-1}{c_0} ((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \cdots + c_1 \mathbb{I}_{n-1})$$

Ας δούμε πως βγαίνει ο τύπος για τον αντίστροφο. Από το θεώρημα Caley-Hamilton

$$\begin{aligned} & (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O} \\ \Rightarrow & (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} = -c_0 \mathbb{I}_n \\ \Rightarrow & \mathbb{A} ((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \cdots + c_1 \mathbb{I}) = -c_0 \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

Θεώρημα 6. (Caley-Hamilton) Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ τότε

$$p(\mathbb{A}) = (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O}.$$

Πόρισμα 7. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $p(0) \neq 0$.

Ιδιαίτερα εάν $\mathbb{A}$ αντιστρέψιμος και $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο τότε

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{-1}{c_0} ((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \cdots + c_1 \mathbb{I}_{n-1})$$

Ας δούμε πως βγαίνει ο τύπος για τον αντίστροφο. Από το θεώρημα Caley-Hamilton

$$\begin{aligned} & (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} + c_0 \mathbb{I}_n = \mathbb{O} \\ \Rightarrow & (-1)^n \mathbb{A}^n + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbb{A} = -c_0 \mathbb{I}_n \\ \Rightarrow & \mathbb{A} ((-1)^n \mathbb{A}^{n-1} + c_{n-1} \mathbb{A}^{n-2} + \cdots + c_1 \mathbb{I}) = -c_0 \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $-c_0 = -\det(\mathbb{A}) (\neq 0)$ παίρνουμε τον τύπο για τον αντίστροφο πίνακα.

Παράδειγμα 3. Εάν $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο A έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.

Παράδειγμα 3. Εάν $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο A έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \operatorname{tr}(A) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(A).$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ένας άλλος τρόπος για βρούμε το a είναι ο εξής: Εφόσον θέλουμε να έχουμε ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 9\lambda.$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ένας άλλος τρόπος για βρούμε το a είναι ο εξής: Εφόσον θέλουμε να έχουμε ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 9\lambda.$$

$$\text{Επίσης } p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \det \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 & 1 \\ -5 & 3 - \lambda & a \\ 4 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ένας άλλος τρόπος για βρούμε το a είναι ο εξής: Εφόσον θέλουμε να έχουμε ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 9\lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } p(\lambda) &= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \det \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 & 1 \\ -5 & 3 - \lambda & a \\ 4 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)((3 - \lambda)(-1 - \lambda) - (-2)a) + ((-5)(-2) - 4(3 - \lambda)) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ένας άλλος τρόπος για βρούμε το a είναι ο εξής: Εφόσον θέλουμε να έχουμε ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 9\lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } p(\lambda) &= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \det \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 3-\lambda & a \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)a) + ((-5)(-2) - 4(3-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 3\lambda^2 - 2\lambda + 6 - 4a - 2a\lambda + 10 - 12 + 4\lambda \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ένας άλλος τρόπος για βρούμε το a είναι ο εξής: Εφόσον θέλουμε να έχουμε ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 9\lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } p(\lambda) &= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \det \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 3-\lambda & a \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)a) + ((-5)(-2) - 4(3-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 3\lambda^2 - 2\lambda + 6 - 4a - 2a\lambda + 10 - 12 + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + (11-2a)\lambda + 4 - 4a. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο $\mathbb{A}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 έχουμε

$$0 + 3 + (-3) = \text{tr}(\mathbb{A}) = (-2) + 3 + (-1) \quad \text{και} \quad 0 \cdot 3 \cdot (-3) = \det(\mathbb{A}).$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \det(\mathbb{A}) &= (-2) \det \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= (-2)(3 \cdot (-1) - (-2)a) - 0((-5)(-1) - 4a) + ((-5)(-2) - 34) \\ &= 4 - 4a. \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \det(\mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Ένας άλλος τρόπος για βρούμε το a είναι ο εξής: Εφόσον θέλουμε να έχουμε ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, 3, -3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι ίσο με

$$p(\lambda) = (-1)^3 \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 9\lambda.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } p(\lambda) &= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \det \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 3-\lambda & a \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)a) + ((-5)(-2) - 4(3-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 3\lambda^2 - 2\lambda + 6 - 4a - 2a\lambda + 10 - 12 + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + (11-2a)\lambda + 4 - 4a. \end{aligned}$$

Επομένως θα πρέπει $11 - 2a = 9$ και $4 - 4a = 0$. Για $a = 1$ ισχύουν τα παραπάνω.

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ορισμός 8. Δύο πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbb{P}$ ώστε

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

Πρόταση 3. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $\mathbb{P}^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{B}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\det(\mathbb{B} - \lambda \mathbb{I}_n) = \det(\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} - \lambda \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P})$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbb{P}$ ώστε

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

Πρόταση 3. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $\mathbb{P}^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{B}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{B} - \lambda \mathbb{I}_n) &= \det(\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} - \lambda \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P}) \\ &= \det(\mathbb{P}^{-1} (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \mathbb{P}) = \det(\mathbb{P}^{-1}) \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \det(\mathbb{P}) \end{aligned}$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbb{P}$ ώστε

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}.$$

Πρόταση 3. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $\mathbb{P}^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{B}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{B} - \lambda \mathbb{I}_n) &= \det(\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} - \lambda \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P}) \\ &= \det(\mathbb{P}^{-1} (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \mathbb{P}) = \det(\mathbb{P}^{-1}) \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \det(\mathbb{P}) \\ &= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n). \end{aligned}$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbb{P}$ ώστε

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

Πρόταση 3. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $\mathbb{P}^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{B}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{B} - \lambda \mathbb{I}_n) &= \det(\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} - \lambda \mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}) \\ &= \det(\mathbb{P}^{-1}(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n)\mathbb{P}) = \det(\mathbb{P}^{-1}) \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \det(\mathbb{P}) \\ &= \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι λ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα $\mathbb{A}$ αν και μόνο αν το $\mathbb{P}^{-1}\lambda$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{B}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι λ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}\lambda$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $A\lambda = \lambda\lambda$ τότε

$$BP^{-1}\lambda =$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν λ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}\lambda$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι λ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}\lambda$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $A\lambda = \lambda\lambda$ τότε

$$BP^{-1}\lambda = P^{-1}AP(P^{-1}\lambda)$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιόχωροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιοχώροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Αντιστρόφως αν

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιοχώροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Αντιστρόφως αν

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}APP^{-1}x$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιοχώροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Αντιστρόφως αν

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}AP P^{-1}x = \lambda P^{-1}x$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιοχώροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Αντιστρόφως αν

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}AP P^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}Ax$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιοχώροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Αντιστρόφως αν

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}AP P^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x$$

Ορισμός 8. Δύο πίνακες A, B λέμε ότι είναι όμοιοι εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Πρόταση 3. Εάν $A, B = P^{-1}AP$ είναι όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης

- α) Εάν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε $P^{-1}x$ ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- β) Οι ιδιοχώροι των A, B που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή έχουν την ίδια διάσταση.

Ας δούμε γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι οι πίνακες A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης ισχύει ότι x είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν το $P^{-1}x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν $Ax = \lambda x$ τότε

$$BP^{-1}x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x.$$

Αντιστρόφως αν

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}AP P^{-1}x = \lambda P^{-1}x \Rightarrow P^{-1}Ax = P^{-1}(\lambda x) \Rightarrow Ax = \lambda x.$$

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα A στη μορφή BDB^{-1} όπου D διαγώνιος.

Θεώρημα 9. Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα A και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα A στη μορφή BDB^{-1} όπου D διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα A και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα A στη μορφή BDB^{-1} όπου D διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα A και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ στη μορφή $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου $\mathbb{D}$ διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbb{A}$ και $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbb{x}_1 + t_2\mathbb{x}_2 = \mathbb{0}$. Τότε

$$\mathbb{A}(t_1\mathbb{x}_1 + t_2\mathbb{x}_2) = \mathbb{A}(\mathbb{0}) \Rightarrow t_1\lambda_1\mathbb{x}_1 + t_2\lambda_2\mathbb{x}_2 = \mathbb{0}.$$

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ στη μορφή $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου $\mathbb{D}$ διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbb{A}$ και $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbb{x}_1 + t_2\mathbb{x}_2 = \mathbb{0}$. Τότε

$$\mathbb{A}(t_1\mathbb{x}_1 + t_2\mathbb{x}_2) = \mathbb{A}(\mathbb{0}) \Rightarrow t_1\lambda_1\mathbb{x}_1 + t_2\lambda_2\mathbb{x}_2 = \mathbb{0}.$$

Επειδή $t_1\mathbb{x}_1 + t_2\mathbb{x}_2 = \mathbb{0} \Rightarrow \lambda_2 t_1\mathbb{x}_1 + \lambda_2 t_2\mathbb{x}_2 = \mathbb{0}$.

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ στη μορφή $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου $\mathbb{D}$ διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbb{A}$ και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\mathbb{A}(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) \Rightarrow t_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + t_2\lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Επειδή $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_2 t_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2 t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

Αφαιρώντας αυτή την εξίσωση από την παραπάνω παίρνουμε

$$t_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow t_1 = 0.$$

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ στη μορφή $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου $\mathbb{D}$ διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbb{A}$ και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\mathbb{A}(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) \Rightarrow t_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + t_2\lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Επειδή $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_2 t_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2 t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

Αφαιρώντας αυτή την εξίσωση από την παραπάνω παίρνουμε

$$t_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow t_1 = 0.$$

Έτσι παίρνουμε ότι και $t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ και άρα $t_2 = t_1 = 0$.

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ στη μορφή $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου $\mathbb{D}$ διαγώνιος.

Θεώρημα 9. Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbb{A}$ και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\mathbb{A}(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) \Rightarrow t_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + t_2\lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Επειδή $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_2 t_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2 t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

Αφαιρώντας αυτή την εξίσωση από την παραπάνω παίρνουμε

$$t_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow t_1 = 0.$$

Έτσι παίρνουμε ότι και $t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ και άρα $t_2 = t_1 = 0$. Επομένως τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. □

Διαγωνιοποίηση

Θα δούμε τώρα πως χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ στη μορφή $\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου $\mathbb{D}$ διαγώνιος.

Θεώρημα 9. *Εάν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ διακριτές ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbb{A}$ και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ' αυτές τις ιδιοτιμές τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Για απλότητα θα δείξουμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\mathbb{A}(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) = \mathbb{A}(\mathbf{0}) \Rightarrow t_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + t_2\lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

$$\text{Επειδή } t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_2 t_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2 t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Αφαιρώντας αυτή την εξίσωση από την παραπάνω παίρνουμε

$$t_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow t_1 = 0.$$

Έτσι παίρνουμε ότι και $t_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ και άρα $t_2 = t_1 = 0$. Επομένως τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. □

Ορισμός 10. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ λέμε ότι είναι διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbb{B}$ και ένας διαγώνιος πίνακας $\mathbb{D}$ ώστε

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}.$$

Ο πίνακας $\mathbb{B}$ λέμε ότι διαγωνοποιεί τον $\mathbb{A}$.

Θεώρημα 11. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ διαγωνοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου ο $\mathbb{B}$ έχει στήλες τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$, και $\mathbb{D}$ ο διαγώνιος πίνακας που έχει στοιχεία τις ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του $\mathbb{A}$.

Θεώρημα 11. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ διαγωνοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου ο $\mathbb{B}$ έχει στήλες τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$, και $\mathbb{D}$ ο διαγώνιος πίνακας που έχει στοιχεία τις ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του $\mathbb{A}$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\mathbb{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ όπου λ_i η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_i$. Ας παρατηρήσουμε ότι οι ιδιοτιμές λ_i δεν είναι κατανάγκη διαφορετικές ανά δύο, διότι ο ιδιοχώρος μιας ιδιοτιμής μπορεί να έχει διάσταση μεγαλύτερη από ένα. Παίρνουμε τον πίνακα $\mathbb{B}$ που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$. Επειδή $\mathbb{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ και η j -στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι η

$$j\text{-στήλη του } \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A} \cdot (j\text{-στήλη } \mathbb{B}) = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j.$$

Έτσι παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B} &= [\mathbb{A}\mathbf{x}_1, \mathbb{A}\mathbf{x}_2, \dots, \mathbb{A}\mathbf{x}_n] \\ &= [\lambda_1 \mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{x}_n] \\ &= \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} & \cdots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & x_{3,2} & \cdots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1,n} & x_{2,n} & x_{3,n} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{B}\mathbb{D} \end{aligned}$$

όπου $\mathbb{D}$ ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.



Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $\text{rank}(\mathbb{B}) = n$ και άρα ο $\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}.$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$ και άρα ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}.$$

Παρατηρήσεις 12. 1) Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές τότε από το Θεώρημα 9 τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$ και άρα ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}.$$

Παρατηρήσεις 12. 1) Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές τότε από το Θεώρημα 9 τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

2) Ο πίνακας που διαγωνοποιεί τον $\mathbf{A}$ δεν είναι μοναδικός. Επειδή οι στήλες του $\mathbf{B}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και αν $\mathbf{x}$ ιδιοδιάνυσμα τότε και $\mu\mathbf{x}$ ιδιοδιάνυσμα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια στήλη του πίνακα $\mathbf{B}$ με ένα πολλαπλάσιο της.

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$ και άρα ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}.$$

Παρατηρήσεις 12. 1) Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές τότε από το Θεώρημα 9 τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

2) Ο πίνακας που διαγωνοποιεί τον $\mathbf{A}$ δεν είναι μοναδικός. Επειδή οι στήλες του $\mathbf{B}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και αν $\mathbf{x}$ ιδιοδιάνυσμα τότε και $\mu\mathbf{x}$ ιδιοδιάνυσμα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια στήλη του πίνακα $\mathbf{B}$ με ένα πολλαπλάσιο της.

3) Ο διαγώνιος πίνακας $\mathbf{D}$ έχει στοιχεία τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$. Η ισότητα $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{D}$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι στήλες του $\mathbf{C}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$. Πράγματι η j -στήλη του $\mathbf{A}\mathbf{C}$ είναι η $\mathbf{A} \times (j\text{-στήλη } \mathbf{C})$ και η j -στήλη του $\mathbf{C}\mathbf{D}$ είναι η

$$\mathbf{C} \cdot (j\text{-στήλη } \mathbf{D}) = \lambda_j(j\text{-στήλη } \mathbf{C}).$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$ και άρα ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}.$$

Παρατηρήσεις 12. 1) Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές τότε από το Θεώρημα 9 τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

2) Ο πίνακας που διαγωνοποιεί τον $\mathbf{A}$ δεν είναι μοναδικός. Επειδή οι στήλες του $\mathbf{B}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και αν $\mathbf{x}$ ιδιοδιάνυσμα τότε και $\mu\mathbf{x}$ ιδιοδιάνυσμα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια στήλη του πίνακα $\mathbf{B}$ με ένα πολλαπλάσιο της.

3) Ο διαγώνιος πίνακας $\mathbf{D}$ έχει στοιχεία τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$. Η ισότητα $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{D}$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι στήλες του $\mathbf{C}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$. Πράγματι η j -στήλη του $\mathbf{A}\mathbf{C}$ είναι η $\mathbf{A} \times (j\text{-στήλη } \mathbf{C})$ και η j -στήλη του $\mathbf{C}\mathbf{D}$ είναι η

$$\mathbf{C} \cdot (j\text{-στήλη } \mathbf{D}) = \lambda_j(j\text{-στήλη } \mathbf{C}).$$

Εάν $\mathbf{x}_j$ συμβολίσουμε το διάνυσμα που είναι η j -στήλη του $\mathbf{C}$ τότε

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j \Rightarrow \mathbf{x}_j \text{ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή } \lambda_j.$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2$ όπου

$$(\mathbb{A} - (-4)\mathbb{I}_2)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2$ όπου

$$(\mathbb{A} - (-4)\mathbb{I}_2)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2$ όπου

$$(\mathbb{A} - (-4)\mathbb{I}_2)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 6x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2$ όπου

$$(\mathbb{A} - (-4)\mathbb{I}_2)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 6x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = -(2 - \lambda)(5 + \lambda) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$ έχει ρίζες $\lambda = 1, -4$.

Για $\lambda = 1$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1$ όπου

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4$ ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2$ όπου

$$(\mathbb{A} - (-4)\mathbb{I}_2)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 6x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει ένα κριτήριο για το πότε ένας $n \times n$ πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος.

Θεώρημα 13. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ πολλαπλότητας $m_1, \dots, m_k$ αντίστοιχα.

Ο $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Παράδειγμα 5. Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 5. Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε την $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)$

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & -2 \\ 2 & 0 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda) ((-\lambda)(-1 - \lambda) - (-1)(-2)) - (-1)(2(-1 - \lambda) - 2(-2)) + (-2)(2 \cdot (-1) - 2(-\lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(3\lambda + 6 - \lambda^2 + 2\lambda - 4) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5. Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε την $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)$

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & -2 \\ 2 & 0 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda) ((-\lambda)(-1 - \lambda) - (-1)(-2)) - (-1)(2(-1 - \lambda) - 2(-2)) + (-2)(2 \cdot (-1) - 2(-\lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(3\lambda + 6 - \lambda^2 + 2\lambda - 4) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2/3)E_{2,1}(2/3)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2} \cdot 2^{-1/2}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{U}_0.$$

Παράδειγμα 5. Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε την $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)$

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & -2 \\ 2 & 0 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)((-\lambda)(-1 - \lambda) - (-1)(-2)) - (-1)(2(-1 - \lambda) - 2(-2)) + (-2)(2 \cdot (-1) - 2(-\lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(3\lambda + 6 - \lambda^2 + 2\lambda - 4) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2/3)E_{2,1}(2/3)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2} \cdot -1/2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{U}_0.$$

Ο πίνακας $\mathbb{U}_0$ έχει δύο οδηγούς και η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη. Παίρνοντας

$$z = 1 \text{ έχουμε το σύστημα } \begin{matrix} 3x - y = 2 \\ 2y = 2 \end{matrix} \text{ το σύστημα έχει λύση } x = y = 1.$$

Παράδειγμα 5. Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε την $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)$

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & -2 \\ 2 & 0 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)((-\lambda)(-1 - \lambda) - (-1)(-2)) - (-1)(2(-1 - \lambda) - 2(-2)) + (-2)(2 \cdot (-1) - 2(-\lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(3\lambda + 6 - \lambda^2 + 2\lambda - 4) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2/3)E_{2,1}(2/3)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2} \cdot 2^{-1/2}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{U}_0.$$

Ο πίνακας $\mathbb{U}_0$ έχει δύο οδηγούς και η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη. Παίρνοντας

$z = 1$ έχουμε το σύστημα $\begin{matrix} 3x - y = 2 \\ 2y = 2 \end{matrix}$ το σύστημα έχει λύση $x = y = 1$. Άρα μια

βάση του μηδενοχώρου του $\mathbb{A} - 0\mathbb{I}_3$ είναι το διάνυσμα $\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = 1$ βρίσκουμε

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{U}_1$$

Ο πίνακας $\mathbb{U}_1$ έχει ένα οδηγό και την δεύτερη και τρίτη μεταβλητή ελεύθερη. Λύνοντας τα συστήματα $2x - 1 - 2 \cdot 0 = 0$ (για $y = 1, z = 0$) και $2x - 1 \cdot 0 - 2 = 0$ (για $y = 0, z = 1$) παίρνουμε ότι

$$N(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Επειδή το άθροισμα των διαστάσεων των μηδενохώρων των $\mathbb{A} - 0\mathbb{I}_3$, $\mathbb{A} - \mathbb{I}_3$ είναι 3, έχουμε ότι ο $\mathbb{A}$ διαγωνοποιείται. Ισχύει

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Βρίσκουμε τον αντίστροφο.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{3,1}(1)E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(-1)} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{1,3}(-1)E_{2,3}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{M_2(2)M_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Επομένως

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος τότε και ο $\mathbb{A}^k$ είναι διαγωνοποιήσιμος και οι $\mathbb{A}, \mathbb{A}^k$ διαγωνοποιούνται από τον ίδιο πίνακα.
 Πράγματι αν $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}) = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$. Ιδιαίτερα ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$, τότε και ο $\mathbb{A}^k$ είναι διαγωνοποιήσιμος και

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Επίσης εάν λ ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο λ^k είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}^k$.

Εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος τότε και ο $\mathbb{A}^k$ είναι διαγωνοποιήσιμος και οι $\mathbb{A}, \mathbb{A}^k$ διαγωνοποιούνται από τον ίδιο πίνακα.
 Πράγματι αν $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}) = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$. Ιδιαίτερα ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$, τότε και ο $\mathbb{A}^k$ είναι διαγωνοποιήσιμος και

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Επίσης εάν λ ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο λ^k είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}^k$.

Έστω $\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Τότε

$$\mathbb{A}^2\mathbf{x} = \mathbb{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda \cdot \lambda\mathbf{x}.$$

Εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος τότε και ο $\mathbb{A}^k$ είναι διαγωνοποιήσιμος και οι $\mathbb{A}, \mathbb{A}^k$ διαγωνοποιούνται από τον ίδιο πίνακα.

Πράγματι αν $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}(\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}) = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$. Ιδιαίτερα ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 4. Εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$, τότε και ο $\mathbb{A}^k$ είναι διαγωνοποιήσιμος και

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Επίσης εάν λ ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ τότε ο λ^k είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}^k$.

Έστω $\mathbb{A}\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$. Τότε

$$\mathbb{A}^2\mathbb{x} = \mathbb{A}(\lambda\mathbb{x}) = \lambda\mathbb{A}\mathbb{x} = \lambda \cdot \lambda\mathbb{x}.$$

Με απλή επαγωγή δείχνουμε $\mathbb{A}^k\mathbb{x} = \lambda^k\mathbb{x}$.

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα $\mathbb{x}$ του $\mathbb{A}$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}^k$ και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ^k .

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Θα θέλαμε να βρίσκουμε τα διανύσματα w_k για μεγάλα k και επίσης αν τα διανύσματα u_k τείνουν να σταθεροποιηθούν σ' ένα διάνυσμα.

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Θα θέλαμε να βρίσκουμε τα διανύσματα w_k για μεγάλα k και επίσης αν τα διανύσματα u_k τείνουν να σταθεροποιηθούν σ' ένα διάνυσμα.

Από τον ορισμό των w_k έχουμε ότι

$$w_1 = \mathbb{A}w_0, \quad w_2 = \mathbb{A}w_1 = \mathbb{A}^2w_0, \quad w_3 = \mathbb{A}w_2 = \mathbb{A}^3w_0$$

και συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι $w_k = \mathbb{A}^k w_0$.

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Θα θέλαμε να βρίσκουμε τα διανύσματα w_k για μεγάλα k και επίσης αν τα διανύσματα u_k τείνουν να σταθεροποιηθούν σ' ένα διάνυσμα.

Από τον ορισμό των w_k έχουμε ότι

$$w_1 = \mathbb{A}w_0, \quad w_2 = \mathbb{A}w_1 = \mathbb{A}^2w_0, \quad w_3 = \mathbb{A}w_2 = \mathbb{A}^3w_0$$

και συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι $w_k = \mathbb{A}^k w_0$.

Έτσι για να υπολογίσουμε τα διανύσματα w_k χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα $\mathbb{A}^k$.

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Θα θέλαμε να βρίσκουμε τα διανύσματα w_k για μεγάλα k και επίσης αν τα διανύσματα u_k τείνουν να σταθεροποιηθούν σ' ένα διάνυσμα.

Από τον ορισμό των w_k έχουμε ότι

$$w_1 = \mathbb{A}w_0, \quad w_2 = \mathbb{A}w_1 = \mathbb{A}^2w_0, \quad w_3 = \mathbb{A}w_2 = \mathbb{A}^3w_0$$

και συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι $w_k = \mathbb{A}^k w_0$.

Έτσι για να υπολογίσουμε τα διανύσματα w_k χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα $\mathbb{A}^k$.

Στην περίπτωση που ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος ο $\mathbb{A}^k$ υπολογίζεται εύκολα. Πράγματι είδαμε πριν ότι αν $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ τότε $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$. Εάν

$$\mathbb{B} = [\Sigma_1 \ \Sigma_2, \dots, \Sigma_n], \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{B}^{-1}w_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Θα θέλαμε να βρίσκουμε τα διανύσματα w_k για μεγάλα k και επίσης αν τα διανύσματα u_k τείνουν να σταθεροποιηθούν σ' ένα διάνυσμα.

Από τον ορισμό των w_k έχουμε ότι

$$w_1 = \mathbb{A}w_0, \quad w_2 = \mathbb{A}w_1 = \mathbb{A}^2w_0, \quad w_3 = \mathbb{A}w_2 = \mathbb{A}^3w_0$$

και συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι $w_k = \mathbb{A}^k w_0$.

Έτσι για να υπολογίσουμε τα διανύσματα w_k χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα $\mathbb{A}^k$.

Στην περίπτωση που ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος ο $\mathbb{A}^k$ υπολογίζεται εύκολα. Πράγματι είδαμε πριν ότι αν $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ τότε $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$. Εάν

$$\mathbb{B} = [\Sigma_1 \ \Sigma_2, \dots, \Sigma_n], \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{B}^{-1}w_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^k w_0 &= \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}w_0 = [\Sigma_1 \ \Sigma_2, \dots, \Sigma_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= c_1 \lambda_1^k \Sigma_1 + c_2 \lambda_2^k \Sigma_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k \Sigma_n. \end{aligned}$$

Έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα w_0 . Τότε παράγουμε την ακολουθία διανυσμάτων $(w_k)_k$ όπου $w_k = \mathbb{A}w_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Θα θέλαμε να βρίσκουμε τα διανύσματα w_k για μεγάλα k και επίσης αν τα διανύσματα u_k τείνουν να σταθεροποιηθούν σ' ένα διάνυσμα.

Από τον ορισμό των w_k έχουμε ότι

$$w_1 = \mathbb{A}w_0, \quad w_2 = \mathbb{A}w_1 = \mathbb{A}^2w_0, \quad w_3 = \mathbb{A}w_2 = \mathbb{A}^3w_0$$

και συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι $w_k = \mathbb{A}^k w_0$.

Έτσι για να υπολογίσουμε τα διανύσματα w_k χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα $\mathbb{A}^k$.

Στην περίπτωση που ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος ο $\mathbb{A}^k$ υπολογίζεται εύκολα. Πράγματι είδαμε πριν ότι αν $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ τότε $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$. Εάν

$$\mathbb{B} = [\Sigma_1 \Sigma_2, \dots, \Sigma_n], \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{B}^{-1}w_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^k w_0 &= \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}w_0 = [\Sigma_1 \Sigma_2, \dots, \Sigma_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= c_1 \lambda_1^k \Sigma_1 + c_2 \lambda_2^k \Sigma_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k \Sigma_n. \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι οι λ_i^k είναι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}^k$ με ιδιοδιανύσματα τα Σ_i .

Επομένως το διάνυσμα $w_k = \mathbb{A}^k w_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbb{A}$. Επίσης επειδή τα ιδιοδιανύσματα Σ_i και οι αριθμοί c_i δεν μεταβάλλονται με το k έχουμε ότι τα διανύσματα w_k εξαρτώνται από τις τιμές των λ_i^k , $i \leq n$.

Ορισμός 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται πίνακας Markov εάν

- 1) $a_{i,j} \geq 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$,
- 2) $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Λέμε ότι ο $\mathbb{A}$ είναι θετικός πίνακας Markov εάν είναι Markov και $a_{i,j} > 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε στήλης είναι ίσο με ένα.

Ορισμός 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται πίνακας Markov εάν

- 1) $a_{i,j} \geq 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$,
- 2) $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Λέμε ότι ο $\mathbb{A}$ είναι θετικός πίνακας Markov εάν είναι Markov και $a_{i,j} > 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε στήλης είναι ίσο με ένα.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ είναι πίνακας Markov.

Ορισμός 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται πίνακας Markov εάν

- 1) $a_{i,j} \geq 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$,
- 2) $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Λέμε ότι ο $\mathbb{A}$ είναι θετικός πίνακας Markov εάν είναι Markov και $a_{i,j} > 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε στήλης είναι ίσο με ένα.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ είναι πίνακας Markov.

Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ είναι θετικός πίνακας Markov.

Ορισμός 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται πίνακας Markov εάν

- 1) $a_{i,j} \geq 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$,
- 2) $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Λέμε ότι ο $\mathbb{A}$ είναι θετικός πίνακας Markov εάν είναι Markov και $a_{i,j} > 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε στήλης είναι ίσο με ένα.

Παράδειγμα 6. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ είναι πίνακας Markov.

Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ είναι θετικός πίνακας Markov.

Ορισμός 15. Εάν διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ λέμε ότι είναι στοχαστικό διάνυσμα εάν

$x_i \geq 0$ για κάθε i και $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Εάν επιπλέον $x_i > 0$ για κάθε i τότε λέμε ότι είναι θετικό στοχαστικό διάνυσμα.

Εάν A είναι ένας πίνακας Markov και x ένα στοχαστικό διάνυσμα τότε και το διάνυσμα Ax είναι στοχαστικό.

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας πίνακας Markov και $\mathbf{x}$ ένα στοχαστικό διάνυσμα τότε και το διάνυσμα $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι στοχαστικό.

Πράγματι εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \cdots + x_n a_{1,n} \\ x_1 a_{2,1} + x_2 a_{2,2} + \cdots + x_n a_{2,n} \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ x_1 a_{n,1} + x_2 a_{n,2} + \cdots + x_n a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας πίνακας Markov και $\mathbf{x}$ ένα στοχαστικό διάνυσμα τότε και το διάνυσμα $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι στοχαστικό.

Πράγματι εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \cdots + x_n a_{1,n} \\ x_1 a_{2,1} + x_2 a_{2,2} + \cdots + x_n a_{2,n} \\ \vdots \cdots \vdots \cdots \vdots \cdots \vdots \\ x_1 a_{n,1} + x_2 a_{n,2} + \cdots + x_n a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι στοχαστικό διάνυσμα. Πράγματι

$$\begin{aligned} & x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \cdots + x_n a_{1,n} \\ & + x_1 a_{2,1} + x_2 a_{2,2} + \cdots + x_n a_{2,n} \\ & \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ & + x_1 a_{n,1} + x_2 a_{n,2} + \cdots + x_n a_{n,n} \\ & = x_1 (a_{1,1} + a_{2,1} + \cdots + a_{n,1}) \\ & + x_2 (a_{1,2} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,2}) \\ & \quad \vdots \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ & + x_n (a_{1,n} + a_{2,n} + \cdots + a_{n,n}) \\ & = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1. \end{aligned}$$

- Ορισμός 16.** Σταθερή κατάσταση ενός στοχαστικού πίνακα είναι ένα θετικό στοχαστικό διάνυσμα το οποίο είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.
- Θεώρημα 17.** Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας θετικός πίνακας Markov τότε
- 1) ο αριθμός 1 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ πολλαπλότητας ένα

Ορισμός 16. Σταθερή κατάσταση ενός στοχαστικού πίνακα είναι ένα θετικό στοχαστικό διάνυσμα το οποίο είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

Θεώρημα 17. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας θετικός πίνακας Markov τότε

- 1) ο αριθμός 1 είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$ πολλαπλότητας ένα
- 2) εάν λ μια άλλη ιδιοτιμή τότε $|\lambda| < 1$.

Θεώρημα 18. Έστω $\mathbb{A}$ ένας θετικός στοχαστικός πίνακας. Τότε

- 1) υπάρχει μοναδικό θετικό στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ το οποίο παράγει τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής ένα.

Θεώρημα 18. Έστω $\mathbb{A}$ ένας θετικός στοχαστικός πίνακας. Τότε

- 1) υπάρχει μοναδικό θετικό στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ το οποίο παράγει τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής ένα.
- 2) για κάθε στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{u}_0$ η ακολουθία διανυσμάτων $\mathbf{u}_k = \mathbb{A}\mathbf{u}_{k-1}$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.

Θεώρημα 18. Έστω $\mathbb{A}$ ένας θετικός στοχαστικός πίνακας. Τότε

- 1) υπάρχει μοναδικό θετικό στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ το οποίο παράγει τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής ένα.
- 2) για κάθε στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{u}_0$ η ακολουθία διανυσμάτων $\mathbf{u}_k = \mathbb{A}\mathbf{u}_{k-1}$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.
- 3) η ακολουθία πινάκων $\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3, \dots$ συγκλίνει σ' ένα πίνακα $\mathbb{Q}$ του οποίου κάθε στήλη είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.

Θεώρημα 18. Έστω $\mathbb{A}$ ένας θετικός στοχαστικός πίνακας. Τότε

- 1) υπάρχει μοναδικό θετικό στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ το οποίο παράγει τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής ένα.
- 2) για κάθε στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{u}_0$ η ακολουθία διανυσμάτων $\mathbf{u}_k = \mathbb{A}\mathbf{u}_{k-1}$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.
- 3) η ακολουθία πινάκων $\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3, \dots$ συγκλίνει σ' ένα πίνακα $\mathbb{Q}$ του οποίου κάθε στήλη είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.

Θεώρημα 18. Έστω $\mathbb{A}$ ένας θετικός στοχαστικός πίνακας. Τότε

- 1) υπάρχει μοναδικό θετικό στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ το οποίο παράγει τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής ένα.
- 2) για κάθε στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{u}_0$ η ακολουθία διανυσμάτων $\mathbf{u}_k = \mathbb{A}\mathbf{u}_{k-1}$ συγκλίνει στο διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.
- 3) η ακολουθία πινάκων $\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3, \dots$ συγκλίνει σ' ένα πίνακα $\mathbb{Q}$ του οποίου κάθε στήλη είναι το διάνυσμα $\mathbf{x}_0$.

Έχουμε δει ότι ο ιδιοχώρος $N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n)$ για την ιδιοτιμή 1 είναι διανυσματικός χώρος. Έτσι αν $\mathbf{x} \in N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n)$ τότε και $t\mathbf{x} \in N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n)$ για κάθε t . Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι υπάρχει μοναδικό θετικό στοχαστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ ώστε $N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n) = \text{span}\{\mathbf{x}_0\}$. Άρα εάν $\mathbf{x}$ είναι ένα θετικό στοχαστικό διάνυσμα διαφορετικό από το $\mathbf{x}_0$ τότε $\mathbf{x} \notin N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_n)$.

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$ να βρεθεί το διάνυσμα σταθερής κατάστασης.

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$ να βρεθεί το διάνυσμα σταθερής κατάστασης.

Αρχικά λύνουμε το σύστημα $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$. Το σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} -0.2x + 0.1y &= 0 \\ 0.2x - 0.1y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 2x$$

Επομένως τα διανύσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι λύσεις του συστήματος.

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$ να βρεθεί το διάνυσμα σταθερής κατάστασης.

Αρχικά λύνουμε το σύστημα $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$. Το σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} -0.2x + 0.1y &= 0 \\ 0.2x - 0.1y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 2x$$

Επομένως τα διανύσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι λύσεις του συστήματος.

Επειδή θέλουμε στοχαστικό διάνυσμα θα πρέπει $y + 2y = 1 \Rightarrow y = 1/3$.

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$ να βρεθεί το διάνυσμα σταθερής κατάστασης.

Αρχικά λύνουμε το σύστημα $(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$. Το σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} -0.2x + 0.1y &= 0 \\ 0.2x - 0.1y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 2x$$

Επομένως τα διανύσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι λύσεις του συστήματος.

Επειδή θέλουμε στοχαστικό διάνυσμα θα πρέπει $y + 2y = 1 \Rightarrow y = 1/3$. Επομένως το στοχαστικό διάνυσμα του $\mathbb{A}$ είναι το $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1.

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$.

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$. Εάν $\mathbf{x}_0$ είναι στοχαστικό ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0.6x + 0.3y = x \\ 0.4x + 0.7y = y \end{cases} \Rightarrow 0.3y = 0.4x \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ \frac{0.4}{0.3}x \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$. Εάν $\mathbf{x}_0$ είναι στοχαστικό ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0.6x + 0.3y = x \\ 0.4x + 0.7y = y \end{cases} \Rightarrow 0.3y = 0.4x \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ \frac{0.4}{0.3}x \end{bmatrix}.$$

Επειδή θέλουμε το $\mathbf{x}_0$ να είναι στοχαστικό διάστημα θα πρέπει $x + \frac{0.4}{0.3}x = 1 \Rightarrow x = 3/7$.

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$. Εάν $\mathbf{x}_0$ είναι στοχαστικό ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0.6x + 0.3y = x \\ 0.4x + 0.7y = y \end{cases} \Rightarrow 0.3y = 0.4x \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ \frac{0.4}{0.3}x \end{bmatrix}.$$

Επειδή θέλουμε το $\mathbf{x}_0$ να είναι στοχαστικό διάστημα θα πρέπει $x + \frac{0.4}{0.3}x = 1 \Rightarrow x = 3/7$.

Άρα το διάνυσμα σταθερής κατάστασης είναι το $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$. Εάν $\mathbf{x}_0$ είναι στοχαστικό ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0.6x + 0.3y = x \\ 0.4x + 0.7y = y \end{cases} \Rightarrow 0.3y = 0.4x \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ \frac{0.4}{0.3}x \end{bmatrix}.$$

Επειδή θέλουμε το $\mathbf{x}_0$ να είναι στοχαστικό διάστημα θα πρέπει $x + \frac{0.4}{0.3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$.

Άρα το διάνυσμα σταθερής κατάστασης είναι το $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τώρα ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0.3

$$(\mathbb{A} - 0.3\mathbb{I}_2)\mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.3x + 0.3y = 0 \\ 0.4x + 0.4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$. Εάν $\mathbf{x}_0$ είναι στοχαστικό ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0.6x + 0.3y = x \\ 0.4x + 0.7y = y \end{cases} \Rightarrow 0.3y = 0.4x \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ \frac{0.4}{0.3}x \end{bmatrix}.$$

Επειδή θέλουμε το $\mathbf{x}_0$ να είναι στοχαστικό διάστημα θα πρέπει $x + \frac{0.4}{0.3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$.

Άρα το διάνυσμα σταθερής κατάστασης είναι το $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τώρα ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0.3

$$(\mathbb{A} - 0.3\mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.3x + 0.3y = 0 \\ 0.4x + 0.4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 8. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{199}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι θετικός στοχαστικός πίνακας άρα μια ιδιοτιμή είναι το 1. Εάν λ_2 η άλλη ιδιοτιμή τότε $1 + \lambda_2 = 0.6 + 0.7$ και $1 \cdot \lambda_2 = 0.6 \cdot 0.7 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.3$. Εάν $\mathbf{x}_0$ είναι στοχαστικό ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \begin{cases} 0.6x + 0.3y = x \\ 0.4x + 0.7y = y \end{cases} \Rightarrow 0.3y = 0.4x \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ \frac{0.4}{0.3}x \end{bmatrix}.$$

Επειδή θέλουμε το $\mathbf{x}_0$ να είναι στοχαστικό διάστημα θα πρέπει $x + \frac{0.4}{0.3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$.

Άρα το διάνυσμα σταθερής κατάστασης είναι το $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$

Θα βρούμε τώρα ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0.3

$$(\mathbb{A} - 0.3\mathbb{I}_2)\mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.3x + 0.3y = 0 \\ 0.4x + 0.4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Εάν $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix}$ τότε $\mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix}$

Τότε έχουμε

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

Τότε έχουμε

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbb{A}^{199}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbb{A}^{199} &= \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{199} & 0 \\ 0 & 0.3^{199} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbb{A}^{199} &= \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{199} & 0 \\ 0 & 0.3^{199} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbb{A}^{199} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + 0.3^{199} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} - 0.3^{199} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} - 0.3^{199} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} + 0.3^{199} \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Τότε έχουμε

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}^{199} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{199} & 0 \\ 0 & 0.3^{199} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\mathbb{A}^{199} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + 0.3^{199} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} - 0.3^{199} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} - 0.3^{199} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} + 0.3^{199} \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Όμοια

$$\mathbb{A}^k = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbb{A}^{199} &= \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{199} & 0 \\ 0 & 0.3^{199} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & -3/7 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathbb{A}^{199} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + 0.3^{199} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} - 0.3^{199} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} - 0.3^{199} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} + 0.3^{199} \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Όμοια

$$\mathbb{A}^k = \begin{bmatrix} 3/7 & 1 \\ 4/7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{A}^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + 0.3^k \frac{4}{7} & \frac{3}{7} - 0.3^k \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} - 0.3^k \frac{4}{7} & \frac{4}{7} + 0.3^k \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Εάν λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.5 + 0.25$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -.25$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Εάν λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.5 + 0.25$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -0.25$.
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -0.25$.

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Εάν λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.5 + 0.25$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -.25$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -0.25$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$,

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5x + 0.75y = 0 \\ 0.5x - 0.75y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y.$$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Εάν λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.5 + 0.25$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -.25$
 Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -0.25$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$,

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5x + 0.75y = 0 \\ 0.5x - 0.75y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y.$$

$$\text{Άρα } N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Εάν λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.5 + 0.25$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -0.25$.
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -0.25$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$,

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5x + 0.75y = 0 \\ 0.5x - 0.75y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y.$$

$$\text{Άρα } N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda = -0.25$,

$$(\mathbb{A} - (-0.25)\mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.75x + 0.75y = 0 \\ 0.5x + 0.5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y.$$

Παράδειγμα 9. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$ βρείτε το $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k$.

Εάν λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.5 + 0.25$ και $\lambda_1 \lambda_2 = -0.25$.
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -0.25$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$,

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5x + 0.75y = 0 \\ 0.5x - 0.75y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y.$$

$$\text{Άρα } N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda = -0.25$,

$$(\mathbb{A} - (-0.25)\mathbb{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.75x + 0.75y = 0 \\ 0.5x + 0.5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y.$$

$$\text{Άρα } N(\mathbb{A} - \mathbb{I}_2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \text{ και άρα } \mathbb{A} = \mathbb{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix} \mathbb{B}^{-1}.$$

$$\text{Εάν } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \text{ και άρα } \mathbb{A} = \mathbb{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix} \mathbb{B}^{-1}.$$

Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^k &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.25)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^k &= \lim_k \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5(-\frac{1}{4})^k & -3/5(-\frac{1}{4})^k \end{bmatrix} \\ &= \lim_k \begin{bmatrix} 3/5 + 2/5(-\frac{1}{4})^k & 3/5 - 3/5(-\frac{1}{4})^k \\ 2/5 - \frac{2}{5}(-\frac{2}{4})^k & 2/5 + \frac{3}{5}(-\frac{2}{4})^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{2018}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας είναι θετικός πίνακας Markov άρα μια ιδιοτιμή του είναι η $\lambda_1 = 1$
 Επίσης $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.6 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0.6$ και $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(\mathbb{A}) = 0.05$
 Άρα $\lambda_2 + \lambda_3 = 0.6$ και $\lambda_2 \lambda_3 = 0.05$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.1$.

Παράδειγμα 10. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{2018}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας είναι θετικός πίνακας Markov άρα μια ιδιοτιμή του είναι η $\lambda_1 = 1$
 Επίσης $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.6 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0.6$ και $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(\mathbb{A}) = 0.05$
 Άρα $\lambda_2 + \lambda_3 = 0.6$ και $\lambda_2 \lambda_3 = 0.05$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.1$.

Βρίσκουμε ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή. Για $\lambda = 1$,

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.6x & + & 0.3y & + & 0.3z & = & 0 \\ 0.3x & - & 0.4y & + & 0.1z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & - & 0.4z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 10. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$ να βρεθούν

- 1) ένα διάνυσμα σταθερής κατάστασης για τον $\mathbb{A}$.
- 2) ο $\mathbb{A}^{2018}$
- 3) το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n$.

Ο πίνακας είναι θετικός πίνακας Markov άρα μια ιδιοτιμή του είναι η $\lambda_1 = 1$
 Επίσης $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.6 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0.6$ και $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(\mathbb{A}) = 0.05$
 Άρα $\lambda_2 + \lambda_3 = 0.6$ και $\lambda_2 \lambda_3 = 0.05$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.1$.

Βρίσκουμε ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή. Για $\lambda = 1$,

$$(\mathbb{A} - \mathbb{I}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.6x & + & 0.3y & + & 0.3z & = & 0 \\ 0.3x & - & 0.4y & + & 0.1z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & - & 0.4z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Επομένως διάνυσμα σταθερής κατάστασης είναι το $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = 0.5$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A} - 0.5\mathbb{I}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} -0.1x & + & 0.3y & + & 0.3z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.1z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.1z & = & 0 \end{array} \Rightarrow x = 0, y + z = 0.
 \end{aligned}$$

Για $\lambda = 0.5$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A} - 0.5\mathbb{I}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{array}{rrrrr} -0.1x & + & 0.3y & + & 0.3z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.1z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.1z & = & 0 \end{array} \Rightarrow x = 0, y + z = 0.
 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = 0.5$,

$$(\mathbb{A} - 0.5\mathbb{I}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrr} -0.1x & + & 0.3y & + & 0.3z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.1z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.1z & = & 0 \end{array} \Rightarrow x = 0, y + z = 0.$$

Έτσι έχουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Για $\lambda = 0.1$,

$$(\mathbb{A} - 0.1\mathbb{I}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.4x & + & 0.3y & + & 0.3z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.5y & + & 0.1z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.1y & + & 0.5z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y, y = z$$

Έτσι έχουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Εάν $B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ θα βρούμε τον αντίστροφο του.

Εάν $B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ θα βρούμε τον αντίστροφο του.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(1)E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{1,3}(-2/6)E_{2,3}(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{M_1(3)M_2(1)M_3(1/6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{array} \right]$$

$$\text{Έτσι έχουμε ότι } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^k &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5^k & 0 \\ 0 & 0 & 0.1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}0.1^k & \frac{1}{3} + \frac{2}{6}0.1^k & \frac{1}{3} - \frac{2}{6}0.1^k \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}0.1^k & \frac{1}{3} - 0.5^k - \frac{1}{6}0.1^k & \frac{1}{3} - 0.5^{k+1} + \frac{1}{6}0.1^k \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}0.1^k & \frac{1}{3} - 0.5^{k+1} - \frac{1}{6}0.1^k & \frac{1}{3} + -0.5^{k+1} + \frac{1}{3}0.1^k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11. Έχουμε μια πόλη A στην οποία έχουμε μετακίνηση του πληθυσμού με τον ακόλουθο τρόπο:
 κάθε χρόνο το $1/10$ πληθυσμού που βρίσκεται εκτός της πόλης μετακομίζει στην πόλη και τα $2/10$ του πληθυσμού της την εγκαταλείπει. Εάν z_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης και y_0 ο πληθυσμός που βρίσκεται εκτός της πόλης να βρεθούν οι πληθυσμοί z_n της πόλης, y_n εκτός της πόλης μετά από n -χρόνια και τα $\lim_n z_n, \lim_n y_n$.

Παράδειγμα 11. Έχουμε μια πόλη A στην οποία έχουμε μετακίνηση του πληθυσμού με τον ακόλουθο τρόπο:
 κάθε χρόνο το $1/10$ πληθυσμού που βρίσκεται εκτός της πόλης μετακομίζει στην πόλη και τα $2/10$ του πληθυσμού της την εγκαταλείπει. Εάν z_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης και y_0 ο πληθυσμός που βρίσκεται εκτός της πόλης να βρεθούν οι πληθυσμοί z_n της πόλης, y_n εκτός της πόλης μετά από n -χρόνια και τα $\lim_n z_n, \lim_n y_n$.

Έχουμε ότι οι πληθυσμοί μεταβάλλονται με τον κανόνα

$$z_k = 0.8z_{k-1} + 0.1y_{k-1}, y_k = 0.2z_k + 0.9y_{k-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 11. Έχουμε μια πόλη A στην οποία έχουμε μετακίνηση του πληθυσμού με τον ακόλουθο τρόπο:
 κάθε χρόνο το $1/10$ πληθυσμού που βρίσκεται εκτός της πόλης μετακομίζει στην πόλη και τα $2/10$ του πληθυσμού της την εγκαταλείπει. Εάν z_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης και y_0 ο πληθυσμός που βρίσκεται εκτός της πόλης να βρεθούν οι πληθυσμοί z_n της πόλης, y_n εκτός της πόλης μετά από n -χρόνια και τα $\lim_n z_n, \lim_n y_n$.

Έχουμε ότι οι πληθυσμοί μεταβάλλονται με τον κανόνα

$$z_k = 0.8z_{k-1} + 0.1y_{k-1}, y_k = 0.2z_k + 0.9y_{k-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0.7$

εφόσον $\det(A - \lambda I) = (0.9 - 1)(0.8 - 1) - 0.2 \cdot 0.1 = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$.

ή διαφορετικά ο A είναι θετικός Markov και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1.7$, $\lambda_1 = 1$.

Παράδειγμα 11. Έχουμε μια πόλη A στην οποία έχουμε μετακίνηση του πληθυσμού με τον ακόλουθο τρόπο:
 κάθε χρόνο το $1/10$ πληθυσμού που βρίσκεται εκτός της πόλης μετακομίζει στην πόλη και τα $2/10$ του πληθυσμού της την εγκαταλείπει. Εάν z_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης και y_0 ο πληθυσμός που βρίσκεται εκτός της πόλης να βρεθούν οι πληθυσμοί z_n της πόλης, y_n εκτός της πόλης μετά από n -χρόνια και τα $\lim_n z_n, \lim_n y_n$.

Έχουμε ότι οι πληθυσμοί μεταβάλλονται με τον κανόνα

$$z_k = 0.8z_{k-1} + 0.1y_{k-1}, y_k = 0.2z_k + 0.9y_{k-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0.7$

εφόσον $\det(A - \lambda I) = (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.2 \cdot 0.1 = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$.

ή διαφορετικά ο A είναι θετικός Markov και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1.7$, $\lambda_1 = 1$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$,

$$(A - I_2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0.1x + 0.2y = 0 \\ 0.1x - 0.2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y.$$

$$\text{Άρα } N(A - I_2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Παράδειγμα 11. Έχουμε μια πόλη A στην οποία έχουμε μετακίνηση του πληθυσμού με τον ακόλουθο τρόπο:
 κάθε χρόνο το $1/10$ πληθυσμού που βρίσκεται εκτός της πόλης μετακομίζει στην πόλη και τα $2/10$ του πληθυσμού της την εγκαταλείπει. Εάν z_0 είναι ο πληθυσμός της πόλης και y_0 ο πληθυσμός που βρίσκεται εκτός της πόλης να βρεθούν οι πληθυσμοί z_n της πόλης, y_n εκτός της πόλης μετά από n -χρόνια και τα $\lim_n z_n, \lim_n y_n$.

Έχουμε ότι οι πληθυσμοί μεταβάλλονται με τον κανόνα

$$z_k = 0.8z_{k-1} + 0.1y_{k-1}, y_k = 0.2z_k + 0.9y_{k-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0.7$

εφόσον $\det(A - \lambda I) = (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.2 \cdot 0.1 = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$.

ή διαφορετικά ο A είναι θετικός Markov και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1.7$, $\lambda_1 = 1$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$,

$$(A - I_2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0.1x + 0.2y = 0 \\ 0.1x - 0.2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y.$$

$$\text{Άρα } N(A - I_2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.7$,

$$(A - 0.7I_2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0.2x + 0.2y = 0 \\ 0.1x + 0.1y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y.$$

$$\text{Άρα } N(A - 0.7I_2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Εάν } \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ τότε } \mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= \mathbb{A}^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{0.7^k}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}0.7^k \\ \frac{1}{3} - \frac{0.7^k}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}0.7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(y_0 + z_0) \\ \frac{1}{3}(y_0 + z_0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$