

Μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$$

ονομάζεται γραμμική εξίσωση.

Στην εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$

οι άγνωστοι ή μεταβλητές είναι τα $x_1, x_2, \dots, x_n$,

οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι σταθεροί αριθμοί και ονομάζονται συντελεστές των μεταβλητών και ο αριθμός d είναι σταθερός και ονομάζεται σταθερά της εξίσωσης.

Μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$$

ονομάζεται γραμμική εξίσωση.

Στην εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$

οι άγνωστοι ή μεταβλητές είναι τα $x_1, x_2, \dots, x_n$,

οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι σταθεροί αριθμοί και ονομάζονται συντελεστές των μεταβλητών και ο αριθμός d είναι σταθερός και ονομάζεται σταθερά της εξίσωσης.

Παραδείγματα 1. 1) Η εξίσωση μιας ευθείας είναι γραμμική εξίσωση,

$$ax + by = d$$

Μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$$

ονομάζεται γραμμική εξίσωση.

Στην εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$

οι άγνωστοι ή μεταβλητές είναι τα $x_1, x_2, \dots, x_n$,

οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι σταθεροί αριθμοί και ονομάζονται συντελεστές των μεταβλητών και ο αριθμός d είναι σταθερός και ονομάζεται σταθερά της εξίσωσης.

Παραδείγματα 1. 1) Η εξίσωση μιας ευθείας είναι γραμμική εξίσωση,

$$ax + by = d$$

2) Η εξίσωση ενός επιπέδου είναι γραμμική εξίσωση, $ax + by + cz = d$

Μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$$

ονομάζεται γραμμική εξίσωση.

Στην εξίσωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = d$

οι άγνωστοι ή μεταβλητές είναι τα $x_1, x_2, \dots, x_n$,

οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι σταθεροί αριθμοί και ονομάζονται συντελεστές των μεταβλητών και ο αριθμός d είναι σταθερός και ονομάζεται σταθερά της εξίσωσης.

Παραδείγματα 1. 1) Η εξίσωση μιας ευθείας είναι γραμμική εξίσωση,

$$ax + by = d$$

2) Η εξίσωση ενός επιπέδου είναι γραμμική εξίσωση, $ax + by + cz = d$ Γραμμικό σύστημα εξισώσεων είναι μια συλλογή γραμμικών εξισώσεων με τους ίδιους αγνώστους $x_1, \dots, x_n$,

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = c_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m.$$

Λέμε ότι το σύστημα είναι $m \times n$ -σύστημα εάν αποτελείται από m -εξισώσεις με n -αγνώστους.

Γραμμικά συστήματα εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα

1) Ένα απλό παράδειγμα είναι να βρεθεί το σημείο τομής δύο ευθειών. Ζητάμε να λυθεί το σύστημα

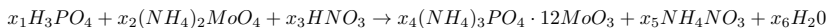
$$a_1x_1 + b_1x_2 = k_1$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 = k_2$$

2) Στις χημικές εξισώσεις εμφανίζονται απλά συστήματα. Για να είναι σωστή η παρακάτω αντίδραση



όπου υδρογόνο, P φώσφορος, οξυγόνο, άζωτο και μόλυβδος, θα πρέπει όσα μονάδες κάθε συστατικού υπάρχουν στο πρώτο μέρος να υπάρχουν και στο δεύτερο. Αυτή η απαίτηση μας επιβάλλει να βρούμε $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ώστε για την αντίδραση



να ισχύει

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 - 12x_4 - 4x_5 - 2x_6 = 0$$

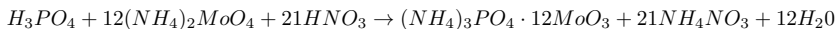
$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_4 - 0x_5 - 0x_6 = 0$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 40x_4 - 3x_5 - x_6 = 0$$

$$0x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 0x_6 = 0$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 - 12x_4 - 0x_5 - 0x_6 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα έχει ως μια λύση $x_1 = 1, x_2 = 12, x_3 = 21, x_4 = 1, x_5 = 21$ και $x_6 = 12$ οπότε η “σωστή” αντίδραση είναι η



Λύση ενός $m \times n$ συστήματος

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = c_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m.$$

είναι μια n -άδα αριθμών $z_1, \dots, z_n$ που επαληθεύουν κάθε εξίσωση όταν οι τιμές $z_1, \dots, z_n$ αντικαταστήσουν τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$.

Λύση ενός $m \times n$ συστήματος

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = c_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m.$$

είναι μια n -άδα αριθμών $z_1, \dots, z_n$ που επαληθεύουν κάθε εξίσωση όταν οι τιμές $z_1, \dots, z_n$ αντικαταστήσουν τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$.

Ορισμός 2. Ένα $m \times n$ -σύστημα λέμε ότι είναι συμβατό εάν έχει τουλάχιστον μία λύση. Εάν δεν έχει λύση λέμε ότι είναι ασύμβατο.

Λύση ενός $m \times n$ συστήματος

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = c_2$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n = c_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = c_m.$$

είναι μια n -άδα αριθμών $z_1, \dots, z_n$ που επαληθεύουν κάθε εξίσωση όταν οι τιμές $z_1, \dots, z_n$ αντικαταστήσουν τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$.

Ορισμός 2. Ένα $m \times n$ -σύστημα λέμε ότι είναι συμβατό εάν έχει τουλάχιστον μία λύση. Εάν δεν έχει λύση λέμε ότι είναι ασύμβατο.

Ορισμός 3. Δύο $m \times n$ -συστήματα λέμε ότι είναι ισοδύναμα εάν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

Εάν έχουμε ένα σύστημα θέλουμε να βρούμε το σύνολο των λύσεων, εάν υπάρχουν ή να δείξουμε ότι δεν έχει λύση.

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση μιας ευθείας στο xy -επίπεδο.
Έτσι αν έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

γεωμετρικά ρωτάμε αν οι δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο. Ένα τέτοιο σύστημα
- δεν έχει καμμία λύση αν οι ευθείες είναι παράλληλες π.χ $\frac{1}{3}x + y = 1, x + 3y = 4$

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση μιας ευθείας στο xy -επίπεδο. Έτσι αν έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

γεωμετρικά ρωτάμε αν οι δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο. Ένα τέτοιο σύστημα

- δεν έχει καμμία λύση αν οι ευθείες είναι παράλληλες π.χ $\frac{1}{3}x + y = 1, x + 3y = 4$
- έχει άπειρες λύσεις αν οι δύο ευθείες συμπίπτουν, π.χ $x + y = 1, 2x + 2y = 2$

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση μιας ευθείας στο xy -επίπεδο. Έτσι αν έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

γεωμετρικά ρωτάμε αν οι δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο. Ένα τέτοιο σύστημα

- δεν έχει καμμία λύση αν οι ευθείες είναι παράλληλες π.χ $\frac{1}{3}x + y = 1, x + 3y = 4$
- έχει άπειρες λύσεις αν οι δύο ευθείες συμπίπτουν, π.χ $x + y = 1, 2x + 2y = 2$
- έχει μια λύση αν οι ευθείες δεν είναι παράλληλες π.χ $x + 2y = 1, 2x + 3y = 4$.

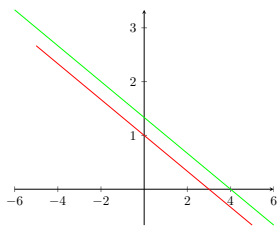
Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση μιας ευθείας στο xy -επίπεδο.
Έτσι αν έχουμε το σύστημα εξισώσεων

$$a_1x + b_1y = c_1$$

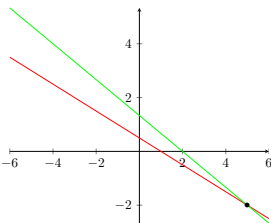
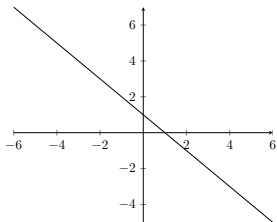
$$a_2x + b_2y = c_2$$

γεωμετρικά ρωτάμε αν οι δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο. Ένα τέτοιο σύστημα

- δεν έχει καμμία λύση αν οι ευθείες είναι παράλληλες π.χ $\frac{1}{3}x + y = 1$, $x + 3y = 4$
- έχει άπειρες λύσεις αν οι δύο ευθείες συμπίπτουν, π.χ $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$
- έχει μια λύση αν οι ευθείες δεν είναι παράλληλες π.χ $x + 2y = 1$, $2x + 3y = 4$.



(α') οι ευθείες $\frac{1}{3}x + y = 1$, (β') οι ευθείες $x + y = 1$,
 $x + 3y = 4$ είναι παράλληλες. $2x + 2y = 2$ ταυτίζονται.



(γ') οι ευθείες $x + 2y = 1$,
 $2x + 3y = 4$ τέμνονται σ' ένα
σημείο.

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Εάν τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα τότε το 3×3 -σύστημα δεν έχει λύση.

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Εάν τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα τότε το 3×3 -σύστημα δεν έχει λύση. Έχουμε δει στα μαθήματα Λογισμού πολλών μεταβλητών ότι αν δύο επίπεδα τέμνονται και δεν ταυτίζονται, η τομή τους είναι μια ευθεία. Έτσι στην περίπτωση που τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα,

- εάν τα τρία επίπεδα έχουν μια κοινή ευθεία τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις,

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Εάν τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα τότε το 3×3 -σύστημα δεν έχει λύση. Έχουμε δει στα μαθήματα Λογισμού πολλών μεταβλητών ότι αν δύο επίπεδα τέμνονται και δεν ταυτίζονται, η τομή τους είναι μια ευθεία. Έτσι στην περίπτωση που τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα,

- ❶ εάν τα τρία επίπεδα έχουν μια κοινή ευθεία τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις,
- ❷ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο έχουμε μοναδική λύση.

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Εάν τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα τότε το 3×3 -σύστημα δεν έχει λύση. Έχουμε δει στα μαθήματα Λογισμού πολλών μεταβλητών ότι αν δύο επίπεδα τέμνονται και δεν ταυτίζονται, η τομή τους είναι μια ευθεία. Έτσι στην περίπτωση που τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα,

- ❶ εάν τα τρία επίπεδα έχουν μια κοινή ευθεία τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις,
- ❷ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο έχουμε μοναδική λύση.
- ❸ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα δεν έχουν κοινό σημείο τότε δεν έχουμε καμία λύση.

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Εάν τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα τότε το 3×3 -σύστημα δεν έχει λύση. Έχουμε δει στα μαθήματα Λογισμού πολλών μεταβλητών ότι αν δύο επίπεδα τέμνονται και δεν ταυτίζονται, η τομή τους είναι μια ευθεία. Έτσι στην περίπτωση που τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα,

- ❶ εάν τα τρία επίπεδα έχουν μια κοινή ευθεία τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις,
- ❷ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο έχουμε μοναδική λύση.
- ❸ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα δεν έχουν κοινό σημείο τότε δεν έχουμε καμία λύση.

Ένα 3×3 -σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\a_3x + b_3y + c_3z &= d_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Μια εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$ γεωμετρικά είναι η εξίσωση ενός επιπέδου. Έτσι το παραπάνω σύστημα γεωμετρικά μας ρωτάει αν τα τρία επίπεδα έχουν κοινό σημείο.

Εάν τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα τότε το 3×3 -σύστημα δεν έχει λύση. Έχουμε δει στα μαθήματα Λογισμού πολλών μεταβλητών ότι αν δύο επίπεδα τέμνονται και δεν ταυτίζονται, η τομή τους είναι μια ευθεία. Έτσι στην περίπτωση που τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα,

- ❶ εάν τα τρία επίπεδα έχουν μια κοινή ευθεία τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις,
- ❷ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο έχουμε μοναδική λύση.
- ❸ εάν οι ευθείες που τέμνονται τα επίπεδα δεν έχουν κοινό σημείο τότε δεν έχουμε καμία λύση.

Ας παρατηρήσουμε ότι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα με τις ευθείες, το σύστημα έχει **καμία ή μία ή άπειρες** λύσεις.

Παράδειγμα 4. Το σύστημα

$$x + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$x + 2y - z = -1$$

έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 4. Το σύστημα

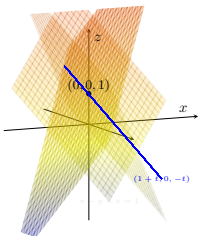
$$x + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$x + 2y - z = -1$$

έχει μοναδική λύση.

Τα δύο πρώτα επίπεδα δεν είναι παράλληλα, άρα τέμνονται σε μια ευθεία. Είναι απλό να δούμε ότι η κοινή τους ευθεία είναι η $(1, 0, 0) + t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.



Σχήμα: Τα τρία επίπεδα του Παραδείγματος 4

Παράδειγμα 4. Το σύστημα

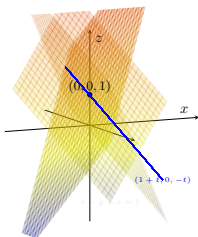
$$x + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$x + 2y - z = -1$$

έχει μοναδική λύση.

Τα δύο πρώτα επίπεδα δεν είναι παράλληλα, άρα τέμνονται σε μια ευθεία. Είναι απλό να δούμε ότι η κοινή τους ευθεία είναι η $(1, 0, 0) + t(1, 0, -1) = (1 + t, 0, -t), t \in \mathbb{R}$.



Σχήμα: Τα τρία επίπεδα του Παραδείγματος 4

Για να δείξουμε ότι το σύστημα έχει μία μόνο λύση θα πρέπει να δείξουμε ότι η ευθεία αυτή και το τρίτο επίπεδο έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Αντικαθιστώντας τα σημεία της ευθείας στην εξίσωση του επιπέδου παίρνουμε

$$(1 + t) + 2 \cdot 0 - (-t) = -1 \Rightarrow 1 + 2t = -1 \Rightarrow t = -1.$$

Άρα έχουμε μοναδικό σημείο τομής, το $(0, 0, 1)$, και επομένως το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

Εάν η τρίτη εξίσωση του συστήματος αλλάξει και από $x + 2y - z = -1$ γίνει $2x + 2z = 2$ τότε το σύστημα

$$x + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$2x + 2z = 2$$

(2)

έχει άπειρες λύσεις.

Εάν η τρίτη εξίσωση του συστήματος αλλάξει και από $x + 2y - z = -1$ γίνει $2x + 2z = 2$ τότε το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + z &= 1 \\2x + 2z &= 2\end{aligned}\tag{2}$$

έχει άπειρες λύσεις.

Όπως είδαμε πριν τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται στην ευθεία $(1 + t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Είναι απλό να ελέγξουμε ότι όλα τα σημεία της ευθείας ικανοποιούν την εξίσωση του τρίτου επιπέδου. Έτσι έχουμε ότι το νέο σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Εάν η τρίτη εξίσωση του συστήματος αλλάξει και από $x + 2y - z = -1$ γίνει $2x + 2z = 2$ τότε το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + z &= 1 \\2x + 2z &= 2\end{aligned}\tag{2}$$

έχει άπειρες λύσεις.

Όπως είδαμε πριν τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται στην ευθεία $(1 + t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Είναι απλό να ελέγξουμε ότι όλα τα σημεία της ευθείας ικανοποιούν την εξίσωση του τρίτου επιπέδου. Έτσι έχουμε ότι το νέο σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Εάν η δεύτερη και τρίτη εξίσωση του συστήματος αλλάξουν σε $2x + 2y + 2z = 2$ και $3x + 3y + 3z = 3$ τότε το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + 2y + 2z &= 2 \\3x + 3y + 3z &= 3\end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις.

Εάν η τρίτη εξίσωση του συστήματος αλλάξει και από $x + 2y - z = -1$ γίνει $2x + 2z = 2$ τότε το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + z &= 1 \\2x + 2z &= 2\end{aligned}\tag{2}$$

έχει άπειρες λύσεις.

Όπως είδαμε πριν τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται στην ευθεία $(1 + t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Είναι απλό να ελέγξουμε ότι όλα τα σημεία της ευθείας ικανοποιούν την εξίσωση του τρίτου επιπέδου. Έτσι έχουμε ότι το νέο σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Εάν η δεύτερη και τρίτη εξίσωση του συστήματος αλλάξουν σε $2x + 2y + 2z = 2$ και $3x + 3y + 3z = 3$ τότε το σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + 2y + 2z &= 2 \\3x + 3y + 3z &= 3\end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις.

Ας παρατηρήσουμε ότι η δεύτερη και τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτουν από την πρώτη εξίσωση πολλαπλασιάζοντάς την με 2 και 3 αντίστοιχα. Έτσι οι λύσεις του συστήματος είναι οι τριάδες που ικανοποιούν την $x + y + z = 1$ που είναι ένα επίπεδο.

Παρότι τα δύο τελευταία συστήματα έχουν και τα δύο άπειρες λύσεις, υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά.

Στο δεύτερο σύστημα οι λύσεις είναι μια ευθεία $\eta (1 + t, 0, -t)$ που είναι ένα σχήμα μιας ελεύθερης μεταβλητής.

Παρότι τα δύο τελευταία συστήματα έχουν και τα δύο άπειρες λύσεις, υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά.

Στο δεύτερο σύστημα οι λύσεις είναι μια ευθεία $\eta (1 + t, 0, -t)$ που είναι ένα σχήμα μιας ελεύθερης μεταβλητής.

Στο τρίτο σύστημα οι λύσεις είναι το επίπεδο $x + y + z = 1$ που είναι ένα σχήμα δύο ελεύθερων μεταβλητών.

Παρότι τα δύο τελευταία συστήματα έχουν και τα δύο άπειρες λύσεις, υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά.

Στο δεύτερο σύστημα οι λύσεις είναι μια ευθεία $\eta (1 + t, 0, -t)$ που είναι ένα σχήμα μιας ελεύθερης μεταβλητής.

Στο τρίτο σύστημα οι λύσεις είναι το επίπεδο $x + y + z = 1$ που είναι ένα σχήμα δύο ελεύθερων μεταβλητών.

Θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια ότι οι λύσεις του πρώτου συστήματος καθορίζονται από μια ελεύθερη μεταβλητή ενώ του δεύτερου καθορίζονται από δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Παρότι τα δύο τελευταία συστήματα έχουν και τα δύο άπειρες λύσεις, υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά.

Στο δεύτερο σύστημα οι λύσεις είναι μια ευθεία $\eta(1+t, 0, -t)$ που είναι ένα σχήμα μιας ελεύθερης μεταβλητής.

Στο τρίτο σύστημα οι λύσεις είναι το επίπεδο $x + y + z = 1$ που είναι ένα σχήμα δύο ελεύθερων μεταβλητών.

Θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια ότι οι λύσεις του πρώτου συστήματος καθορίζονται από μια ελεύθερη μεταβλητή ενώ του δεύτερου καθορίζονται από δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε τις λύσεις του συστήματος χρησιμοποιώντας γεωμετρία. Τι γίνεται όμως να έχουμε ένα 100×100 ή $n \times n$ σύστημα με τον φυσικό αριθμό n πολύ μεγάλο?

Πόσες λύσεις μπορεί να έχει ένα τέτοιο σύστημα?

Μπορεί σ' ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να βρούμε άπειρες λύσεις που να έχουν k -ελεύθερες μεταβλητές? ($k \leq n - 1$)

Εάν έχουμε ένα 3×3 -σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \quad (3)$$

δημιουργούμε τον πίνακα του συστήματος που αποτελείτε από τους συντελεστές των αγνώστων. Ο πίνακας του συστήματος (3) είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

- 1 Η πρώτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου x στις τρεις εξισώσεις,

Εάν έχουμε ένα 3×3 -σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \quad (3)$$

δημιουργούμε τον πίνακα του συστήματος που αποτελείτε από τους συντελεστές των αγνώστων. Ο πίνακας του συστήματος (3) είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

- ❶ Η πρώτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου x στις τρεις εξισώσεις,
- ❷ η δεύτερη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου y στις τρεις εξισώσεις,

Εάν έχουμε ένα 3×3 -σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \quad (3)$$

δημιουργούμε τον πίνακα του συστήματος που αποτελείτε από τους συντελεστές των αγνώστων. Ο πίνακας του συστήματος (3) είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

- ❶ Η πρώτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου x στις τρεις εξισώσεις,
- ❷ η δεύτερη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου y στις τρεις εξισώσεις,
- ❸ και η τρίτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου z στις τρεις εξισώσεις.

Εάν έχουμε ένα 3×3 -σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \quad (3)$$

δημιουργούμε τον πίνακα του συστήματος που αποτελείτε από τους συντελεστές των αγνώστων. Ο πίνακας του συστήματος (3) είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

- ❶ Η πρώτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου x στις τρεις εξισώσεις,
- ❷ η δεύτερη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου y στις τρεις εξισώσεις,
- ❸ και η τρίτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου z στις τρεις εξισώσεις.

Εάν έχουμε ένα 3×3 -σύστημα

$$\begin{array}{rrcr} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \quad (3)$$

δημιουργούμε τον πίνακα του συστήματος που αποτελείται από τους συντελεστές των αγνώστων. Ο πίνακας του συστήματος (3) είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

- 1 Η πρώτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου x στις τρεις εξισώσεις,
- 2 η δεύτερη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου y στις τρεις εξισώσεις,
- 3 και η τρίτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του αγνώστου z στις τρεις εξισώσεις.

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος περιέχει επίσης και τη στήλη των σταθερών και είναι ο

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right]$$

Με βάση τα παραπάνω ο πίνακας $[\mathbb{A} : \mathbb{b}]$ είναι ισοδύναμη γραφή του συστήματος (3).

Δηλαδή ο πίνακας

$$[\mathbb{A} : \mathbb{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{array} \right]$$

είναι μια ισοδύναμη γραφή του συστήματος

$$\begin{array}{rclcl} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & +a_{3,2}x_2 & +a_{3,3}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

Παράδειγμα 5. Ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{aligned}2x \quad \quad - 6z &= -8 \\3x + 6y - 2z &= -4 \\y + 2z &= 3\end{aligned}\tag{4}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5. Ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{aligned}2x \quad \quad - 6z &= -8 \\3x + 6y - 2z &= -4 \\y + 2z &= 3\end{aligned}\tag{4}$$

είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Πίνακας του συστήματος

Εάν έχουμε το $m \times n$ σύστημα

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & + \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & + \dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & + \dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

τότε τοποθετώντας τους συντελεστές της κάθε μεταβλητής σε στήλη, και τοποθετώντας την κάθε στήλη δίπλα στην άλλη δημιουργούμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

που ονομάζεται πίνακας (ή μήτρα) του συστήματος. Ο πίνακας που προκύπτει τοποθετώντας μετά την στήλη της τελευταίας μεταβλητής την στήλη που περιέχει τους σταθερούς αριθμούς $b_1, \dots, b_n$, δηλαδή ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

ονομάζεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος

Ας παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

έχει n —στήλες, δηλαδή το πλήθος των στηλών είναι ίσο με τον αριθμό των αγνώστων,
και έχει m —γραμμές, δηλαδή το πλήθος των γραμμών είναι ίσο με το πλήθος των εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l,1} & a_{l,2} & \cdots & a_{l,k} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Ο αριθμός $a_{l,k}$ είναι ο συντελεστής του k -αγνώστου στην l -εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} a_{1,1}x & +a_{1,2}y & +a_{1,3}z & = & b_1 \\ & a_{2,2}y & +a_{2,3}z & = & b_2 \\ & & a_{3,3}z & = & b_3. \end{array} \quad (5)$$

και $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \neq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} a_{1,1}x & +a_{1,2}y & +a_{1,3}z & = & b_1 \\ & a_{2,2}y & +a_{2,3}z & = & b_2 \\ & & a_{3,3}z & = & b_3. \end{array} \tag{5}$$

και $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \neq 0$.

Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα. Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε ότι $z = b_3/a_{3,3}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} a_{1,1}x & +a_{1,2}y & +a_{1,3}z & = & b_1 \\ & a_{2,2}y & +a_{2,3}z & = & b_2 \\ & & a_{3,3}z & = & b_3. \end{array} \quad (5)$$

και $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \neq 0$.

Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα. Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε ότι $z = b_3/a_{3,3}$.

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$a_{2,2}y + a_{2,3} \frac{b_3}{a_{3,3}} = b_2 \Rightarrow y = \frac{1}{a_{2,2}} \left(b_2 - a_{2,3} \frac{b_3}{a_{3,3}} \right) = \frac{b_2 a_{3,3} - a_{2,3} b_3}{a_{2,2} a_{3,3}}.$$

Τέλος αντικαθιστώντας τα y, z στην πρώτη εξίσωση και λύνοντας ως προς x παίρνουμε

$$x = \frac{1}{a_{1,1}} (b_1 - a_{1,2}y - a_{1,3}z) = \frac{1}{a_{1,1}} \left(b_1 - a_{1,2} \frac{b_2 a_{3,3} - a_{2,3} b_3}{a_{2,2} a_{3,3}} - a_{1,3} \frac{b_3}{a_{3,3}} \right).$$

Παράδειγμα 6. Να λυθεί το σύστημα

$$x + y + 2z = 1$$

$$2y + 3z = 7$$

$$4z = 12.$$

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $z = 12/4 = 3$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$2y + 3 \cdot 3 = 7 \Rightarrow y = \frac{7 - 9}{2} = -1.$$

Παράδειγμα 6. Να λυθεί το σύστημα

$$x + y + 2z = 1$$

$$2y + 3z = 7$$

$$4z = 12.$$

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $z = 12/4 = 3$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$2y + 3 \cdot 3 = 7 \Rightarrow y = \frac{7 - 9}{2} = -1.$$

Τέλος θέτοντας $y = -1, z = 3$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$x - 1 + 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow x = 2 - 6 = -4.$$

Το ίδιο εύκολα λύνεται και ένα 3×3 σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x & + & a_{2,2}y & = & b_2 \\ a_{3,1}x & + & a_{3,2}y & + & a_{3,3}z = b_3. \end{array} \quad a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3} \neq 0. \quad (6)$$

Η πρώτη εξίσωση μας δίνει το $x = b_1/a_{11}$. Αντικαθιστώντας το x στην δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε το y και τέλος βάζοντας τα x, y που βρήκαμε στην τρίτη εξίσωση βρίσκουμε το z .

Ορισμός 7. Ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

ονομάζεται *άνω τριγωνικό*. Εάν όλοι οι συντελεστές $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ είναι διάφοροι του μηδέν τότε το σύστημα λύνεται εύκολα, όπως και το 3×3 που είδαμε πριν, και έχει μοναδική λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών ώστε να μετατρέψουμε το σύστημα σε άνω τριγωνικό. Οι πράξεις που θα κάνουμε θα μετατρέψουν τον πίνακα του συστήματος σε πίνακα που αντιστοιχεί σε άνω τριγωνικό.

Ορισμός 8. Στοιχειώδης πράξη γραμμών σ' ένα $m \times n$ πίνακα A είναι μια από τις τρεις ακόλουθες πράξεις

- ❶ πολλαπλασιασμός της i -γραμμής $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ με τον αριθμό $\lambda \neq 0$ και αντικατάσταση αυτής με την $(\lambda a_{i,1}, \lambda a_{i,2}, \dots, \lambda a_{i,n})$,
- ❷ (αντικατάσταση) αντικατάσταση μιας γραμμής από τη διαφορά του εαυτού της και ενός ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής,
- ❸ εναλλαγή δύο γραμμών του πίνακα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ των γραμμών ώστε να μετατρέψουμε το σύστημα σε άνω τριγωνικό. Οι πράξεις που θα κάνουμε θα μετατρέψουν τον πίνακα του συστήματος σε πίνακα που αντιστοιχεί σε άνω τριγωνικό.

Ορισμός 8. Στοιχειώδης πράξη γραμμών σ' ένα $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$ είναι μια από τις τρεις ακόλουθες πράξεις

- ❶ πολλαπλασιασμός της i -γραμμής $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ με τον αριθμό $\lambda \neq 0$ και αντικατάσταση αυτής με την $(\lambda a_{i,1}, \lambda a_{i,2}, \dots, \lambda a_{i,n})$,
- ❷ (αντικατάσταση) αντικατάσταση μιας γραμμής από τη διαφορά του εαυτού της και ενός ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής,
- ❸ εναλλαγή δύο γραμμών του πίνακα.

Ας δούμε πιο αναλυτικά την πράξη της αντικατάστασης.

Εάν έχουμε την i -γραμμή $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ και την j -γραμμή $(a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n})$ όταν λέμε ότι θα αφαιρούμε από την i -γραμμή την j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , εννοούμε ότι θα αντικαθιστάμε την i -γραμμή με την γραμμή

$$(a_{i,1} - \lambda a_{j,1}, a_{i,2} - \lambda a_{j,2}, \dots, a_{i,n} - \lambda a_{j,n})$$

Ορισμός 9. Δύο γραμμικά συστήματα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ λέμε ότι είναι γραμμικά ισοδύναμα εάν ο επαυξημένος πίνακας του ενός συστήματος προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα του άλλου συστήματος με πεπερασμένο το πλήθος στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Ορισμός 9. Δύο γραμμικά συστήματα $Ax = b$, $Cx = d$ λέμε ότι είναι γραμμικά ισοδύναμα εάν ο επαυξημένος πίνακας του ενός συστήματος προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα του άλλου συστήματος με πεπερασμένο το πλήθος στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Εάν δύο γραμμικά συστήματα είναι γραμμικά ισοδύναμα τότε έχουν τις ίδιες λύσεις.

Έτσι ένα σύστημα θα προσπαθήσουμε να το μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό και να βρούμε τις λύσεις του. Αυτή η μέθοδος λύσης οφείλεται στον C.F. Gauss και ονομάζεται μέθοδος απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 10. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}2x - 6z &= -8 \\ 3x + 6y - 2z &= -4 \\ y + 2z &= 3\end{aligned}$$

Η ιδέα είναι να μετατρέψουμε το σύστημα σε ισοδύναμο σύστημα που είναι άνω τριγωνικό.

Σ' ένα άνω τριγωνικό (3×3) -σύστημα οι συντελεστές του x στη δεύτερη και τρίτη γραμμή είναι μηδέν. Επίσης ο συντελεστής του y στη τρίτη γραμμή είναι μηδέν.

Έτσι αρχικά θα προσπαθήσουμε με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών να μηδενίσουμε τους συντελεστές του x στη δεύτερη και τρίτη γραμμή.

Παράδειγμα 10. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}2x & - 6z = -8 \\3x + 6y - 2z & = -4 \\y + 2z & = 3\end{aligned}$$

Η ιδέα είναι να μετατρέψουμε το σύστημα σε ισοδύναμο σύστημα που είναι άνω τριγωνικό.

Σ' ένα άνω τριγωνικό (3×3) -σύστημα οι συντελεστές του x στη δεύτερη και τρίτη γραμμή είναι μηδέν. Επίσης ο συντελεστής του y στη τρίτη γραμμή είναι μηδέν.

Έτσι αρχικά θα προσπαθήσουμε με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών να μηδενίσουμε τους συντελεστές του x στη δεύτερη και τρίτη γραμμή.

Για το λόγο αυτό παίρνουμε τον αριθμό

$$\lambda_{2,1} = \frac{\text{συντελεστής } x \text{ στη δεύτερη γραμμή}}{\text{συντελεστή } x \text{ στην πρώτη γραμμή}} = \frac{3}{2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με τον αριθμό $\lambda_{2,1}$ και την αφαιρούμε από τη δεύτερη. Τότε το σύστημα μετατρέπεται στο

$$\begin{aligned}2x & - 6z = -8 & 2x & - 3z = -8 \\3x + 6y - 2z & = -4 \Rightarrow & 6y + 7z & = 8 \\y + 2z & = 3 & y + 2z & = 3\end{aligned}$$

Επειδή ο συντελεστής του x στην τρίτη γραμμή είναι μηδέν τελειώσαμε με τους συντελεστές του x .

Στη συνέχεια για να κάνουμε τον συντελεστή του y στην τρίτη γραμμή ίσο με μηδέν παίρνουμε το αριθμό

$$\lambda_{3,2} = \frac{\text{συντελεστής } y \text{ στην τρίτη γραμμή}}{\text{συντελεστή } y \text{ στην δεύτερη γραμμή}} = \frac{1}{6}.$$

Αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή την δεύτερη γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,2} = 1/6$. Τότε το σύστημα μετατρέπεται στον

$$\begin{array}{rcl} 2x & - & 6z = -8 \\ 6y + 7z = 8 & \Rightarrow & 6y + 7z = 8 \\ y + 2z = 3 & & (5/6)z = 10/6 \end{array}.$$

Έτσι μετατρέψαμε το σύστημα σε άνω τριγωνικό. Η λύση του παραπάνω τριγωνικού συστήματος είναι

$$z = 2, \quad y = \frac{1}{6}(8 - 7 \cdot 2) = -1 \quad \text{και} \quad x = \frac{1}{2}(-8 + 6 \cdot 2) = 2.$$

Ας δούμε πως μεταβάλλεται ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος με την εφαρμογή των στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \leftarrow 2\text{η γραμμή} - \frac{3}{2} \cdot (1\text{η γραμμή}) \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 5/6 & 10/6 \end{array} \right] \leftarrow 3\text{η γραμμή} - \frac{1}{6} \cdot (2\text{η γραμμή}) \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι στην μετατροπή του συστήματος σε άνω τριγωνικό δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά τους αγνώστους x, y, z αλλά μόνο τους συντελεστές αυτών. Έτσι χρησιμοποιώντας τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος μπορούμε να εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών πάνω στον πίνακα του συστήματος και να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Η αναγωγή ενός $m \times n$ συστήματος σε άνω τριγωνικό μετατρέπει τον πίνακα και τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ειδική μορφή.

Ορισμός 11. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.

Η αναγωγή ενός $m \times n$ συστήματος σε άνω τριγωνικό μετατρέπει τον πίνακα και τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ειδική μορφή.

Ορισμός 11. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.

Η αναγωγή ενός $m \times n$ συστήματος σε άνω τριγωνικό μετατρέπει τον πίνακα και τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ειδική μορφή.

Ορισμός 11. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.
- 3. σε μια γραμμή που δεν είναι όλα τα στοιχεία μηδέν, αν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι στη στήλη k , τότε τα στοιχεία της k -στήλης στις επόμενες γραμμές είναι μηδέν.

Η αναγωγή ενός $m \times n$ συστήματος σε άνω τριγωνικό μετατρέπει τον πίνακα και τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ειδική μορφή.

Ορισμός 11. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.
- 3. σε μια γραμμή που δεν είναι όλα τα στοιχεία μηδέν, αν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι στη στήλη k , τότε τα στοιχεία της k -στήλης στις επόμενες γραμμές είναι μηδέν.

Η αναγωγή ενός $m \times n$ συστήματος σε άνω τριγωνικό μετατρέπει τον πίνακα και τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ειδική μορφή.

Ορισμός 11. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.
- 3. σε μια γραμμή που δεν είναι όλα τα στοιχεία μηδέν, αν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι στη στήλη k , τότε τα στοιχεία της k -στήλης στις επόμενες γραμμές είναι μηδέν.

Εάν ο πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής που δεν είναι μηδενική, ονομάζεται *οδηγός* της γραμμής. Επίσης μια στήλη την ονομάζουμε *οδηγό στήλη* εάν περιέχει ένα στοιχείο που είναι οδηγός.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα
- 5) εάν μια στήλη περιέχει οδηγό ίσο με τη μονάδα, τότε ο οδηγός είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα
- 5) εάν μια στήλη περιέχει οδηγό ίσο με τη μονάδα, τότε ο οδηγός είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα
- 5) εάν μια στήλη περιέχει οδηγό ίσο με τη μονάδα, τότε ο οδηγός είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης.

τότε λέμε ότι ο πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Παραδείγματα 12. Οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Στον πρώτο πίνακα οι οδηγοί είναι ο αριθμός 1 για την πρώτη γραμμή,

ο αριθμός -4 για τη δεύτερη γραμμή

και ο αριθμός -2 για την τρίτη γραμμή.

Οι στήλες οδηγοί είναι οι 1η,3η,4η.

Παραδείγματα 12. Οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Στον πρώτο πίνακα οι οδηγοί είναι ο αριθμός 1 για την πρώτη γραμμή, ο αριθμός -4 για τη δεύτερη γραμμή και ο αριθμός -2 για την τρίτη γραμμή. Οι στήλες οδηγοί είναι οι 1η, 3η, 4η.

Στο δεύτερο πίνακα οι οδηγοί είναι ο αριθμός 1 για την πρώτη γραμμή, ο αριθμός -4 για τη δεύτερη γραμμή, ο αριθμός -7 για την τρίτη γραμμή. Οι στήλες οδηγοί είναι οι 1η, 4η, 5η.

Παραδείγματα 12. Οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Στον πρώτο πίνακα οι οδηγοί είναι ο αριθμός 1 για την πρώτη γραμμή, ο αριθμός -4 για τη δεύτερη γραμμή και ο αριθμός -2 για την τρίτη γραμμή. Οι στήλες οδηγοί είναι οι 1η,3η,4η.

Στο δεύτερο πίνακα οι οδηγοί είναι ο αριθμός 1 για την πρώτη γραμμή, ο αριθμός -4 για τη δεύτερη γραμμή, ο αριθμός -7 για την τρίτη γραμμή. Οι στήλες οδηγοί είναι οι 1η,4η,5η.

Στον τρίτο πίνακα οι οδηγοί είναι ο αριθμός 1 για την πρώτη γραμμή, ο αριθμός -4 για τη δεύτερη γραμμή, ο αριθμός -1 για την τρίτη γραμμή και ο αριθμός -9 για την τέταρτη γραμμή. Οι στήλες οδηγοί είναι οι 1η,2η,5η,6η.

Παραδείγματα 13. Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 10 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -21 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Ο πρώτος διότι η 2η-γγραμμή είναι μηδενική ενώ οι 3η και 4η δεν είναι,

Παραδείγματα 13. Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 10 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -21 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Ο πρώτος διότι η 2η-γραμμή είναι μηδενική ενώ οι 3η και 4η δεν είναι, ο δεύτερος και τρίτος διότι στην πρώτη στήλη έχουν μη-μηδενικά στοιχεία κάτω από τον πρώτο οδηγό.

Έχει κάθε πίνακας μοναδική κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή?

Παράδειγμα 14. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα πίνακα με δύο διαφορετικές μορφές του κλιμακωτού πίνακα.

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με 2

$$\text{παίρνουμε τον πίνακα } \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Έχει κάθε πίνακας μοναδική κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή?

Παράδειγμα 14. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα πίνακα με δύο διαφορετικές μορφές του κλιμακωτού πίνακα.

$$\text{Εάν } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με 2

$$\text{παίρνουμε τον πίνακα } \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Εάν τώρα αρχικά πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη γραμμή με $1/2$ και στη συνέχεια αφαιρέσουμε από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Είδαμε στο Παράδειγμα 14 ότι ένας πίνακας μπορεί να είναι γραμμικά ισοδύναμος με διαφορετικούς κλιμακωτούς πίνακες. Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι ένας πίνακας είναι γραμμικά ισοδύναμος μ'ένα μοναδικό κλιμακωτό πίνακα σε ανηγμένη μορφή.

Θεώρημα 15. Κάθε πίνακας είναι γραμμικά ισοδύναμος με ένα και μόνο ένα ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Παράδειγμα 16. Ας δούμε την κλιμακωτή και ανηγμένη μορφή ενός πίνακα. Εάν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

τότε η κλιμακωτή μορφή του $\mathbb{A}$ είναι ο πίνακας

$$\mathbb{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $\mathbb{A}$ είναι η

$$\mathbb{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.
- 2ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, 3, \dots, m$. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} = \frac{\text{συντελεστής της 1-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{1 - \text{οδηγός}},$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

αφαιρούμε από την k -γραμμή την 1-γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,1}$

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.
- 2ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, 3, \dots, m$. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} = \frac{\text{συντελεστής της 1-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{1 - \text{οδηγός}},$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

αφαιρούμε από την k -γραμμή την 1-γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,1}$

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.
- 2ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, 3, \dots, m$. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} = \frac{\text{συντελεστής της 1-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{1 - \text{οδηγός}},$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

αφαιρούμε από την k -γραμμή την 1-γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,1}$

Έτσι παράγουμε ένα καινούργιο πίνακα $\mathbb{A}_1$ που είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον αρχικό πίνακα $\mathbb{A}$.

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.
- 3ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της j_{i+1} -στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,i+1} = \frac{a_{k,j_{i+1}}}{a_{i+1,j_{i+1}}} = \frac{\text{συντελεστής της } j_{i+1}\text{-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{(i+1)\text{-οδηγός}},$$

$k = i+2, i+3, \dots, m$, αφαιρούμε από την k -γραμμή την $(i+1)$ -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,i+1}$

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.
- 3ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της j_{i+1} -στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,i+1} = \frac{a_{k,j_{i+1}}}{a_{i+1,j_{i+1}}} = \frac{\text{συντελεστής της } j_{i+1}\text{-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{(i+1)\text{-οδηγός}},$$

$k = i+2, i+3, \dots, m$, αφαιρούμε από την k -γραμμή την $(i+1)$ -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,i+1}$

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.
- 3ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της j_{i+1} -στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,i+1} = \frac{a_{k,j_{i+1}}}{a_{i+1,j_{i+1}}} = \frac{\text{συντελεστής της } j_{i+1}\text{-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{(i+1)\text{-οδηγός}},$$

$k = i+2, i+3, \dots, m$, αφαιρούμε από την k -γραμμή την $(i+1)$ -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,i+1}$

Συνεχίζουμε έως ότου δεν υπάρχουν μη-μηδενικές γραμμές για τροποποίηση.

Παράδειγμα 17. Να μετατραπεί ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases} \quad \text{σε κλιμακωτή μορφή.}$$

Παράδειγμα 17. Να μετατραπεί ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases} \quad \text{σε κλιμακωτή μορφή.}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$.

Παράδειγμα 17. Να μετατραπεί ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases} \text{ σε κλιμακωτή μορφή.}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$.

Ψάχνουμε την πρώτη στήλη οδηγό και τον πρώτο οδηγό. Η πρώτη μη-μηδενική στήλη είναι η πρώτη. Επειδή το πρώτο στοιχείο της είναι μηδέν θα κάνουμε εναλλαγή γραμμών με τη δεύτερη γραμμή ώστε ο πρώτος οδηγός να εμφανισθεί στην πρώτη γραμμή.

Παράδειγμα 17. Να μετατραπεί ο πίνακας του συστήματος

$$\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases} \text{ σε κλιμακωτή μορφή.}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$.

Ψάχνουμε την πρώτη στήλη οδηγό και τον πρώτο οδηγό. Η πρώτη μη-μηδενική στήλη είναι η πρώτη. Επειδή το πρώτο στοιχείο της είναι μηδέν θα κάνουμε εναλλαγή γραμμών με τη δεύτερη γραμμή ώστε ο πρώτος οδηγός να εμφανισθεί στην πρώτη γραμμή. Έτσι ο πίνακας συστήματος μετατρέπεται στον

$$\mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

Παρατήρηση 18. Η μετατροπή του πίνακα $\mathbb{A}$ στον $\mathbb{A}_1$ είναι ισοδύναμη με το να εναλλάξουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος με τη δεύτερη.

Ο πρώτος οδηγός για τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

είναι ο αριθμός 3. Παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = \frac{0}{3} = 0$ και $\lambda_{3,1} = \frac{3}{3} = 1$. Επειδή $\lambda_{2,1} = 0$ ή ισοδύναμα ο συντελεστής του x_1 στην δεύτερη γραμμή είναι μηδέν δεν αλλάζουμε τη δεύτερη γραμμή.

Ο πρώτος οδηγός για τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

είναι ο αριθμός 3. Παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = \frac{0}{3} = 0$ και $\lambda_{3,1} = \frac{3}{3} = 1$. Επειδή $\lambda_{2,1} = 0$ ή ισοδύναμα ο συντελεστής του x_1 στην δεύτερη γραμμή είναι μηδέν δεν αλλάζουμε τη δεύτερη γραμμή. Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 1$ ο πίνακας μετατρέπεται

$$\mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

Ο πρώτος οδηγός για τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

είναι ο αριθμός 3. Παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = \frac{0}{3} = 0$ και $\lambda_{3,1} = \frac{3}{3} = 1$. Επειδή $\lambda_{2,1} = 0$ ή ισοδύναμα ο συντελεστής του x_1 στην δεύτερη γραμμή είναι μηδέν δεν αλλάζουμε τη δεύτερη γραμμή. Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 1$ ο πίνακας μετατρέπεται

$$\mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

Θέλουμε να βρούμε τώρα την 2η στήλη οδηγό και τον δεύτερο οδηγό.

Ο πρώτος οδηγός για τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

είναι ο αριθμός 3. Παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = \frac{0}{3} = 0$ και $\lambda_{3,1} = \frac{3}{3} = 1$. Επειδή $\lambda_{2,1} = 0$ ή ισοδύναμα ο συντελεστής του x_1 στην δεύτερη γραμμή είναι μηδέν δεν αλλάζουμε τη δεύτερη γραμμή. Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 1$ ο πίνακας μετατρέπεται

$$\mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

Θέλουμε να βρούμε τώρα την 2η στήλη οδηγό και τον δεύτερο οδηγό. Η πρώτη μη-μηδενική στήλη μετά την πρώτη είναι η δεύτερη και έχει το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της στη δεύτερη γραμμή.

Ο πρώτος οδηγός για τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right]$$

είναι ο αριθμός 3. Παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = \frac{0}{3} = 0$ και $\lambda_{3,1} = \frac{3}{3} = 1$. Επειδή $\lambda_{2,1} = 0$ ή ισοδύναμα ο συντελεστής του x_1 στην δεύτερη γραμμή είναι μηδέν δεν αλλάζουμε τη δεύτερη γραμμή. Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 1$ ο πίνακας μετατρέπεται

$$\mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -9 & 6 & 15 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

Θέλουμε να βρούμε τώρα την 2η στήλη οδηγό και τον δεύτερο οδηγό. Η πρώτη μη-μηδενική στήλη μετά την πρώτη είναι η δεύτερη και έχει το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της στη δεύτερη γραμμή. Επομένως η 2η στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 3.

Παίρνουμε τον αριθμό

$$\lambda_{3,2} = \frac{\text{συντελεστής 2ης μεταβλητής στην 3η-γραμμή}}{2\text{ος-οδηγός}} = \frac{-2}{3}.$$

Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,2} = \frac{2}{3}$ ο πίνακας $\mathbb{A}_2$ μετατρέπεται σε

$$\mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{28}{3} \end{array} \right].$$

Για να λύσουμε το αρχικό σύστημα αρκεί να λύσουμε το σύστημα που προκύπτει από τον κλιμακωτό πίνακα που έχουμε παράγει.

Στο παράδειγμα αυτό το σύστημα έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο

$$\begin{aligned}3x_1 - 7x_2 + 8x_3 &= 9 \\3x_2 + 4x_3 &= 5 \quad . \\ \frac{2}{3}x_3 &= \frac{28}{3}\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_3 = 14$, $x_2 = \frac{1}{3}(5 - 4 \cdot 14) = -17$ και $x_1 = \frac{1}{3}(9 + 7(-17) - 8 \cdot 14) = -74$.

Παράδειγμα 19. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1. \\ 2x + 2z = 2 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό το είδαμε προηγουμένως στο Παράδειγμα 4 και βρήκαμε ότι οι λύσεις του είναι η ευθεία $(1 - t, 0, t)$. Ας δούμε πως βρίσκουμε τις λύσεις με αλγεβρικό τρόπο.

Παράδειγμα 19. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1. \\ 2x + 2z = 2 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό το είδαμε προηγουμένως στο Παράδειγμα 4 και βρήκαμε ότι οι λύσεις του είναι η ευθεία $(1 - t, 0, t)$. Ας δούμε πως βρίσκουμε τις λύσεις με αλγεβρικό τρόπο.

Αρχικά θα μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$.

Παράδειγμα 19. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1. \\ 2x + 2z = 2 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό το είδαμε προηγουμένως στο Παράδειγμα 4 και βρήκαμε ότι οι λύσεις του είναι η ευθεία $(1 - t, 0, t)$. Ας δούμε πως βρίσκουμε τις λύσεις με αλγεβρικό τρόπο.

Αρχικά θα μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$.

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 στην πρώτη στήλη. Αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{2,1} = 1$ και από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 2$ ο επαυξημένος πίνακας μετατρέπεται

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 . Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,2} = \frac{-2}{-2} = 1$ το σύστημα μετατρέπεται στο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 . Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,2} = \frac{-2}{-2} = 1$ το σύστημα μετατρέπεται στο

$$\mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 . Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,2} = \frac{-2}{-2} = 1$ το σύστημα μετατρέπεται στο

$$\mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει τρίτη στήλη οδηγός.

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 . Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή την δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,2} = \frac{-2}{-2} = 1$ το σύστημα μετατρέπεται στο

$$\mathbb{A}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει τρίτη στήλη οδηγός.

Ορισμός 20. Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες οδηγούς ονομάζονται **βασικές μεταβλητές** και οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες που δεν είναι οδηγοί ονομάζονται **ελεύθερες μεταβλητές**.

Ο πίνακας A_3 είναι ισοδύναμος με το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y + 0z = 0. \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Η μεταβλητή z είναι ελεύθερη μεταβλητή, εφόσον η τρίτη στήλη δεν περιέχει οδηγό. Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}, z \text{ είναι ελεύθερη.}$$

Έτσι έχουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή της ελεύθερης μεταβλητής z έχουμε μια λύση του συστήματος και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Το σύνολο των λύσεων είναι οι τριάδες $(1 - z, 0, z)$ και λύση είναι σε παραμετρική μορφή, με παράμετρο την ελεύθερη μεταβλητή.

Ο πίνακας A_3 είναι ισοδύναμος με το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y + 0z = 0. \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Η μεταβλητή z είναι ελεύθερη μεταβλητή, εφόσον η τρίτη στήλη δεν περιέχει οδηγό. Λύνοντας ως προς τις βασικές μεταβλητές έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}, z \text{ είναι ελεύθερη.}$$

Έτσι έχουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή της ελεύθερης μεταβλητής z έχουμε μια λύση του συστήματος και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Το σύνολο των λύσεων είναι οι τριάδες $(1 - z, 0, z)$ και λύση είναι σε παραμετρική μορφή, με παράμετρο την ελεύθερη μεταβλητή.

Λύνοντας ένα σύστημα θα βρείτε είτε δεν υπάρχει λύση, είτε έχει μια λύση είτε μια παραμετρική περιγραφή της λύσης. Εάν το σύστημα έχει παραμετρικές λύσεις οι παράμετροι που περιγράφουν τις λύσεις είναι οι ελεύθερες μεταβλητές.

Παράδειγμα 21. Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & -2 & 6 \end{array} \right].$$

Είναι άμεσο ότι ο πρώτος οδηγός είναι ο 1. Αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{2,1} = 3/1 = 3$ ο πίνακας μετατρέπεται

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & -2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \end{array} \right].$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η 3η στήλη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -5 . Επειδή δεν υπάρχει τρίτη γραμμή τελειώσαμε.
Έτσι έχουμε ότι βασικές μεταβλητές είναι η 1η και η 3η, ενώ η δεύτερη και η τέταρτη είναι ελεύθερες.

Ο πίνακας A_1 είναι ισοδύναμος με το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 7 \\ -5x_3 - 5x_4 &= -15\end{aligned}$$

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος μεταφέρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές στο δεύτερο μέρος των εξισώσεων.

Ο πίνακας A_1 είναι ισοδύναμος με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 7 \\ -5x_3 - 5x_4 &= -15 \end{aligned}.$$

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος μεταφέρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές στο δεύτερο μέρος των εξισώσεων. Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_2 και x_4 . Πηγαίνοντας της στο δεξιό μέρος των εξισώσεων το σύστημα γράφεται ως

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= 7 - 3x_2 - x_4 \\ -5x_3 &= -15 + 5x_4 \end{aligned}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και άρα έχει λύση. Το σύστημα αυτό έχει λύση

$$x_3 = 3 - x_4, \quad x_1 = 7 - 3x_2 - x_4 - 4(3 - x_4) = -5 - 3x_2 + 3x_4.$$

Έτσι για οποιαδήποτε τιμή των ελεύθερων μεταβλητών x_2, x_4 παίρνουμε μια λύση του συστήματος.

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε συστήματα που είναι συμβατά. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα που η αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα θα μας δείξει ότι δεν υπάρχει λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 22. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4. \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε συστήματα που είναι συμβατά. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα που η αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα θα μας δείξει ότι δεν υπάρχει λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 22. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4. \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 στην πρώτη στήλη. Αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{2,1} = 3/1 = 3$ και από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 2/1 = 2$ ο πίνακας μετατρέπεται στον

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right].$$

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε συστήματα που είναι συμβατά. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα που η αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα θα μας δείξει ότι δεν υπάρχει λύση του συστήματος.

Παράδειγμα 22. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4. \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 στην πρώτη στήλη. Αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{2,1} = 3/1 = 3$ και από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{3,1} = 2/1 = 2$ ο πίνακας μετατρέπεται στον

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \mathbb{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right].$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η τρίτη γραμμή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $0x + 0y + 0z = 4$ που είναι αδύνατη. Έτσι έχουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση.

Στα παραπάνω παραδείγματα είδαμε ότι η μορφή του κλιμακωτού επαυξημένου πίνακα μας δείχνει αν το σύστημα είναι συμβατό ή όχι. Εάν περιέχει μια γραμμή της μορφής $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ b]$, $b \neq 0$ ή ισοδύναμα μια εξίσωση της μορφής $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, τότε δεν είναι συμβατό. Εάν δεν περιέχει μια τέτοια γραμμή τότε έχει λύση και η λύση είναι μοναδική εάν δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές, ενώ έχει άπειρες λύσεις εάν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.

Στα παραπάνω παραδείγματα είδαμε ότι η μορφή του κλιμακωτού επαυξημένου πίνακα μας δείχνει αν το σύστημα είναι συμβατό ή όχι. Εάν περιέχει μια γραμμή της μορφής $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b]$, $b \neq 0$ ή ισοδύναμα μια εξίσωση της μορφής $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, τότε δεν είναι συμβατό. Εάν δεν περιέχει μια τέτοια γραμμή τότε έχει λύση και η λύση είναι μοναδική εάν δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές, ενώ έχει άπειρες λύσεις εάν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές. Αυτό ισχύει γενικότερα όπως μας δείχνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 23. Ένα γραμμικό σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβατό αν και μόνο αν η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα δεν περιέχει γραμμή της μορφής

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b], \quad b \neq 0.$$

Εάν το σύστημα είναι συμβατό τότε

- α) έχει μοναδική λύση εάν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές,
- β) έχει άπειρες λύσεις εάν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.