

Ορισμός 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας τότε ανάστροφος του $\mathbb{A}$ είναι ο $n \times m$ πίνακας $\mathbb{A}^\top$ που προκύπτει από τον πίνακα $\mathbb{A}$ κάνοντας τις γραμμές του $\mathbb{A}$ στήλες του $\mathbb{A}^\top$.

Ορισμός 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας τότε ανάστροφος του $\mathbb{A}$ είναι ο $n \times m$ πίνακας $\mathbb{A}^\top$ που προκύπτει από τον πίνακα $\mathbb{A}$ κάνοντας τις γραμμές του $\mathbb{A}$ στήλες του $\mathbb{A}^\top$.

Αναλυτικά εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i=1}^{n,m}$ τότε $\mathbb{A}^\top = (b_{i,j})_{i=1}^{n,m}$ όπου $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Ορισμός 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας τότε ανάστροφος του $\mathbb{A}$ είναι ο $n \times m$ πίνακας $\mathbb{A}^\top$ που προκύπτει από τον πίνακα $\mathbb{A}$ κάνοντας τις γραμμές του $\mathbb{A}$ στήλες του $\mathbb{A}^\top$.

Αναλυτικά εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i=1}^{n,m}$ τότε $\mathbb{A}^\top = (b_{i,j})_{i=1}^{n,m}$ όπου $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Έτσι αν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{1,2} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^\top = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{i,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{i,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{m,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{i,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 1. Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας τότε ανάστροφος του $\mathbb{A}$ είναι ο $n \times m$ πίνακας $\mathbb{A}^\top$ που προκύπτει από τον πίνακα $\mathbb{A}$ κάνοντας τις γραμμές του $\mathbb{A}$ στήλες του $\mathbb{A}^\top$.

Αναλυτικά εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i=1}^{n,m}$ τότε $\mathbb{A}^\top = (b_{i,j})_{i=1}^{n,m}$ όπου $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Έτσι αν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{1,2} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^\top = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{i,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{i,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i} & a_{2,i} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{m,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{i,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ τότε $\mathbb{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Από τον ορισμό έχουμε ότι αν $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ τότε $A^\top = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m]$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι αν $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ τότε $A^\top = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m]$.

Ορισμός 3. Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται συμμετρικός εάν $A = A^\top$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι αν $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ τότε $A^\top = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m]$.

Ορισμός 3. Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται συμμετρικός εάν $A = A^\top$.

Παράδειγμα 4. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός διότι

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}.$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}.$

2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top.$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$(i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top = \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned} (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top \\ &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \end{aligned}$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned}
 (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top \\
 &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \\
 &= \text{γινόμενο } j\text{-γραμμή } \mathbb{A} \text{ επί } i\text{-στήλη } \mathbb{B}
 \end{aligned}$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned}
 (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top \\
 &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \\
 &= \text{γινόμενο } j\text{-γραμμή } \mathbb{A} \text{ επί } i\text{-στήλη } \mathbb{B} \\
 &= (j, i)\text{-στοιχείο του } \mathbb{A}\mathbb{B} \\
 &= (i, j)\text{-στοιχείο του } (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top.
 \end{aligned}$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned}
 (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top \\
 &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \\
 &= \text{γινόμενο } j\text{-γραμμή } \mathbb{A} \text{ επί } i\text{-στήλη } \mathbb{B} \\
 &= (j, i)\text{-στοιχείο του } \mathbb{A}\mathbb{B} \\
 &= (i, j)\text{-στοιχείο του } (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top.
 \end{aligned}$$

Για την 5)

$$(\mathbb{A}^{-1})^\top \mathbb{A}^\top = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})^\top \quad \text{από 3)}$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned}
 (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλης } \mathbb{A}^\top \\
 &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \\
 &= \text{γινόμενο } j\text{-γραμμής } \mathbb{A} \text{ επί } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \\
 &= (j, i)\text{-στοιχείο του } \mathbb{A}\mathbb{B} \\
 &= (i, j)\text{-στοιχείο του } (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top.
 \end{aligned}$$

Για την 5)

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A}^{-1})^\top \mathbb{A}^\top &= (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})^\top \quad \text{από 3)} \\
 &= \mathbb{I}_n^\top = \mathbb{I}_n.
 \end{aligned}$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned}
 (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top \\
 &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \\
 &= \text{γινόμενο } j\text{-γραμμή } \mathbb{A} \text{ επί } i\text{-στήλη } \mathbb{B} \\
 &= (j, i)\text{-στοιχείο του } \mathbb{A}\mathbb{B} \\
 &= (i, j)\text{-στοιχείο του } (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top.
 \end{aligned}$$

Για την 5)

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A}^{-1})^\top \mathbb{A}^\top &= (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})^\top \quad \text{από 3)} \\
 &= \mathbb{I}_n^\top = \mathbb{I}_n.
 \end{aligned}$$

$$\text{Όμοια } \mathbb{A}^\top (\mathbb{A}^{-1})^\top = \mathbb{I}_n.$$

Θεώρημα 5. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύουν τα ακόλουθα

- 1) $(\mathbb{A}^\top)^\top = \mathbb{A}$.
- 2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^\top = \mathbb{A}^\top + \mathbb{B}^\top$.
- 3) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^\top = \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$.
- 4) $(\lambda \mathbb{A})^\top = \lambda \mathbb{A}^\top$.
- 5) $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Ας δούμε την 3). Το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top$ είναι το

$$\begin{aligned}
 (i, j) \text{ στοιχείο του } \mathbb{B}^\top \mathbb{A}^\top &= \text{γινόμενο της } i\text{-γραμμής } \mathbb{B}^\top \text{ επί } j\text{-στήλη } \mathbb{A}^\top \\
 &= \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης } \mathbb{B} \text{ επί } j\text{-γραμμή του } \mathbb{A} \\
 &= \text{γινόμενο } j\text{-γραμμή } \mathbb{A} \text{ επί } i\text{-στήλη } \mathbb{B} \\
 &= (j, i)\text{-στοιχείο του } \mathbb{A}\mathbb{B} \\
 &= (i, j)\text{-στοιχείο του } (\mathbb{A}\mathbb{B})^\top.
 \end{aligned}$$

Για την 5)

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A}^{-1})^\top \mathbb{A}^\top &= (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})^\top \quad \text{από 3)} \\
 &= \mathbb{I}_n^\top = \mathbb{I}_n.
 \end{aligned}$$

Όμοια $\mathbb{A}^\top (\mathbb{A}^{-1})^\top = \mathbb{I}_n$.

Έτσι παίρνουμε ότι $(\mathbb{A}^{-1})^\top = (\mathbb{A}^\top)^{-1}$.

Η μετατροπή ενός $m \times n$ -συστήματος σ'ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό γίνεται με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Ας θυμηθούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι

- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα αριθμό

Η μετατροπή ενός $m \times n$ -συστήματος σ'ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό γίνεται με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Ας θυμηθούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι

- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα αριθμό
- αφαίρεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής από μια άλλη

Η μετατροπή ενός $m \times n$ -συστήματος σ'ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό γίνεται με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Ας θυμηθούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι

- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα αριθμό
- αφαίρεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής από μια άλλη
- μετάθεση δύο γραμμών.

Η μετατροπή ενός $m \times n$ -συστήματος σ'ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό γίνεται με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Ας θυμηθούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι

- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα αριθμό
- αφαίρεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής από μια άλλη
- μετάθεση δύο γραμμών.

Η μετατροπή ενός $m \times n$ -συστήματος σ'ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό γίνεται με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Ας θυμηθούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι

- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα αριθμό
- αφαίρεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής από μια άλλη
- μετάθεση δύο γραμμών.

Θα ορίσουμε τώρα τους πίνακες που μας δίνουν αυτές τις πράξεις.

Ορισμός 6. Ο διαγώνιος πίνακας που τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι ίσα με 1 εκτός τη θέση i που έχει τον αριθμό λ , ονομάζεται στοιχειώδης πίνακας πολλαπλασιασμού και συμβολίζεται με $M_i(\lambda)$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $M_i(\lambda) = (m_{i,j})_{i,j=1}^n$ με $m_{i,i} = \lambda$, $m_{k,k} = 1$ για κάθε $k \neq i$ και $m_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Ο πίνακας αυτός πολλαπλασιάζει τα στοιχεία της i -γραμμής ενός πίνακα με τον αριθμό λ .

Η μετατροπή ενός $m \times n$ -συστήματος σ'ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό γίνεται με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Ας θυμηθούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι

- πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα αριθμό
- αφαίρεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής από μια άλλη
- μετάθεση δύο γραμμών.

Θα ορίσουμε τώρα τους πίνακες που μας δίνουν αυτές τις πράξεις.

Ορισμός 6. Ο διαγώνιος πίνακας που τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι ίσα με 1 εκτός τη θέση i που έχει τον αριθμό λ , ονομάζεται στοιχειώδης πίνακας πολλαπλασιασμού και συμβολίζεται με $M_i(\lambda)$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $M_i(\lambda) = (m_{i,j})_{i,j=1}^n$ με $m_{i,i} = \lambda$, $m_{k,k} = 1$ για κάθε $k \neq i$ και $m_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Ο πίνακας αυτός πολλαπλασιάζει τα στοιχεία της i -γραμμής ενός πίνακα με τον αριθμό λ .

$$M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$M_i(\lambda)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$M_i(\lambda)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$M_2(3)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$M_i(\lambda)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$M_2(3)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν ισχύει $\mathbb{A}M_2(3) = M_2(3)\mathbb{A}$ εφόσον

$$\mathbb{A}M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$M_i(\lambda)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$M_2(3)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν ισχύει $\mathbb{A}M_2(3) = M_2(3)\mathbb{A}$ εφόσον

$$\mathbb{A}M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \\ 7 & 24 & 9 \end{bmatrix}$$

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$M_i(\lambda)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \lambda a_{i,2} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 7. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$M_2(3)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν ισχύει $\mathbb{A}M_2(3) = M_2(3)\mathbb{A}$ εφόσον

$$\mathbb{A}M_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \\ 7 & 24 & 9 \end{bmatrix}$$

Ο $\mathbb{A}M_2(3)$ πολλαπλασιάζει τα στοιχεία της 2ης στήλης του $\mathbb{A}$ με τον αριθμό 3.

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ .

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Από τον ορισμό έχουμε $E_{i,j}(\lambda) = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{i,i} = 1 \text{ για κάθε } i \leq n,$$

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Από τον ορισμό έχουμε $E_{i,j}(\lambda) = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{i,i} = 1 \text{ για κάθε } i \leq n,$$

$$c_{i,j} = -\lambda,$$

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Από τον ορισμό έχουμε $E_{i,j}(\lambda) = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{i,i} = 1 \text{ για κάθε } i \leq n,$$

$$c_{i,j} = -\lambda,$$

$$c_{k,j} = 0 \text{ για κάθε } k \neq i.$$

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Από τον ορισμό έχουμε $E_{i,j}(\lambda) = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{i,i} = 1 \text{ για κάθε } i \leq n,$$

$$c_{i,j} = -\lambda,$$

$$c_{k,j} = 0 \text{ για κάθε } k \neq i.$$

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Από τον ορισμό έχουμε $E_{i,j}(\lambda) = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{i,i} = 1 \text{ για κάθε } i \leq n,$$

$$c_{i,j} = -\lambda,$$

$$c_{k,j} = 0 \text{ για κάθε } k \neq i.$$

Παράδειγμα 9. $E_{2,3}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ορισμός 8. Ο πίνακας που αφαιρεί από την i -γραμμή τη j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{i,j}(\lambda)$. Ο $E_{i,j}(\lambda)$ προκύπτει αν από την i -γραμμή του ταυτοτικού πίνακα $\mathbb{I}_n$ αφαιρέσουμε την j -γραμμή του πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Από τον ορισμό έχουμε $E_{i,j}(\lambda) = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{i,i} = 1 \text{ για κάθε } i \leq n,$$

$$c_{i,j} = -\lambda,$$

$$c_{k,j} = 0 \text{ για κάθε } k \neq i.$$

Παράδειγμα 9. $E_{2,3}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Έτσι αν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$E_{i,j}(\lambda)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} - \lambda a_{j,1} & a_{i,2} - \lambda a_{j,2} & \cdots & a_{i,n} - \lambda a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 10. Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $E_{2,3}(8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

Παράδειγμα 10. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $E_{2,3}(8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$E_{2,3}(8)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 - 8 \cdot 7 & 5 - 8 \cdot 8 & 6 - 8 \cdot 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 11. Ο πίνακας που μεταθέτει τη γραμμή i με τη γραμμή j , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $P_{i,j}$ και είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν στον ταυτοτικό πίνακα I αλλάξουμε θέση στις i και j -γραμμές.

Ορισμός 11. Ο πίνακας που μεταθέτει τη γραμμή i με τη γραμμή j , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $P_{i,j}$ και είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν στον ταυτοτικό πίνακα I αλλάξουμε θέση στις i και j -γραμμές.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $P_{i,j} = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{k,k} = 1, \text{ για κάθε } k \neq i, j$$

Ορισμός 11. Ο πίνακας που μεταθέτει τη γραμμή i με τη γραμμή j , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $P_{i,j}$ και είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν στον ταυτοτικό πίνακα I αλλάξουμε θέση στις i και j -γραμμές.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $P_{i,j} = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{k,k} = 1, \text{ για κάθε } k \neq i, j$$

$$c_{i,j} = 1 = c_{j,i}$$

Ορισμός 11. Ο πίνακας που μεταθέτει τη γραμμή i με τη γραμμή j , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $P_{i,j}$ και είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν στον ταυτοτικό πίνακα I αλλάξουμε θέση στις i και j -γραμμές.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $P_{i,j} = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{k,k} = 1, \text{ για κάθε } k \neq i, j$$

$$c_{i,j} = 1 = c_{j,i}$$

$$c_{k,r} = 0 \text{ για κάθε } k, r \neq i, j.$$

Ορισμός 11. Ο πίνακας που μεταθέτει τη γραμμή i με τη γραμμή j , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $P_{i,j}$ και είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν στον ταυτοτικό πίνακα I αλλάξουμε θέση στις i και j -γραμμές.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $P_{i,j} = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{k,k} = 1, \text{ για κάθε } k \neq i, j$$

$$c_{i,j} = 1 = c_{j,i}$$

$$c_{k,r} = 0 \text{ για κάθε } k, r \neq i, j.$$

Ορισμός 11. Ο πίνακας που μεταθέτει τη γραμμή i με τη γραμμή j , είναι ο στοιχειώδης πίνακας $P_{i,j}$ και είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν στον ταυτοτικό πίνακα $\mathbb{I}$ αλλάξουμε θέση στις i και j -γραμμές.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $P_{i,j} = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ με

$$c_{k,k} = 1, \text{ για κάθε } k \neq i, j$$

$$c_{i,j} = 1 = c_{j,i}$$

$$c_{k,r} = 0 \text{ για κάθε } k, r \neq i, j.$$

Έτσι αν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ τότε,

$$P_{i,j}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1\text{-γραμμή} \\ \leftarrow 2\text{-γραμμή} \\ \\ \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \\ \leftarrow j\text{-γραμμή} \\ \vdots \\ \leftarrow n\text{-γραμμή} \end{array}$$

Παράδειγμα 12. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$P_{1,3}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 12. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$P_{1,3}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 12. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$P_{1,3}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ισχύει επίσης $P_{i,j}P_{i,j} = \mathbb{I}_n$. Ας το δούμε για $n = 3$.

$$\begin{aligned} P_{1,3}P_{1,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 12. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ και $P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$P_{1,3}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ισχύει επίσης $P_{i,j}P_{i,j} = \mathbb{I}_n$. Ας το δούμε για $n = 3$.

$$\begin{aligned} P_{1,3}P_{1,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

Οι πράξεις που κάναμε με τους πίνακες $M_i(\mu)$, $E_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$ αντιστρέφονται.

Οι πράξεις που κάναμε με τους πίνακες $M_i(\mu)$, $E_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$ αντιστρέφονται. Δηλαδή

εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με τον αριθμό $\mu \neq 0$, τότε μπορούμε και να τα διαιρέσουμε με τον αριθμό μ και να έχουμε πάλι τον αρχικό πίνακα. Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $M_i(\mu^{-1})$.

Οι πράξεις που κάναμε με τους πίνακες $M_i(\mu)$, $E_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$ αντιστρέφονται. Δηλαδή

εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με τον αριθμό $\mu \neq 0$, τότε μπορούμε και να τα διαιρέσουμε με τον αριθμό μ και να έχουμε πάλι τον αρχικό πίνακα. Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $M_i(\mu^{-1})$.

Εάν αφαιρέσουμε από την i -γραμμή την j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ τότε μπορούμε να γυρίσουμε στον αρχικό πίνακα προσθέτοντας στην i -γραμμή (του τροποποιημένου πίνακα) την j -γραμμή του αρχικού πίνακα πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $E_{i,j}(-\lambda)$.

Οι πράξεις που κάναμε με τους πίνακες $M_i(\mu)$, $E_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$ αντιστρέφονται. Δηλαδή

εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με τον αριθμό $\mu \neq 0$, τότε μπορούμε και να τα διαιρέσουμε με τον αριθμό μ και να έχουμε πάλι τον αρχικό πίνακα. Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $M_i(\mu^{-1})$.

Εάν αφαιρέσουμε από την i -γραμμή την j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ τότε μπορούμε να γυρίσουμε στον αρχικό πίνακα προσθέτοντας στην i -γραμμή (του τροποποιημένου πίνακα) την j -γραμμή του αρχικού πίνακα πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $E_{i,j}(-\lambda)$.

Οι πράξεις που κάναμε με τους πίνακες $M_i(\mu)$, $E_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$ αντιστρέφονται. Δηλαδή

εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής με τον αριθμό $\mu \neq 0$, τότε μπορούμε και να τα διαιρέσουμε με τον αριθμό μ και να έχουμε πάλι τον αρχικό πίνακα. Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $M_i(\mu^{-1})$.

Εάν αφαιρέσουμε από την i -γραμμή την j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ τότε μπορούμε να γυρίσουμε στον αρχικό πίνακα προσθέτοντας στην i -γραμμή (του τροποποιημένου πίνακα) την j -γραμμή του αρχικού πίνακα πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ . Για την πράξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $E_{i,j}(-\lambda)$.

Με απλές πράξεις επιβεβαιώνουμε ότι

$$M_i(\mu^{-1})M_i(\mu) = \mathbb{I}, \quad E_{i,j}(-\lambda)E_{i,j}(\lambda) = \mathbb{I} \quad \text{και} \quad P_{i,j}P_{i,j} = \mathbb{I}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss ξεκινώντας όμως από την τελευταία γραμμή και στήλη, κάνοντας τους συντελεστές της i -μεταβλητής πάνω από τη διαγώνιο μηδέν, για κάθε $i = n, n - 1, \dots, 2$.

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss ξεκινώντας όμως από την τελευταία γραμμή και στήλη, κάνοντας τους συντελεστές της i -μεταβλητής πάνω από τη διαγώνιο μηδέν, για κάθε $i = n, n-1, \dots, 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{U}$ με τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,3}(\frac{a_{23}}{a_{33}})$ και $E_{1,3}(\frac{a_{13}}{a_{33}})$

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss ξεκινώντας όμως από την τελευταία γραμμή και στήλη, κάνοντας τους συντελεστές της i -μεταβλητής πάνω από τη διαγώνιο μηδέν, για κάθε $i = n, n-1, \dots, 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{U}$ με τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,3}(\frac{a_{23}}{a_{33}})$ και $E_{1,3}(\frac{a_{13}}{a_{33}})$ παίρνουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\mathbb{U} \xrightarrow{E_{13}(\frac{a_{13}}{a_{33}})E_{23}(\frac{a_{23}}{a_{33}})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss ξεκινώντας όμως από την τελευταία γραμμή και στήλη, κάνοντας τους συντελεστές της i -μεταβλητής πάνω από τη διαγώνιο μηδέν, για κάθε $i = n, n-1, \dots, 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{U}$ με τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,3}(\frac{a_{23}}{a_{33}})$ και $E_{1,3}(\frac{a_{13}}{a_{33}})$ παίρνουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\mathbb{U} \xrightarrow{E_{13}(\frac{a_{13}}{a_{33}})E_{23}(\frac{a_{23}}{a_{33}})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτό τον πίνακα με τον $E_{1,2}(\frac{a_{12}}{a_{22}})$ παίρνουμε

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss ξεκινώντας όμως από την τελευταία γραμμή και στήλη, κάνοντας τους συντελεστές της i -μεταβλητής πάνω από τη διαγώνιο μηδέν, για κάθε $i = n, n-1, \dots, 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{U}$ με τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,3}(\frac{a_{23}}{a_{33}})$ και $E_{1,3}(\frac{a_{13}}{a_{33}})$ παίρνουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\mathbb{U} \xrightarrow{E_{13}(\frac{a_{13}}{a_{33}})E_{23}(\frac{a_{23}}{a_{33}})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτό τον πίνακα με τον $E_{1,2}(\frac{a_{12}}{a_{22}})$ παίρνουμε

$$\mathbb{U} \xrightarrow{E_{13}(\frac{a_{13}}{a_{33}})E_{23}(\frac{a_{23}}{a_{33}})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(\frac{a_{12}}{a_{22}})} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 13. Εάν $\mathbb{U}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο τότε είναι αντιστρέψιμος και είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_3$.

Ας το δούμε για πίνακες 3×3 . Έστω $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Θα εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss ξεκινώντας όμως από την τελευταία γραμμή και στήλη, κάνοντας τους συντελεστές της i -μεταβλητής πάνω από τη διαγώνιο μηδέν, για κάθε $i = n, n-1, \dots, 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{U}$ με τους στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,3}(\frac{a_{23}}{a_{33}})$ και $E_{1,3}(\frac{a_{13}}{a_{33}})$ παίρνουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\mathbb{U} \xrightarrow{E_{13}(\frac{a_{13}}{a_{33}})E_{23}(\frac{a_{23}}{a_{33}})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτό τον πίνακα με τον $E_{1,2}(\frac{a_{12}}{a_{22}})$ παίρνουμε

$$\mathbb{U} \xrightarrow{E_{13}(\frac{a_{13}}{a_{33}})E_{2,3}(\frac{a_{23}}{a_{33}})} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(\frac{a_{12}}{a_{22}})} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζοντας το τελευταίο πίνακα με τους $M_1(a_{11}^{-1})M_2(a_{22}^{-1})$ και $M_3(a_{33}^{-1})$ παίρνουμε τον ταυτοτικό.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{M_1(a_{11}^{-1})M_2(a_{22}^{-1})M_3(a_{33}^{-1})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3.$$

Στους $n \times n$ πίνακες ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Στους $n \times n$ πίνακες ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Δηλαδή ξεκινάμε από την τελευταία γραμμή και εφαρμόζοντας τους πίνακες $E_{i,n}(\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}})$, $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$ κάνουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης ίσα με μηδέν, εκτός το $a_{n,n}$.

Στους $n \times n$ πίνακες ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Δηλαδή ξεκινάμε από την τελευταία γραμμή και εφαρμόζοντας τους πίνακες $E_{i,n}(\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}})$, $i = n-1, n-2, \dots, 1$ κάνουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης ίσα με μηδέν, εκτός το $a_{n,n}$.

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους πίνακες $E_{i,n-1}(\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}})$, $i = n-2, n-3, \dots, 1$ κάνουμε τα στοιχεία της $(n-1)$ στήλης ίσα με μηδέν, εκτός το $a_{n-1,n-1}$.

Στους $n \times n$ πίνακες ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

Δηλαδή ξεκινάμε από την τελευταία γραμμή και εφαρμόζοντας τους πίνακες $E_{i,n}(\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}})$, $i = n-1, n-2, \dots, 1$ κάνουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης ίσα με μηδέν, εκτός το $a_{n,n}$.

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους πίνακες $E_{i,n-1}(\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}})$, $i = n-2, n-3, \dots, 1$ κάνουμε τα στοιχεία της $(n-1)$ στήλης ίσα με μηδέν, εκτός το $a_{n-1,n-1}$.

Συνεχίζουμε μέχρι την πρώτη στήλη οπότε έτσι έχουμε μετατρέψει τον πίνακα σε διαγώνιο με τα στοιχεία της διαγωνίου μη-μηδενικά. Τέλος πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα με τους $M_i(a_{i,i}^{-1})$ παίρνουμε τον ταυτοτικό.

Ας δούμε ένα χαρακτηρισμό των αντιστρέψιμων πινάκων και εύρεσης του αντιστρόφου με τη βοήθεια των στοιχειωδών πινάκων.

Ας δούμε ένα χαρακτηρισμό των αντιστρέψιμων πινάκων και εύρεσης του αντιστρόφου με τη βοήθεια των στοιχειωδών πινάκων.

Θεώρημα 14. Ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό I_n .

Ας δούμε ένα χαρακτηρισμό των αντιστρέψιμων πινάκων και εύρεσης του αντιστρόφου με τη βοήθεια των στοιχειωδών πινάκων.

Θεώρημα 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_n$.

Εάν $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_k$ είναι οι στοιχειώδεις πίνακες με τους οποίους μετατρέπουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ στον ταυτοτικό, δηλαδή $\mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{A} = \mathbb{I}_n$, τότε ο $\mathbb{A}^{-1}$ προκύπτει εφαρμόζοντας με την ίδια σειρά αυτούς τους στοιχειώδεις πίνακες στον ταυτοτικό, δηλαδή $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{I}_n$.

Ας δούμε ένα χαρακτηρισμό των αντιστρέψιμων πινάκων και εύρεσης του αντιστρόφου με τη βοήθεια των στοιχειωδών πινάκων.

Θεώρημα 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_n$.

Εάν $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_k$ είναι οι στοιχειώδεις πίνακες με τους οποίους μετατρέπουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ στον ταυτοτικό, δηλαδή $\mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{A} = \mathbb{I}_n$, τότε ο $\mathbb{A}^{-1}$ προκύπτει εφαρμόζοντας με την ίδια σειρά αυτούς τους στοιχειώδεις πίνακες στον ταυτοτικό, δηλαδή $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{I}_n$.

Απόδειξη.

Εάν ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Αυτό έχουμε δει ότι σημαίνει ότι ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς. Επειδή ο $\mathbb{A}$ είναι τετραγωνικός θα έχει οδηγό σε κάθε γραμμή και οι οδηγοί θα βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο. Τότε η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $\mathbb{A}$ θα είναι ο ταυτοτικός. Επομένως ο $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό.

Ας δούμε ένα χαρακτηρισμό των αντιστρέψιμων πινάκων και εύρεσης του αντιστρόφου με τη βοήθεια των στοιχειωδών πινάκων.

Θεώρημα 14. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό $\mathbb{I}_n$.

Εάν $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_k$ είναι οι στοιχειώδεις πίνακες με τους οποίους μετατρέπουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ στον ταυτοτικό, δηλαδή $\mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{A} = \mathbb{I}_n$, τότε ο $\mathbb{A}^{-1}$ προκύπτει εφαρμόζοντας με την ίδια σειρά αυτούς τους στοιχειώδεις πίνακες στον ταυτοτικό, δηλαδή $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{I}_n$.

Απόδειξη.

Εάν ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Αυτό έχουμε δει ότι σημαίνει ότι ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς. Επειδή ο $\mathbb{A}$ είναι τετραγωνικός θα έχει οδηγό σε κάθε γραμμή και οι οδηγοί θα βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο. Τότε η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $\mathbb{A}$ θα είναι ο ταυτοτικός. Επομένως ο $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό.

Αντιστρόφως εάν ο $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον ταυτοτικό, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_k$ ώστε $\mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{A} = \mathbb{I}_n$. Τότε

$$\mathbb{A} = \mathbb{E}_1^{-1} \mathbb{E}_2^{-1} \cdots \mathbb{E}_k^{-1} \Rightarrow \mathbb{A} \mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_1^{-1} \mathbb{E}_2^{-1} \cdots \mathbb{E}_k^{-1} \mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 = \mathbb{I}_n.$$

Έτσι έχουμε ότι $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}_k \cdots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 \mathbb{I}_n$. □

Ας υποθέσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος και θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφό του.

Ας υποθέσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος και θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφό του.

Παρατήρηση 15. Για να εξετάσουμε εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει οι στήλες του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ να είναι ίσες με τις στήλες του $\mathbb{I}_n$. Επομένως θα πρέπει $\mathbb{A}\mathbb{b}_i = \mathbf{e}_i$ για κάθε $i \leq n$ όπου $\mathbb{b}_i$ $i \leq n$ είναι οι στήλες του $\mathbb{B}$. Έτσι έχουμε να λύσουμε τα n -συστήματα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$. Εάν βρούμε λύση $\mathbf{x}_i$ για καθένα από αυτά τα συστήματα, τότε πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ είναι ο αντίστροφος του $\mathbb{A}$.

Θα δούμε τώρα τη μέθοδο για την εύρεση του αντιστρόφου.

Ας υποθέσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος και θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφό του.

Παρατήρηση 15. Για να εξετάσουμε εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει οι στήλες του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ να είναι ίσες με τις στήλες του $\mathbb{I}_n$. Επομένως θα πρέπει $\mathbb{A}\mathbb{b}_i = \mathbf{e}_i$ για κάθε $i \leq n$ όπου $\mathbb{b}_i$ $i \leq n$ είναι οι στήλες του $\mathbb{B}$. Έτσι έχουμε να λύσουμε τα n -συστήματα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$. Εάν βρούμε λύση $\mathbf{x}_i$ για καθένα από αυτά τα συστήματα, τότε πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ είναι ο αντίστροφος του $\mathbb{A}$.

Θα δούμε τώρα τη μέθοδο για την εύρεση του αντιστρόφου.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα που αποτελείται βάζοντας δίπλα στον $\mathbb{A}$ τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbb{I}_n$, δηλαδή παίρνουμε τον πίνακα

$$[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n].$$

Ας υποθέσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος και θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφό του.

Παρατήρηση 15. Για να εξετάσουμε εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει οι στήλες του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ να είναι ίσες με τις στήλες του $\mathbb{I}_n$. Επομένως θα πρέπει $\mathbb{A}\mathbb{b}_i = \mathbf{e}_i$ για κάθε $i \leq n$ όπου $\mathbb{b}_i$ $i \leq n$ είναι οι στήλες του $\mathbb{B}$. Έτσι έχουμε να λύσουμε τα n -συστήματα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$. Εάν βρούμε λύση $\mathbf{x}_i$ για καθένα από αυτά τα συστήματα, τότε πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ είναι ο αντίστροφος του $\mathbb{A}$.

Θα δούμε τώρα τη μέθοδο για την εύρεση του αντιστρόφου.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα που αποτελείται βάζοντας δίπλα στον $\mathbb{A}$ τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbb{I}_n$, δηλαδή παίρνουμε τον πίνακα

$$[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n].$$

Αυτός ο πίνακας σε μορφή συστημάτων είναι η λύση των n -συστημάτων $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$.

Ας υποθέσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος και θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφό του.

Παρατήρηση 15. Για να εξετάσουμε εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει οι στήλες του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ να είναι ίσες με τις στήλες του $\mathbb{I}_n$. Επομένως θα πρέπει $\mathbb{A}\mathbb{b}_i = \mathbf{e}_i$ για κάθε $i \leq n$ όπου $\mathbb{b}_i$ $i \leq n$ είναι οι στήλες του $\mathbb{B}$. Έτσι έχουμε να λύσουμε τα n -συστήματα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$. Εάν βρούμε λύση $\mathbf{x}_i$ για καθένα από αυτά τα συστήματα, τότε πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ είναι ο αντίστροφος του $\mathbb{A}$.

Θα δούμε τώρα τη μέθοδο για την εύρεση του αντιστρόφου.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα που αποτελείται βάζοντας δίπλα στον $\mathbb{A}$ τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbb{I}_n$, δηλαδή παίρνουμε τον πίνακα

$$[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n].$$

Αυτός ο πίνακας σε μορφή συστημάτων είναι η λύση των n -συστημάτων $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$.

Θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις πινάκων ώστε να μετασχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n]$ στον $[\mathbb{I}_n : \mathbb{B}]$.

Ας υποθέσουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος και θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφό του.

Παρατήρηση 15. Για να εξετάσουμε εάν ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει οι στήλες του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ να είναι ίσες με τις στήλες του $\mathbb{I}_n$. Επομένως θα πρέπει $\mathbb{A}\mathbb{b}_i = \mathbf{e}_i$ για κάθε $i \leq n$ όπου $\mathbb{b}_i$ $i \leq n$ είναι οι στήλες του $\mathbb{B}$. Έτσι έχουμε να λύσουμε τα n -συστήματα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$. Εάν βρούμε λύση $\mathbf{x}_i$ για καθένα από αυτά τα συστήματα, τότε πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$ είναι ο αντίστροφος του $\mathbb{A}$.

Θα δούμε τώρα τη μέθοδο για την εύρεση του αντιστρόφου.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα που αποτελείται βάζοντας δίπλα στον $\mathbb{A}$ τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbb{I}_n$, δηλαδή παίρνουμε τον πίνακα

$$[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n].$$

Αυτός ο πίνακας σε μορφή συστημάτων είναι η λύση των n -συστημάτων $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $i \leq n$.

Θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις πινάκων ώστε να μετασχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n]$ στον $[\mathbb{I}_n : \mathbb{B}]$.

Τότε από το Θεώρημα 14 έχουμε ότι $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{B}$.

Η μέθοδος για να πάμε από τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ στον $[I_n : B]$ έχει δύο βήματα.

Η μέθοδος για να πάμε από τον επαυξημένο πίνακα $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_n]$ στον $[\mathbb{I}_n : \mathbb{B}]$ έχει δύο βήματα.

Στο πρώτο βήμα με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ σε άνω τριγωνικό $\mathbb{U}$.

Η μέθοδος για να πάμε από τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ στον $[I_n : B]$ έχει δύο βήματα.

Στο πρώτο βήμα με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό U .

Δηλαδή με στοιχειώδεις πράξεις θα μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ σε πίνακα $[U : C]$ όπου U είναι άνω τριγωνικός.

Η μέθοδος για να πάμε από τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ στον $[I_n : B]$ έχει δύο βήματα.

Στο πρώτο βήμα με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό U .

Δηλαδή με στοιχειώδεις πράξεις θα μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ σε πίνακα $[U : C]$ όπου U είναι άνω τριγωνικός.

Στο δεύτερο βήμα με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα U στον ταυτοτικό I_n , δες Παρατήρηση 13.

Η μέθοδος για να πάμε από τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ στον $[I_n : B]$ έχει δύο βήματα.

Στο πρώτο βήμα με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό U .

Δηλαδή με στοιχειώδεις πράξεις θα μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : I_n]$ σε πίνακα $[U : C]$ όπου U είναι άνω τριγωνικός.

Στο δεύτερο βήμα με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα U στον ταυτοτικό I_n , δες Παρατήρηση 13.

Δηλαδή με στοιχειώδεις πράξεις θα μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακα $[U : C]$ σε πίνακα $[I_n : B]$.

Τότε $A^{-1} = B$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επανξημένο πίνακα.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{3,2}(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επανυξημένο πίνακα.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{3,2}(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Έχουμε φτάσει στη μετατροπή $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_3] \rightarrow [\mathbb{U} : \mathbb{C}]$.

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επανυξημένο πίνακα.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{3,2}(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Έχουμε φτάσει στη μετατροπή $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_3] \rightarrow [\mathbb{U} : \mathbb{C}]$. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό. Στο πρώτο βήμα έχουμε τη μετατροπή

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επανυξημένο πίνακα.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{3,2}(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Έχουμε φτάσει στη μετατροπή $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_3] \rightarrow [\mathbb{U} : \mathbb{C}]$. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό. Στο πρώτο βήμα έχουμε τη μετατροπή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,3}(2/21)E_{2,3}(-5/21)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -7/21 & 12/21 & -2/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντιστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επανξημένο πίνακα.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{3,2}(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Έχουμε φτάσει στη μετατροπή $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_3] \rightarrow [\mathbb{U} : \mathbb{C}]$. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό. Στο πρώτο βήμα έχουμε τη μετατροπή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,3}(2/21)E_{2,3}(-5/21)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -7/21 & 12/21 & -2/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right].$$

Στο δεύτερο βήμα έχουμε την μετατροπή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -7/21 & 12/21 & -2/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/21 & 3/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επανξημένο πίνακα.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{3,1}(4)E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{3,2}(6)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Έχουμε φτάσει στη μετατροπή $[\mathbb{A} : \mathbb{I}_3] \rightarrow [\mathbb{U} : \mathbb{C}]$. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό. Στο πρώτο βήμα έχουμε τη μετατροπή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,3}(2/21)E_{2,3}(-5/21)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -7/21 & 12/21 & -2/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right].$$

Στο δεύτερο βήμα έχουμε την μετατροπή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -7/21 & 12/21 & -2/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/21 & 3/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right].$$

Στο τρίτο βήμα θα διαιρέσουμε τη δεύτερη γραμμή με το -1 και την τρίτη γραμμή με 21, έτσι παίρνουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/21 & 3/21 \\ 0 & -1 & 0 & 7/21 & -9/21 & 5/21 \\ 0 & 0 & 21 & 14 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{M_2(1/21)M_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/21 & 3/21 \\ 0 & 1 & 0 & -7/21 & 9/21 & -5/21 \\ 0 & 0 & 1 & 14/21 & -6/21 & 1/21 \end{array} \right]$$

Έτσι έχουμε ότι ο αντίστροφος πίνακας του $\mathbb{A}$ είναι ο

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/21 & 3/21 \\ -7/21 & 9/21 & -5/21 \\ 14/21 & -6/21 & 1/21 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -7 & 9 & -5 \\ 14 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 17. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 17. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Έτσι έχουμε φτάσει στη μορφή $[\mathbb{U} : \mathbb{C}]$, όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό.

Παράδειγμα 17. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Έτσι έχουμε φτάσει στη μορφή $[\mathbb{U} : \mathbb{C}]$, όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 17. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Έτσι έχουμε φτάσει στη μορφή $[U : I]$, όπου U είναι άνω τριγωνικός. Θα μετατρέψουμε τον U στον ταυτοτικό.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right].$$

Στο τρίτο βήμα θα διαιρέσουμε την τρίτη γραμμή με το -1 ,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{M_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 17. Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(3)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Έτσι έχουμε φτάσει στη μορφή $[\mathbb{U} : \mathbb{C}]$, όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός. Θα μετατρέψουμε τον $\mathbb{U}$ στον ταυτοτικό.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right].$$

Στο τρίτο βήμα θα διαιρέσουμε την τρίτη γραμμή με το -1 ,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{M_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array} \right].$$

Επομένως ο αντίστροφος του $\mathbb{A}$ είναι ο

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{A} \cdot (\text{3η στήλη του } \mathbb{A}^{-1})$.

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{A} \cdot (3\text{η στήλη του } \mathbb{A}^{-1})$.
Έτσι έχουμε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ και άρα

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{A} \cdot (\text{3η στήλη του } \mathbb{A}^{-1})$. Έτσι έχουμε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ και άρα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{A} \cdot$ (3η στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$).
Έτσι έχουμε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ και άρα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{A} \cdot$ (3η στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$).
Έτσι έχουμε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ και άρα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Παράδειγμα 18. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθεί η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$.

Επειδή $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}_3$ η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επίσης τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$ είναι ίση με $\mathbb{A} \cdot (\text{3η στήλη του } \mathbb{A}^{-1})$.
Έτσι έχουμε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ και άρα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Άρα έχουμε τη λύση $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ και $-x_1 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3x_3 = 3$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετρимиμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετρимиμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετρимиμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμική απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμική απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1-1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετρimerμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.
- 9) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι επί του $\mathbb{R}^n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.
- 9) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι επί του $\mathbb{R}^n$.
- 10) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετρимиμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.
- 9) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι επί του $\mathbb{R}^n$.
- 10) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$.
- 11) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{D}$ με $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_n$.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.
- 9) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι επί του $\mathbb{R}^n$.
- 10) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$.
- 11) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{D}$ με $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_n$.
- 12) Ο ανάστροφος $\mathbb{A}^\top$ του $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$.

- 1) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_n$.
- 3) Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.
- 5) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του $\mathbb{A}$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.
- 9) Η γραμμικά απεικόνιση $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι επί του $\mathbb{R}^n$.
- 10) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$.
- 11) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{D}$ με $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_n$.
- 12) Ο ανάστροφος $\mathbb{A}^\top$ του $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των αντίστροφων πινάκων.

Θεώρημα 19. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ πίνακα A .

- 1) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
- 2) Ο πίνακας A είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον I_n .
- 3) Ο πίνακας A έχει n -οδηγούς.
- 4) Η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.
- 5) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
- 6) Η γραμμικά απεικόνιση $x \rightarrow Ax$ είναι $1 - 1$.
- 7) Η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$.
- 8) Οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^n$.
- 9) Η γραμμικά απεικόνιση $x \rightarrow Ax$ είναι επί του $\mathbb{R}^n$.
- 10) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας C με $CA = I_n$.
- 11) Υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας D με $AD = I_n$.
- 12) Ο ανάστροφος A^T του A είναι αντιστρέψιμος.

Ας παρατηρήσουμε ότι οι συνθήκες 10) ή 11) μας δίνουν ότι για να δείξουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αρκεί να βρούμε αριστερό ή δεξιό αντίστροφο.

Η μέθοδος Gauss που χρησιμοποιούμε για τη λύση του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, δηλαδή η μετατροπή του πίνακα $\mathbb{A}$ σε ισοδύναμο άνω τριγωνικό μας δίνει επίσης ένα τρόπο να αναλύσουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ σε γινόμενο δύο απλών πινάκων $\mathbb{L}$, $\mathbb{U}$, δηλαδή $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$, όπου $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός και $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός

Η μέθοδος Gauss που χρησιμοποιούμε για τη λύση του συστήματος $Ax = b$, δηλαδή η μετατροπή του πίνακα A σε ισοδύναμο άνω τριγωνικό μας δίνει επίσης ένα τρόπο να αναλύσουμε τον πίνακα A σε γινόμενο δύο απλών πινάκων L, U , δηλαδή $A = LU$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός και U είναι άνω τριγωνικός

Πρόταση 1. *Εάν έχουμε ένα πίνακα A που δεν είναι ιδιόμορφος και δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών τότε ο A γράφεται ως $A = LU$ όπου U είναι άνω τριγωνικός με τα διαγώνια στοιχεία να είναι οι οδηγοί, και ο L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{i,j}$ κάτω από τη διαγώνιο.*

Η παραγοντοποίηση του A σε $A = LU$ ονομάζεται LU-παραγοντοποίηση.

Η μέθοδος Gauss που χρησιμοποιούμε για τη λύση του συστήματος $Ax = b$, δηλαδή η μετατροπή του πίνακα A σε ισοδύναμο άνω τριγωνικό μας δίνει επίσης ένα τρόπο να αναλύσουμε τον πίνακα A σε γινόμενο δύο απλών πινάκων L, U , δηλαδή $A = LU$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός και U είναι άνω τριγωνικός

Πρόταση 1. Εάν έχουμε ένα πίνακα A που δεν είναι ιδιόμορφος και δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών τότε ο A γράφεται ως $A = LU$ όπου U είναι άνω τριγωνικός με τα διαγώνια στοιχεία να είναι οι οδηγοί, και ο L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{i,j}$ κάτω από τη διαγώνιο.

Η παραγοντοποίηση του A σε $A = LU$ ονομάζεται LU-παραγοντοποίηση.

Στην περίπτωση που χρειάζεται εναλλαγή γραμμών ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα στο γινόμενο PA όπου P είναι οι εναλλαγές γραμμών που χρειάζονται για να έχουμε μη μηδενικούς οδηγούς.

Η μέθοδος Gauss που χρησιμοποιούμε για τη λύση του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, δηλαδή η μετατροπή του πίνακα $\mathbb{A}$ σε ισοδύναμο άνω τριγωνικό μας δίνει επίσης ένα τρόπο να αναλύσουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ σε γινόμενο δύο απλών πινάκων $\mathbb{L}$, $\mathbb{U}$, δηλαδή $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$, όπου $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός και $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός

Πρόταση 1. Εάν έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ που δεν είναι ιδιόμορφος και δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών τότε ο $\mathbb{A}$ γράφεται ως $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός με τα διαγώνια στοιχεία να είναι οι οδηγοί, και ο $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{i,j}$ κάτω από τη διαγώνιο.

Η παραγοντοποίηση του $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ ονομάζεται LU-παραγοντοποίηση. Στην περίπτωση που χρειάζεται εναλλαγή γραμμών ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα στο γινόμενο $\mathbb{P}\mathbb{A}$ όπου $\mathbb{P}$ είναι οι εναλλαγές γραμμών που χρειάζονται για να έχουμε μη μηδενικούς οδηγούς.

Πρόταση 2. Εάν έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ που δεν είναι ιδιόμορφος χρησιμοποιώντας εναλλαγές γραμμών, τότε υπάρχει ένας πίνακας μεταθέσεων $\mathbb{P}$ ώστε ο $\mathbb{P}\mathbb{A}$ γράφεται ως $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός που τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι οδηγοί και ο $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{i,j}$ κάτω από τη διαγώνιο.

Η μέθοδος Gauss που χρησιμοποιούμε για τη λύση του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, δηλαδή η μετατροπή του πίνακα $\mathbb{A}$ σε ισοδύναμο άνω τριγωνικό μας δίνει επίσης ένα τρόπο να αναλύσουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ σε γινόμενο δύο απλών πινάκων $\mathbb{L}$, $\mathbb{U}$, δηλαδή $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$, όπου $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός και $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός

Πρόταση 1. Εάν έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ που δεν είναι ιδιόμορφος και δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών τότε ο $\mathbb{A}$ γράφεται ως $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός με τα διαγώνια στοιχεία να είναι οι οδηγοί, και ο $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{i,j}$ κάτω από τη διαγώνιο.

Η παραγοντοποίηση του $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ ονομάζεται LU-παραγοντοποίηση. Στην περίπτωση που χρειάζεται εναλλαγή γραμμών ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα στο γινόμενο $\mathbb{P}\mathbb{A}$ όπου $\mathbb{P}$ είναι οι εναλλαγές γραμμών που χρειάζονται για να έχουμε μη μηδενικούς οδηγούς.

Πρόταση 2. Εάν έχουμε ένα πίνακα $\mathbb{A}$ που δεν είναι ιδιόμορφος χρησιμοποιώντας εναλλαγές γραμμών, τότε υπάρχει ένας πίνακας μεταθέσεων $\mathbb{P}$ ώστε ο $\mathbb{P}\mathbb{A}$ γράφεται ως $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ όπου $\mathbb{U}$ είναι άνω τριγωνικός που τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι οδηγοί και ο $\mathbb{L}$ είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές $\lambda_{i,j}$ κάτω από τη διαγώνιο.

Εάν έχουμε ανάλυση τον πίνακα $A = LU$ τότε το σύστημα $Ax = b$ είναι ισοδύναμο με το $LUx = b$. Για να λύσουμε αυτό το σύστημα θα λύσουμε δύο τριγωνικά συστήματα που λύνονται ευκολότερα.

Εάν έχουμε ανάλυση τον πίνακα $A = LU$ τότε το σύστημα $Ax = b$ είναι ισοδύναμο με το $LUx = b$. Για να λύσουμε αυτό το σύστημα θα λύσουμε δύο τριγωνικά συστήματα που λύνονται ευκολότερα.
Παίρνουμε τον πίνακα $Ux = c$. Τότε έχουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα $Lc = b$.
Πρώτα λύνουμε το $Lc = b$ ώστε να βρούμε το διάνυσμα c .

Εάν έχουμε ανάλυση τον πίνακα $A = LU$ τότε το σύστημα $Ax = b$ είναι ισοδύναμο με το $LUx = b$. Για να λύσουμε αυτό το σύστημα θα λύσουμε δύο τριγωνικά συστήματα που λύνονται ευκολότερα.

Παίρνουμε τον πίνακα $Ux = c$. Τότε έχουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα $Lc = b$.

Πρώτα λύνουμε το $Lc = b$ ώστε να βρούμε το διάνυσμα c .

Στη συνέχεια λύνουμε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$. Η λύση αυτού του συστήματος μας δίνει και τη λύση του αρχικού συστήματος.

Πριν δούμε παραδείγματα ας δούμε πως θα βρίσκουμε τον πίνακα $\mathbb{L}$. Σύμφωνα με τις παραπάνω προτάσεις ο πίνακας $\mathbb{L}$ θα είναι της μορφής

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Πριν δούμε παραδείγματα ας δούμε πως θα βρίσκουμε τον πίνακα $\mathbb{L}$. Σύμφωνα με τις παραπάνω προτάσεις ο πίνακας $\mathbb{L}$ θα είναι της μορφής

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Τον πίνακα θα τον ορίζουμε βήμα-βήμα.

Πριν δούμε παραδείγματα ας δούμε πως θα βρίσκουμε τον πίνακα $\mathbb{L}$. Σύμφωνα με τις παραπάνω προτάσεις ο πίνακας $\mathbb{L}$ θα είναι της μορφής

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \lambda_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Τον πίνακα θα τον ορίζουμε βήμα-βήμα.

Μόλις βρούμε τον i -οδηγό και ορίσουμε τους αριθμούς $\lambda_{k,i}$, $k = i + 1, \dots, n$ τότε θα βάζουμε στον πίνακα $\mathbb{L}$ την i -στήλη, που έχει ως στοιχεία κάτω από το (i, i) -στοιχείο της διαγωνίου τους αριθμούς $\lambda_{k,i}$, $k = i + 1, i + 2, \dots, m$.

Θα δούμε τώρα σε παράδειγμα πως βρίσκουμε την παραγοντοποίηση ενός 4×4 πίνακα A σε LU , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Θα δούμε τώρα σε παράδειγμα πως βρίσκουμε την παραγοντοποίηση ενός 4×4 πίνακα A σε LU , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 20. Να γίνει LU - παραγοντοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Θα δούμε τώρα σε παράδειγμα πως βρίσκουμε την παραγοντοποίηση ενός 4×4 πίνακα $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{LU}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 20. Να γίνει $\mathbb{LU}$ - παραγοντοποίηση του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Στο πρώτο βήμα μηδενίζουμε τον συντελεστή του x στις 3 τελευταίες εξισώσεις.

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 6 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = 3/6$, $\lambda_{3,1} = -12/6$ και $\lambda_{4,1} = -6/6$.

Θα δούμε τώρα σε παράδειγμα πως βρίσκουμε την παραγοντοποίηση ενός 4×4 πίνακα $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{LU}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 20. Να γίνει $\mathbb{LU}$ - παραγοντοποίηση του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Στο πρώτο βήμα μηδενίζουμε τον συντελεστή του x στις 3 τελευταίες εξισώσεις. Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 6 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = 3/6$, $\lambda_{3,1} = -12/6$ και $\lambda_{4,1} = -6/6$. Εφαρμόζουμε τους πίνακες $E_{2,1}(1/2)$, $E_{3,1}(-2)$ και $E_{4,1}(-1)$ στον πίνακα $\mathbb{A}$ για να πάρουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_1 = E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-2)E_{2,1}(1/2)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Θα δούμε τώρα σε παράδειγμα πως βρίσκουμε την παραγοντοποίηση ενός 4×4 πίνακα $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{LU}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 20. Να γίνει $\mathbb{LU}$ - παραγοντοποίηση του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Στο πρώτο βήμα μηδενίζουμε τον συντελεστή του x στις 3 τελευταίες εξισώσεις. Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 6 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = 3/6$, $\lambda_{3,1} = -12/6$ και $\lambda_{4,1} = -6/6$. Εφαρμόζουμε τους πίνακες $E_{2,1}(1/2)$, $E_{3,1}(-2)$ και $E_{4,1}(-1)$ στον πίνακα $\mathbb{A}$ για να πάρουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_1 = E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-2)E_{2,1}(1/2)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Ταυτόχρονα έχουμε και την πρώτη στήλη του πίνακα $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & ? & 1 & 0 \\ -1 & ? & ? & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα δούμε τώρα σε παράδειγμα πως βρίσκουμε την παραγοντοποίηση ενός 4×4 πίνακα $\mathbb{A}$ σε $\mathbb{LU}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 20. Να γίνει $\mathbb{LU}$ - παραγοντοποίηση του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Στο πρώτο βήμα μηδενίζουμε τον συντελεστή του x στις 3 τελευταίες εξισώσεις. Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 6 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{2,1} = 3/6$, $\lambda_{3,1} = -12/6$ και $\lambda_{4,1} = -6/6$. Εφαρμόζουμε τους πίνακες $E_{2,1}(1/2)$, $E_{3,1}(-2)$ και $E_{4,1}(-1)$ στον πίνακα $\mathbb{A}$ για να πάρουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_1 = E_{4,1}(-1)E_{3,1}(-2)E_{2,1}(1/2)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Ταυτόχρονα έχουμε και την πρώτη στήλη του πίνακα $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & ? & 1 & 0 \\ -1 & ? & ? & 1 \end{bmatrix}.$$

Τα ερωτηματικά ? είναι οι αριθμοί $\lambda_{3,2}$, $\lambda_{4,2}$ και $\lambda_{4,3}$ που θα υπολογισθούν στη συνέχεια, αφού πρώτα βρούμε τον οδηγό της 2ης στήλης στον $\mathbb{U}_1$.

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{3,2} = 4/(-2) = -2$, $\lambda_{4,2} = -2/(-2) = 1$.

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{3,2} = 4/(-2) = -2$, $\lambda_{4,2} = -2/(-2) = 1$. Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα $\mathbb{U}_1$ με τους πίνακες $E_{3,2}(-2)$ και $E_{4,2}(1)$ παίρνουμε τον πίνακα

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{3,2} = 4/(-2) = -2$, $\lambda_{4,2} = -2/(-2) = 1$. Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα $\mathbb{U}_1$ με τους πίνακες $E_{3,2}(-2)$ και $E_{4,2}(1)$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_2 = E_{4,2}(1)E_{3,2}(-2)\mathbb{U}_1 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -2 και παίρνουμε τους αριθμούς $\lambda_{3,2} = 4/(-2) = -2$, $\lambda_{4,2} = -2/(-2) = 1$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα $\mathbb{U}_1$ με τους πίνακες $E_{3,2}(-2)$ και $E_{4,2}(1)$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_2 = E_{4,2}(1)E_{3,2}(-2)\mathbb{U}_1 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Επίσης βρήκαμε και τη 2η στήλη του $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & ? & 1 \end{bmatrix}.$$

Μένει να μηδενίσουμε τον συντελεστή της τρίτης μεταβλητής στην τέταρτη εξίσωση. Ο τρίτος ο οδηγός είναι ο αριθμός 5 και παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{4,3} = 10/5 = 2$.

Μένει να μηδενίσουμε τον συντελεστή της τρίτης μεταβλητής στην τέταρτη εξίσωση. Ο τρίτος ο οδηγός είναι ο αριθμός 5 και παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{4,3} = 10/5 = 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα U_2 με τον $E_{4,3}(2)$ παίρνουμε τον πίνακα

$$U_3 = E_{4,3}(2)U_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Μένει να μηδενίσουμε τον συντελεστή της τρίτης μεταβλητής στην τέταρτη εξίσωση. Ο τρίτος ο οδηγός είναι ο αριθμός 5 και παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{4,3} = 10/5 = 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα $\mathbb{U}_2$ με τον $E_{4,3}(2)$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_3 = E_{4,3}(2)\mathbb{U}_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Έτσι φτάσαμε στον άνω τριγωνικό πίνακα $\mathbb{U} = \mathbb{U}_3$.

Μένει να μηδενίσουμε τον συντελεστή της τρίτης μεταβλητής στην τέταρτη εξίσωση. Ο τρίτος ο οδηγός είναι ο αριθμός 5 και παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{4,3} = 10/5 = 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα $\mathbb{U}_2$ με τον $E_{4,3}(2)$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{U}_3 = E_{4,3}(2)\mathbb{U}_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Έτσι φτάσαμε στον άνω τριγωνικό πίνακα $\mathbb{U} = \mathbb{U}_3$.

Με τον αριθμό $\lambda_{4,3}$ συμπληρώνουμε τον $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Μένει να μηδενίσουμε τον συντελεστή της τρίτης μεταβλητής στην τέταρτη εξίσωση. Ο τρίτος ο οδηγός είναι ο αριθμός 5 και παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{4,3} = 10/5 = 2$.

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα U_2 με τον $E_{4,3}(2)$ παίρνουμε τον πίνακα

$$U_3 = E_{4,3}(2)U_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Έτσι φτάσαμε στον άνω τριγωνικό πίνακα $U = U_3$.

Με τον αριθμό $\lambda_{4,3}$ συμπληρώνουμε τον $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η παραγοντοποίηση είναι η $\mathbb{A} = \mathbb{L}U$.

Παρατήρηση 21. Η παραγοντοποίηση LU ενός μη-ιδιόμορφου πίνακα γράφεται και στη μορφή $A = LDU$ όπου L κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο, D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου τους οδηγούς και U άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.

Παρατήρηση 21. Η παραγοντοποίηση LU ενός μη-ιδιόμορφου πίνακα γράφεται και στη μορφή $A = LDU$ όπου L κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο, D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου τους οδηγούς και U άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.

Η παραγοντοποίηση αυτή προκύπτει εάν το πίνακα U που παίρνουμε από την LU-παραγοντοποίηση τον διασπάσουμε στο γινόμενο

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2}/d_1 & u_{1,3}/d_1 & u_{1,4}/d_1 & \cdots & u_{1,n}/d_1 \\ 0 & 1 & u_{2,3}/d_2 & u_{2,4}/d_2 & \cdots & u_{2,n}/d_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $d_i, i \leq n$, είναι οι οδηγοί.

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{3,1} = 1$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{3,1} = 1$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{3,1} = 1$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix}$. Ο 2ος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{3,2} = 0$.

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{3,1} = 1$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix}$. Ο 2ος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{3,2} = 0$. Επομένως

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{3,1} = 1$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix}$. Ο 2ος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{3,2} = 0$. Επομένως

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Επίσης ο πίνακας $E_{3,2}(0) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι άνω
τριγωνικός και άρα είναι ο πίνακας U .

Παράδειγμα 22. Να γίνει LU-παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Αρχικά κάνουμε εναλλαγή 1ης, 2ης γραμμής για να έχουμε τον 1ο οδηγό στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{3,1} = 1$. Τότε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης $\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix}$. Ο 2ος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και $\lambda_{3,2} = 0$. Επομένως

$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Επίσης ο πίνακας $E_{3,2}(0) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι άνω
τριγωνικός και άρα είναι ο πίνακας $\mathbb{U}$. Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{P}_{1,2}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 23. Η παραγοντοποίηση $\mathbf{LU}$ γίνεται και σε $m \times n$ πίνακες $\mathbf{A}$ στην περίπτωση που ο $\mathbf{A}$ ανάγεται σε κλιμακωτή μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση, εάν δεν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών έχουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ όπου $\mathbf{L}$ είναι ένα κάτω τριγωνικός $m \times m$ πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο και $\mathbf{U}$ είναι $m \times n$ -κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbf{A}$.

Παρατήρηση 23. Η παραγοντοποίηση $\mathbf{LU}$ γίνεται και σε $m \times n$ πίνακες $\mathbf{A}$ στην περίπτωση που ο $\mathbf{A}$ ανάγεται σε κλιμακωτή μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση, εάν δεν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών έχουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ όπου $\mathbf{L}$ είναι ένα κάτω τριγωνικός $m \times m$ πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο και $\mathbf{U}$ είναι $m \times n$ -κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbf{A}$. Εάν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών για να πάρουμε τον κλιμακωτή μορφή του $\mathbf{A}$, τότε υπάρχει ένα πίνακας μεταθέσεων $\mathbf{P}$ ώστε $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

Παρατήρηση 23. Η παραγοντοποίηση $\mathbb{L}\mathbb{U}$ γίνεται και σε $m \times n$ πίνακες $\mathbb{A}$ στην περίπτωση που ο $\mathbb{A}$ ανάγεται σε κλιμακωτή μορφή.

Σε αυτή την περίπτωση, εάν δεν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών έχουμε ότι $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ όπου $\mathbb{L}$ είναι ένα κάτω τριγωνικός $m \times m$ πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο και $\mathbb{U}$ είναι $m \times n$ -κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbb{A}$.

Εάν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών για να πάρουμε τον κλιμακωτή μορφή του $\mathbb{A}$, τότε υπάρχει ένα πίνακας μεταθέσεων $\mathbb{P}$ ώστε $\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$.

Η i -στήλη του πίνακα $\mathbb{L}$ είναι οι αριθμοί $\lambda_{k,i}$, $k = i + 1, \dots, m$ που ορίζονται από τον i -οδηγό.

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί η LU-παραγοντοποίηση του

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 17 & 24 \\ 6 & 12 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί η LU-παραγοντοποίηση του

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 17 & 24 \\ 6 & 12 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{3,1}(6)E_{2,1}(5)} \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί η LU-παραγοντοποίηση του

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 17 & 24 \\ 6 & 12 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{3,1}(6)E_{2,1}(5)} \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(0)} \mathbb{A}_1$$

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί η LU-παραγοντοποίηση του

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 17 & 24 \\ 6 & 12 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{3,1}(6)E_{2,1}(5)} \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(0)} \mathbb{A}_1$$

Ο πίνακας $\mathbb{A}_1$ είναι κλιμακωτός και είναι ο πίνακας $\mathbb{U}$.

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί η LU-παραγοντοποίηση του

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 17 & 24 \\ 6 & 12 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{3,1}(6)E_{2,1}(5)} \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(0)} \mathbb{A}_1$$

Ο πίνακας $\mathbb{A}_1$ είναι κλιμακωτός και είναι ο πίνακας $\mathbb{U}$. Ο πίνακας $\mathbb{L}$ είναι ο

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί η LU-παραγοντοποίηση του

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 17 & 24 \\ 6 & 12 & 15 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{3,1}(6)E_{2,1}(5)} \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(0)} \mathbb{A}_1$$

Ο πίνακας $\mathbb{A}_1$ είναι κλιμακωτός και είναι ο πίνακας $\mathbb{U}$. Ο πίνακας $\mathbb{L}$ είναι ο

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10+2 & 15+2 & 20+4 \\ 6 & 12 & 18-3 & 24+5 \end{bmatrix} = \mathbb{A}.$$

Παράδειγμα 25. Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A

Παράδειγμα 25. Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{4,1}(1)E_{3,1}(0)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 25. Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{4,1}(1)E_{3,1}(0)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{U}$$

Παράδειγμα 25. Να βρεθεί η LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{A} \xrightarrow{E_{4,1}(1)E_{3,1}(0)E_{2,1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{U}$$

Ο πίνακας $\mathbb{L}$ είναι ο $\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ας μετρήσουμε το σύνολο των πράξεων που χρειάζεται για να λύσουμε ένα $n \times n$ -σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$,

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Για να το λύσουμε περνάμε στο σύστημα $\mathbb{U}\mathbb{x} = \mathbb{c}$ όπου $\mathbb{U}$ είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας που παίρνουμε από την απαλοιφή Gauss. Άρα χρειάζεται να μετρήσουμε τις πράξεις για να παράγουμε τους πίνακες $\mathbb{U}$ και $\mathbb{c}$.

Για να πάρουμε τον πίνακα $\mathbb{U}$ για την απαλοιφή του συντελεστή της πρώτης μεταβλητής στον πίνακα $\mathbb{A}$ χρειαζόμαστε

$(n-1)$ -διαίρεσεις για να πάρουμε τους αριθμούς

$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}}, k = 2, 3, \dots, n-1$. Για κάθε $\lambda_{k,1}$ κάνουμε

- i) $(n-1)$ -πολλαπλασιασμούς για πάρουμε τους αριθμούς $\lambda_{k,1}a_{1,j}$,
 $j = 2, 3, \dots, n-1$.
- ii) $(n-1)$ αφαιρέσεις για να πάρουμε τους αριθμούς $a_{k,j}^{(1)} = a_{k,j} - \lambda_{k,1}a_{1,j}$.
- (iii) ένα πολλαπλασιασμό για τον αριθμό $\lambda_{i,1}b_1$
- (iv) μια αφαίρεση για να πάρουμε τον $b_i^{(1)} = b_1 - \lambda_{i,1}b_1$.

Επομένως για κάθε $\lambda_{k,1}$ χρειαζόμαστε $2(n-1) + 2$ -πράξεις. Επειδή ο αριθμός των $\lambda_{k,1}$ είναι $(n-1)$, θα κάνουμε $2(n-1)^2 + 2(n-1)$ -πράξεις.

Επομένως για την απαλοιφή των συντελεστών του πρώτου άγνωστου από τις γραμμές $2, \dots, n$ χρειαζόμαστε το πολύ $(n-1) + 2(n-1)^2 + 2(n-1)$ -πράξεις.

Μετρώντας τις πράξεις που κάνουμε για να απαλείψουμε τους συντελεστές της i -μεταβλητής από τις γραμμές $i + 1, i + 2, \dots, n$ βρίσκουμε ότι ο συνολικός αριθμός πράξεων που θα χρειαστούμε για να πάμε από τον πίνακα $\mathbb{A}$ στον $\mathbb{U}$ είναι

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2(n-k)^2 + 3(n-k) &= 2(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) + 3(1 + 2 + \dots + n-1) \\ &= 2 \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + 3 \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{1}{3}(2n^3 - 3n^2 + n) + \frac{3}{2}(n^2 - n) = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}. \end{aligned} \quad (1)$$

Οι πράξεις χρειαζόμαστε για να λύσουμε το σύστημα $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ όπου $\mathbb{U}$ άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο είναι

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2k) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}. \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (3),(2) βρίσκουμε τον αριθμό πράξεων που χρειάζονται για να λύσουμε το σύστημα. Αυτός ο αριθμός είναι ο μέγιστος αριθμός πράξεων, διότι οι υπολογισμοί έγιναν υποθέτοντας ότι σε κάθε βήμα τα στοιχεία $a_{i,j}^{(k)}$ είναι διάφορα του μηδέν. Εάν κάποια απ'αυτά είναι μηδέν τότε είναι άμεσο ότι μειώνονται οι πράξεις που χρειαζόμαστε.

Εάν έχουμε την παραγοντοποίηση του A σε LU θα χρειαστούμε τις μισές περίπου πράξεις. Αυτό οφείλεται στο ότι για να πάρουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα U δεν χρειάζεται να κάνουμε απαλοιφή της k -μεταβλητής από τις γραμμές $k+1, k+2, \dots$, και να υπολογίσουμε τους αριθμούς $a_{i,j}^{(k)}$, $i, j \geq k$, αλλά αρκεί να υπολογίσουμε του αριθμούς $a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - \lambda_{i,k} a_{k,j}^{(k-1)}$ για $k+1 \leq i \leq j \leq n$. Μετρώντας αυτές τις πράξεις βρίσκουμε ότι χρειαζόμαστε τις μισές περίπου πράξεις για την παραγοντοποίηση $A = LU$ και να πάρουμε το ισοδύναμο σύστημα $LUx = b$.

Τα σφάλματα στους υπολογισμούς οφείλονται κυρίως

από την πρόσθεση μεγάλου αριθμού σε μικρό αριθμό,

από την πρόσθεση μεγάλου αριθμού σε μικρό αριθμό,
από την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών,

από την πρόσθεση μεγάλου αριθμού σε μικρό αριθμό,
από την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών,
από την διαίρεση ενός αριθμού μ' ένα πολύ μικρό αριθμό.

από την πρόσθεση μεγάλου αριθμού σε μικρό αριθμό,
από την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών,
από την διαίρεση ενός αριθμού μ' ένα πολύ μικρό αριθμό.

από την πρόσθεση μεγάλου αριθμού σε μικρό αριθμό,
από την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών,
από την διαίρεση ενός αριθμού μ' ένα πολύ μικρό αριθμό.

Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου μια απλή διαταραχή ενός συντελεστή οδηγεί σε τελείως διαφορετική λύση.

Παράδειγμα 26. Το σύστημα

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\x - 1.01y &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

έχει λύση την $x = 101, y = 100$.

από την πρόσθεση μεγάλου αριθμού σε μικρό αριθμό,
 από την αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών,
 από την διαίρεση ενός αριθμού μ' ένα πολύ μικρό αριθμό.

Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου μια απλή διαταραχή ενός συντελεστή οδηγεί σε τελείως διαφορετική λύση.

Παράδειγμα 26. Το σύστημα

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\x - 1.01y &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

έχει λύση την $x = 101, y = 100$.

Αν αλλάξουμε το συντελεστή του y στη δεύτερη εξίσωση από 1.01 σε 0.99 παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\x - .99y &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση την $x = -99, y = -100$ η οποία είναι τελείως διαφορετική από τη λύση του συστήματος (4).

Στα λύση συστημάτων μέσω υπολογιστή εμφανίζονται σφάλματα λόγω των στρογγυλοποιήσεων των αριθμών. Ένας υπολογιστής, χρησιμοποιώντας το δεκαδικό σύστημα, αποθηκεύει τους αριθμούς στη μορφή $\pm 0.d_1d_2 \cdots d_n \times 10^k$, όπου n -αριθμός των δεκαδικών που κρατάει και $k \leq M$. ένα ακέραιος Έτσι στις πράξεις ένας αριθμός με περισσότερα από n δεκαδικά ψηφία, στρογγυλοποιείται κρατώντας τα n -πρώτα δεκαδικά. Έτσι εμφανίζονται κάποια σφάλματα στους υπολογισμούς

Στα λύση συστημάτων μέσω υπολογιστή εμφανίζονται σφάλματα λόγω των στρογγυλοποιήσεων των αριθμών. Ένας υπολογιστής, χρησιμοποιώντας το δεκαδικό σύστημα, αποθηκεύει τους αριθμούς στη μορφή $\pm 0.d_1d_2 \cdots d_n \times 10^k$, όπου n -αριθμός των δεκαδικών που κρατάει και $k \leq M$. ένα ακέραιος Έτσι στις πράξεις ένας αριθμός με περισσότερα από n δεκαδικά ψηφία, στρογγυλοποιείται κρατώντας τα n -πρώτα δεκαδικά. Έτσι εμφανίζονται κάποια σφάλματα στους υπολογισμούς

Παράδειγμα 27. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

με απαλοιφή Gauss και ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Στα λύση συστημάτων μέσω υπολογιστή εμφανίζονται σφάλματα λόγω των στρογγυλοποιήσεων των αριθμών. Ένας υπολογιστής, χρησιμοποιώντας το δεκαδικό σύστημα, αποθηκεύει τους αριθμούς στη μορφή $\pm 0.d_1d_2 \cdots d_n \times 10^k$, όπου n -αριθμός των δεκαδικών που κρατάει και $k \leq M$. ένα ακέραιος Έτσι στις πράξεις ένας αριθμός με περισσότερα από n δεκαδικά ψηφία, στρογγυλοποιείται κρατώντας τα n -πρώτα δεκαδικά. Έτσι εμφανίζονται κάποια σφάλματα στους υπολογισμούς

Παράδειγμα 27. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

με απαλοιφή Gauss και ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι η $x = 1/1.0001$, $y = 1.002/1.0001$. Ας λύσουμε τώρα το σύστημα με απαλοιφή Gauss και ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2,1}(-10^4)} \left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 10^4 & 10^4 \end{array} \right]$$

εφόσον με τις στρογγυλοποιήσεις σε τρία δεκαδικά παίρνουμε,

$$1 + 10^4 = 0.10001 \times 10^5 = 0.100 \times 10^5 = 10^4 \quad \text{και} \quad 2 + 10^4 = 0.10002 \times 10^5 = 0.100 \times 10^5 = 10^4.$$

Στα λύση συστημάτων μέσω υπολογιστή εμφανίζονται σφάλματα λόγω των στρογγυλοποιήσεων των αριθμών. Ένας υπολογιστής, χρησιμοποιώντας το δεκαδικό σύστημα, αποθηκεύει τους αριθμούς στη μορφή $\pm 0.d_1d_2 \cdots d_n \times 10^k$, όπου n -αριθμός των δεκαδικών που κρατάει και $k \leq M$. ένα ακέραιος Έτσι στις πράξεις ένας αριθμός με περισσότερα από n δεκαδικά ψηφία, στρογγυλοποιείται κρατώντας τα n -πρώτα δεκαδικά. Έτσι εμφανίζονται κάποια σφάλματα στους υπολογισμούς

Παράδειγμα 27. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

με απαλοιφή Gauss και ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι η $x = 1/1.0001$, $y = 1.002/1.0001$. Ας λύσουμε τώρα το σύστημα με απαλοιφή Gauss και ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2,1}(-10^{-4})} \left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 10^4 & 10^4 \end{array} \right]$$

εφόσον με τις στρογγυλοποιήσεις σε τρία δεκαδικά παίρνουμε,

$$1 + 10^4 = 0.10001 \times 10^5 = 0.100 \times 10^5 = 10^4 \quad \text{και} \quad 2 + 10^4 = 0.10002 \times 10^5 = 0.100 \times 10^5 = 10^4.$$

Το σύστημα έγινε άνω τριγωνικό και από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $y = 1$. Με αντικατάσταση στην πρώτη παίρνουμε $x = 0$. Η λύση αυτή είναι “μακριά” από την κανονική που είναι $x = 1$

Ένας τρόπος για να μειώσουμε τα σφάλματα στις στρογγυλοποιήσεις είναι κάθε φορά που θέλουμε να απαλείψουμε τους συντελεστές ενός αγνώστου να επιλέγουμε τον μεγαλύτερο οδηγό, κάνοντας εναλλαγή γραμμών. Αυτή μη μέθοδος ονομάζεται μερική οδήγηση.

Ένας τρόπος για να μειώσουμε τα σφάλματα στις στρογγυλοποιήσεις είναι κάθε φορά που θέλουμε να απαλείψουμε τους συντελεστές ενός αγνώστου να επιλέγουμε τον μεγαλύτερο οδηγό, κάνοντας εναλλαγή γραμμών. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται μερική οδήγηση.

Ας δούμε πως στο προηγούμενο παράδειγμα με μερική οδήγηση παίρνουμε ακριβέστερη λύση

Παράδειγμα 28. Να λυθεί το σύστημα

$$-10^{-4}x + y = 1$$

$$x + y = 2$$

με μερική οδήγηση.

Ένας τρόπος για να μειώσουμε τα σφάλματα στις στρογγυλοποιήσεις είναι κάθε φορά που θέλουμε να απαλείψουμε τους συντελεστές ενός αγνώστου να επιλέγουμε τον μεγαλύτερο οδηγό, κάνοντας εναλλαγή γραμμών. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται μερική οδήγηση.

Ας δούμε πως στο προηγούμενο παράδειγμα με μερική οδήγηση παίρνουμε ακριβέστερη λύση

Παράδειγμα 28. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

με μερική οδήγηση.

Η μερική οδήγηση επιλέγει το μεγαλύτερο οδηγό σε κάθε στήλη. Επομένως στο σύστημά μας θα κάνουμε εναλλαγή της πρώτης με τη δεύτερη γραμμή. Με αυτή την εναλλαγή παίρνουμε

$$\left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -10^{-4} & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2,1}(-10^{-4})} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

εφόσον με τις στρογγυλοποιήσεις σε τρία δεκαδικά παίρνουμε, Το παραπάνω σύστημα μας δίνει σύστημα $y = 1$ και $x = 1$ που είναι λύση αρκετά κοντινή στην πραγματική λύση.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα πως μια εναλλαγή γραμμών δίνει καλύτερο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το σύστημα

$$14x + 2y + 4z = -10$$

$$16x + 40y - 4z = 55$$

$$-2x + 4y - 16z = -38$$

Αρχικά θα το λύσουμε με απαλοιφή Gauss. Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 2 & 4 & -10 \\ 16 & 40 & -4 & 55 \\ -2 & 4 & -16 & -38 \end{array} \right]$$

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα πως μια εναλλαγή γραμμών δίνει καλύτερο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το σύστημα

$$14x + 2y + 4z = -10$$

$$16x + 40y - 4z = 55$$

$$-2x + 4y - 16z = -38$$

Αρχικά θα το λύσουμε με απαλοιφή Gauss. Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 2 & 4 & -10 \\ 16 & 40 & -4 & 55 \\ -2 & 4 & -16 & -38 \end{array} \right]$$

Μηδενίζουμε τους συντελεστές του x στην δεύτερη και τρίτη εξίσωση. Ο πρώτος οδηγός είναι ο $14 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας με τους πίνακες ${}_{2,1}(-16/14)$, ${}_{3,1}(-2/14)$ παίρνουμε,

$${}_{E_{3,1}}(-2/14){}_{E_{2,1}}(-16/14)\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & +2 & +4 & -10 \\ 0 & 37.714 & -8.571 & 68.428 \\ 0 & +4.286 & -15.428 & -39.428 \end{array} \right]$$

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 37.714. Απαλείφουμε τον συντελεστή του y στη τρίτη εξίσωση. Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{3,2} = 4.286/37.714$ και πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα $E_{3,2}(4, 286/37.714)$.

$$E_{3,2}(4.286/37.714)E_{3,1}(-2/14)E_{2,1}(-16/14)\mathbb{A}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & +2 & +4 & -10 \\ 0 & 37.714 & -8.571 & 68.428 \\ 0 & 0 & -14.454 & -47.205 \end{array} \right]$$

Έτσι παίρνουμε $z = -47.205 / -14.454 = 3.266$. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = (68.428 + 8.571 \cdot 3.266) / 37.714 = 2.557$. Τέλος από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = (-10 - 4 \cdot 3.266 - 2 \cdot 2.557) / 14 = -2.012$.

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 37.714. Απαλείφουμε τον συντελεστή του y στη τρίτη εξίσωση. Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{3,2} = 4.286/37.714$ και πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα $E_{3,2}(4, 286/37.714)$.

$$E_{3,2}(4.286/37.714)E_{3,1}(-2/14)E_{2,1}(-16/14)\mathbb{A}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & +2 & +4 & -10 \\ 0 & 37.714 & -8.571 & 68.428 \\ 0 & 0 & -14.454 & -47.205 \end{array} \right]$$

Έτσι παίρνουμε $z = -47.205 / -14.454 = 3.266$. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = (68.428 + 8.571 \cdot 3.266) / 37.714 = 2.557$. Τέλος από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = (-10 - 4 \cdot 3.266 - 2 \cdot 2.557) / 14 = -2.012$.

Εάν στο προηγούμενο σύστημα κάνουμε εναλλαγή της πρώτης με τη δεύτερη εξίσωση ώστε ο πρώτος οδηγός να είναι μεγαλύτερος αριθμός, παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 16x + 40y - 4z &= 55 \\ 14x + 2y + 4z &= -10 \\ -2x + 4y - 16z &= -38 \end{aligned}$$

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 37.714. Απαλείφουμε τον συντελεστή του y στη τρίτη εξίσωση. Παίρνουμε τον αριθμό $\lambda_{3,2} = 4.286/37.714$ και πολλαπλασιάζουμε με τον πίνακα $E_{3,2}(4, 286/37.714)$.

$$E_{3,2}(4.286/37.714)E_{3,1}(-2/14)E_{2,1}(-16/14)\mathbb{A} \\ = \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & +2 & +4 & -10 \\ 0 & 37.714 & -8.571 & 68.428 \\ 0 & 0 & -14.454 & -47.205 \end{array} \right]$$

Έτσι παίρνουμε $z = -47.205 / -14.454 = 3.266$. Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = (68.428 + 8.571 \cdot 3.266) / 37.714 = 2.557$. Τέλος από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = (-10 - 4 \cdot 3.266 - 2 \cdot 2.557) / 14 = -2.012$.

Εάν στο προηγούμενο σύστημα κάνουμε εναλλαγή της πρώτης με τη δεύτερη εξίσωση ώστε ο πρώτος οδηγός να είναι μεγαλύτερος αριθμός, παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 16x + 40y - 4z &= 55 \\ 14x + 2y + 4z &= -10 \\ -2x + 4y - 16z &= -38 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα με απαλοιφή Gauss, βρίσκουμε τη λύση $x = -1.999$, $y = 2.5$ και $z = 3.250$. Η λύση αυτή δεν είναι “πολύ μακριά” από την πρώτη αφού οι διαφορές είναι μικρότερες από $2/100$.

Η ακριβής λύση του συστήματος είναι η $x = -2$, $y = 2.5$ και $z = 3.25$.

Ορίζουσες

Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας, ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός

$$\det(\mathbb{A}) = ad - cb.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ συμβολίζεται επίσης με $\det(\mathbb{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Ορίζουσες

Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας, ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός

$$\det(\mathbb{A}) = ad - cb.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ συμβολίζεται επίσης με $\det(\mathbb{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Παραδείγματα 1. 1) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 10$.

Ορίζουσες

Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας, ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός

$$\det(\mathbb{A}) = ad - cb.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ συμβολίζεται επίσης με $\det(\mathbb{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Παραδείγματα 1. 1) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 10$.

2) Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 5 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 0$.

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},$$

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Για τους παραπάνω πίνακες έχουμε ότι

$$\det \mathbb{M}_{1,1} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3,$$

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Για τους παραπάνω πίνακες έχουμε ότι

$$\det \mathbb{M}_{1,1} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3, \quad \det \mathbb{M}_{1,2} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6,$$

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Για τους παραπάνω πίνακες έχουμε ότι

$$\det \mathbb{M}_{1,1} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3, \quad \det \mathbb{M}_{1,2} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6,$$

Ορισμός 29. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ένας $n \times n$ πίνακας τότε ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει διαγράφοντας της i -γραμμή και τη j -στήλη του $\mathbb{A}$ ονομάζεται (i, j) -ελάσσων (minor) πίνακας του $\mathbb{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$. Εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο πίνακα αναφέρεται ο (i, j) -ελάσσων πίνακας θα γράφουμε $\mathbb{M}_{i,j}$ αντί για $\mathbb{M}_{i,j}(\mathbb{A})$.

Παράδειγμα 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Για τους παραπάνω πίνακες έχουμε ότι

$$\det \mathbb{M}_{1,1} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3, \quad \det \mathbb{M}_{1,2} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6,$$

και

$$\det \mathbb{M}_{1,3} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3,$$

Ο ορισμός της ορίζουσας για $n \times n$ - πίνακες, $n \geq 3$, γίνεται επαγωγικά.

Ο ορισμός της ορίζουσας για $n \times n$ -πίνακες, $n \geq 3$, γίνεται επαγωγικά.

Ορισμός 30. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας $n \times n$ -πίνακας (i,j) -συμπαράγοντα ονομάζουμε τον αριθμό

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\mathbb{M}_{i,j}).$$

Ο ορισμός της ορίζουσας για $n \times n$ -πίνακες, $n \geq 3$, γίνεται επαγωγικά.

Ορισμός 30. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας $n \times n$ -πίνακας (i, j) -συμπαράγοντα ονομάζουμε τον αριθμό

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\mathbb{M}_{i,j}).$$

Ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= a_{11}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \cdots + a_{1,n}A_{1,n} \\ &= a_{11} \det(\mathbb{M}_{1,1}) - a_{1,2} \det(\mathbb{M}_{1,2}) + \cdots + (-1)^{i+1} a_{1,i} \det(\mathbb{M}_{1,i}) + \cdots + \end{aligned}$$

Ο ορισμός της ορίζουσας για $n \times n$ -πίνακες, $n \geq 3$, γίνεται επαγωγικά.

Ορισμός 30. Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ είναι ένας $n \times n$ -πίνακας (i,j) -συμπαράγοντα ονομάζουμε τον αριθμό

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\mathbb{M}_{i,j}).$$

Ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= a_{11}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \cdots + a_{1,n}A_{1,n} \\ &= a_{11} \det(\mathbb{M}_{1,1}) - a_{1,2} \det(\mathbb{M}_{1,2}) + \cdots + (-1)^{i+1} a_{1,i} \det(\mathbb{M}_{1,i}) + \cdots + \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ τότε τους ελάχιστονες πίνακες τους έχουμε
βρει στο Παράδειγμα 2. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 1 \det(\mathbb{M}_{1,1}) - 2 \det(\mathbb{M}_{1,2}) + 3 \det(\mathbb{M}_{1,3}) \\ &= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbf{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbb{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbb{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbf{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,3}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbf{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,3}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\mathbf{M}_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbf{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,3}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\mathbf{M}_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,4}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbf{M}_{1,1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,1}) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,2}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,3}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\mathbf{M}_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{M}_{1,4}) = 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Επομένως

$$\det(\mathbb{A}) = 2 \det(\mathbf{M}_{1,1}) - 0 \det(\mathbf{M}_{1,2}) + 0 \det(\mathbf{M}_{1,3}) - 3 \det(\mathbf{M}_{1,4}) = 0.$$