

Θεώρημα 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι $(m \times n)$ -πίνακες και λ, r αριθμοί τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

Θεώρημα 2. *Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι $(m \times n)$ -πίνακες και λ, r αριθμοί τότε*

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$$

Θεώρημα 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι $(m \times n)$ -πίνακες και λ, r αριθμοί τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$$

$$\mathbb{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbb{A}$$

Θεώρημα 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι $(m \times n)$ -πίνακες και λ, r αριθμοί τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$$

$$\mathbb{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbb{A}$$

$$\lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}$$

Θεώρημα 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι $(m \times n)$ -πίνακες και λ, r αριθμοί τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$$

$$\mathbb{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbb{A}$$

$$\lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}$$

$$(\lambda + r)\mathbb{A} = \lambda\mathbb{A} + r\mathbb{A}$$

Θεώρημα 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι $(m \times n)$ -πίνακες και λ, r αριθμοί τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$$

$$\mathbb{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbb{A}$$

$$\lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}$$

$$(\lambda + r)\mathbb{A} = \lambda\mathbb{A} + r\mathbb{A}$$

$$\lambda(r\mathbb{A}) = \lambda r\mathbb{A} = r(\lambda\mathbb{A})$$

Έχουμε δει ότι αν $A = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ πίνακας και $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα

του $\mathbb{R}^n$ τότε το γινόμενο Ax είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
 Ax &= \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} \\
 &= x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Έχουμε δει ότι αν $\mathbb{A} = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα

του $\mathbb{R}^n$ τότε το γινόμενο $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Δηλαδή το γινόμενο του πίνακα $\mathbb{A}$ με το διάνυσμα $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ είναι ίσο με το άθροισμα του γινομένου των στηλών του $\mathbb{A}$ με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του $\mathbf{x}$.

Έστω $\mathbb{A} = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n,p}$ ένας $n \times p$ πίνακας.

Έστω $\mathbb{A} = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n,p}$ ένας $n \times p$ πίνακας.

Εάν $b_i, i \leq p$ τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{B}$, τότε $\mathbb{A}b_i$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$.

Έστω $\mathbb{A} = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n,p}$ ένας $n \times p$ πίνακας.

Εάν $\mathbb{b}_i, i \leq p$ τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{B}$, τότε $\mathbb{A}\mathbb{b}_i$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Το γινόμενο των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ορίζεται να είναι ο $m \times p$ πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbb{A}\mathbb{b}_i, i \leq p$,

Έστω $\mathbb{A} = (a)_{i,j=1}^{m,n}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^{n,p}$ ένας $n \times p$ πίνακας.

Εάν $\mathbb{b}_i, i \leq p$ τα διανύσματα στήλες του $\mathbb{B}$, τότε $\mathbb{A}\mathbb{b}_i$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Το γινόμενο των $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ορίζεται να είναι ο $m \times p$ πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $\mathbb{A}\mathbb{b}_i, i \leq p$, δηλαδή

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbb{A}\mathbb{b}_1 & \mathbb{A}\mathbb{b}_2 & \cdots & \mathbb{A}\mathbb{b}_p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Σε αναλυτική μορφή

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{1,i} b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1,i} b_{i,p} \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{2,i} b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2,i} b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^n a_{m,i} b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{m,i} b_{i,p} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$AB = (c_{i,j})_{i,j}^{m,p} \quad \text{όπου} \quad c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

The diagram illustrates the calculation of the element c_{ij} in the product matrix C . It shows three matrices:

- Matrix A (labeled L_i):** A matrix with rows $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. The row $a_{i1} \dots a_{in}$ is highlighted in pink. An arrow points from this row to the a_{ik} element.
- Matrix B :** A matrix with columns $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$. The column $b_{1j} \dots b_{nj}$ is highlighted in pink. An arrow points from this column to the b_{kj} element.
- Matrix C (labeled C_j):** A matrix with rows $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{ij}, \dots, c_{nj}$. The element c_{ij} is highlighted in pink.

The diagram shows that the element c_{ij} is the dot product of the i -th row of A and the j -th column of B .

Στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{B}$ έχουμε ότι

το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι το γινόμενο της i -γραμμής του $\mathbb{A}$ με την j -στήλη του $\mathbb{B}$, δηλαδή είναι το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix}$$

Στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{B}$ έχουμε ότι

το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι το γινόμενο της i -γραμμής του $\mathbb{A}$ με την j -στήλη του $\mathbb{B}$, δηλαδή είναι το γινόμενο

$$[a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,n}] \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix}$$

η i -γραμμή του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι το γινόμενο της i -γραμμής του $\mathbb{A}$ με τον πίνακα $\mathbb{B}$,

Στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{B}$ έχουμε ότι

το (i, j) στοιχείο του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι το γινόμενο της i -γραμμής του $\mathbb{A}$ με την j -στήλη του $\mathbb{B}$, δηλαδή είναι το γινόμενο

$$[a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,n}] \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{bmatrix}$$

η i -γραμμή του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι το γινόμενο της i -γραμμής του $\mathbb{A}$ με τον πίνακα $\mathbb{B}$,
Η j -στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι το γινόμενο του πίνακα $\mathbb{A}$ με την j -στήλη του $\mathbb{B}$.

Παράδειγμα 3. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -2 & 24 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 4. Εάν A είναι $(m \times n)$ -πίνακας και B, C πίνακες ώστε να ορίζονται τα παρακάτω γινόμενα και αθροίσματα. Τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

Θεώρημα 4. Εάν A είναι $(m \times n)$ -πίνακας και B, C πίνακες ώστε να ορίζονται τα παρακάτω γινόμενα και αθροίσματα. Τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

Θεώρημα 4. Εάν A είναι $(m \times n)$ -πίνακας και B, C πίνακες ώστε να ορίζονται τα παρακάτω γινόμενα και αθροίσματα. Τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

Θεώρημα 4. Εάν A είναι $(m \times n)$ -πίνακας και B, C πίνακες ώστε να ορίζονται τα παρακάτω γινόμενα και αθροίσματα. Τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B$$

Θεώρημα 4. Εάν A είναι $(m \times n)$ -πίνακας και B, C πίνακες ώστε να ορίζονται τα παρακάτω γινόμενα και αθροίσματα. Τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B$$

$$I_m A = A$$

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ για κάθε $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \mathbb{A}\mathbb{C}$$

αλλά δεν ισχύει $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \mathbb{A}\mathbb{C}$$

αλλά δεν ισχύει $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

γ) Εάν $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{0}$ δεν σημαίνει ότι πρέπει $\mathbb{A} = \mathbb{0}$ ή $\mathbb{B} = \mathbb{0}$.

Παρατηρήσεις 5. α) Για τους τετραγωνικούς πίνακες δεν ισχύει $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ για κάθε $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

β) Η ισότητα $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$ δεν συνεπάγεται πάντα ότι $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \mathbb{A}\mathbb{C}$$

αλλά δεν ισχύει $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

γ) Εάν $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{0}$ δεν σημαίνει ότι πρέπει $\mathbb{A} = \mathbb{0}$ ή $\mathbb{B} = \mathbb{0}$.

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

αλλά κανένας από τους πίνακες δεν είναι μηδενικός.

Ορισμός 6. α) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και τουλάχιστον ένας από τους $a_{i,i}$, $i \leq n$, δεν είναι μηδέν.

Ορισμός 6. α) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και τουλάχιστον ένας από τους $a_{i,i}$, $i \leq n$, δεν είναι μηδέν.

β) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται τριδιαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > 1$.

- Ορισμός 6.** α) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και τουλάχιστον ένας από τους $a_{i,i}$, $i \leq n$, δεν είναι μηδέν.
- β) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται τριδιαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > 1$.
- γ) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται $2k + 1$ -διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > k$

- Ορισμός 6.** α) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και τουλάχιστον ένας από τους $a_{i,i}$, $i \leq n$, δεν είναι μηδέν.
- β) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται τριδιαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > 1$.
- γ) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται $2k + 1$ -διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > k$.
- Σ' ένα τριδιαγώνιο πίνακα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στη διαγώνιο και επίσης στις θέσεις που προκύπτουν μετακινώντας τη διαγώνιο “ ακριβώς μια θέση προς τα πάνω” και “ ακριβώς μια θέση προς τα κάτω”.

- Ορισμός 6.** α) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και τουλάχιστον ένας από τους $a_{i,i}, i \leq n$, δεν είναι μηδέν.
- β) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται τριδιαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > 1$.
- γ) Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ονομάζεται $2k + 1$ -διαγώνιος εάν $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j με $|i - j| > k$
- Σ' ένα τριδιαγώνιο πίνακα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στη διαγώνιο και επίσης στις θέσεις που προκύπτουν μετακινώντας τη διαγώνιο “ ακριβώς μια θέση προς τα πάνω” και “ ακριβώς μια θέση προς τα κάτω”.
- Σ' ένα $2k + 1$ διαγώνιο πίνακα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στη διαγώνιο και επίσης στις θέσεις που προκύπτουν μετακινώντας τη διαγώνιο “ k - θέσεις προς τα πάνω” και “ k - θέσεις προς τα κάτω”.

Παράδειγμα 7. Εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

τότε ο A είναι τριδιαγώνιος και ο B πενταδιαγώνιος.

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι άνω τριγωνικός αν

$$a_{k,1} = a_{k,2} = \cdots = a_{k-1,k} = 0 \text{ για κάθε } k = 2, 3, \dots, n.$$

κάτω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι άνω τριγωνικός αν

$$a_{k,1} = a_{k,2} = \cdots = a_{k-1,k} = 0 \text{ για κάθε } k = 2, 3, \dots, n.$$

κάτω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι άνω τριγωνικός αν

$$a_{k,1} = a_{k,2} = \cdots = a_{k-1,k} = 0 \text{ για κάθε } k = 2, 3, \dots, n.$$

κάτω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι κάτω τριγωνικός αν

$$a_{k,k+1} = a_{k,k+2} = \cdots = a_{k,n} = 0 \text{ για κάθε } k = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι άνω τριγωνικός αν

$$a_{k,1} = a_{k,2} = \cdots = a_{k-1,k} = 0 \text{ για κάθε } k = 2, 3, \dots, n.$$

κάτω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι κάτω τριγωνικός αν

$$a_{k,k+1} = a_{k,k+2} = \cdots = a_{k,n} = 0 \text{ για κάθε } k = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Σ' ένα άνω τριγωνικό πίνακα τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, και άρα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ορισμός 8. Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ονομάζεται

άνω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι άνω τριγωνικός αν

$$a_{k,1} = a_{k,2} = \cdots = a_{k-1,k} = 0 \text{ για κάθε } k = 2, 3, \dots, n.$$

κάτω τριγωνικός εάν τα στοιχεία που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Ισοδύναμα ο $\mathbb{A}$ είναι κάτω τριγωνικός αν

$$a_{k,k+1} = a_{k,k+2} = \cdots = a_{k,n} = 0 \text{ για κάθε } k = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Σ' ένα άνω τριγωνικό πίνακα τα στοιχεία που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, και άρα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ένας κάτω τριγωνικός πίνακας έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι

άνω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι άνω τριγωνικοί.

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι

άνω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι άνω τριγωνικοί.
κάτω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι κάτω τριγωνικοί.

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι

άνω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι άνω τριγωνικοί.
κάτω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι κάτω τριγωνικοί.

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι

άνω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι άνω τριγωνικοί.
 κάτω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι κάτω
 τριγωνικοί.

Για το άθροισμα είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης.
 Ας δούμε γιατί ισχύει και για το γινόμενο. Έστω $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ($n \times n$) άνω τριγωνικοί
 πίνακες. Τότε έχουμε ότι

$$a_{i,1} = a_{i,2} = \dots a_{i,i-1} = 0 \text{ για κάθε } i \geq 2 \quad (2)$$

και

$$b_{r+1,r} = b_{r+2,r} = \dots = b_{n,r} = 0 \text{ για κάθε } r \geq 2. \quad (3)$$

Πρόταση 1. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι

άνω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι άνω τριγωνικοί.
 κάτω τριγωνικοί πίνακες τότε και οι πίνακες $\mathbb{A} + \mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι κάτω τριγωνικοί.

Για το άθροισμα είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης. Ας δούμε γιατί ισχύει και για το γινόμενο. Έστω $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ($n \times n$) άνω τριγωνικοί πίνακες. Τότε έχουμε ότι

$$a_{i,1} = a_{i,2} = \dots a_{i,i-1} = 0 \text{ για κάθε } i \geq 2 \quad (2)$$

και

$$b_{r+1,r} = b_{r+2,r} = \dots = b_{n,r} = 0 \text{ για κάθε } r \geq 2. \quad (3)$$

Τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι τα $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ με $j < i$. Τότε

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} 0 \text{ από (2) για τα } a_{i,k} \text{ και την (3) για τα } b_{k,j}, j < i \leq k \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$ βρείτε την 1η στήλη του $\mathbb{B}$.

Εάν $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ η πρώτη στήλη του $\mathbb{B}$ τότε

$$\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -3 \\ -3x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $x_2 = 2$ και $x_1 = 3$.

Άσκηση . Εάν στον πίνακα $\mathbb{B}$ η τρίτη στήλη του είναι ίση με το άθροισμα των δύο πρώτων δείξτε ότι το ίδιο ισχύει και στον $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

Λύση . Η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι η $\mathbb{A}\mathbb{b}_3$ όπου $\mathbb{b}_3$ είναι η τρίτη στήλη του $\mathbb{B}$. Επειδή $\mathbb{b}_3 = \mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2$ παίρνουμε ότι και

$$\mathbb{A}\mathbb{b}_3 = \mathbb{A}(\mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2) = \mathbb{A}\mathbb{b}_1 + \mathbb{A}\mathbb{b}_2.$$

Επομένως η τρίτη στήλη του $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι ίση με το άθροισμα των δύο πρώτων στηλών του.

Άσκηση 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι πίνακες $\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3 \dots, \mathbb{A}^n$.

Άσκηση 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι πίνακες $\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3 \dots, \mathbb{A}^n$.

Λύση . Έχουμε ότι

$$\mathbb{A}^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 + 1/4 & 1/4 + 1/4 \\ 1/4 + 1/4 & 1/4 + 1/4 \end{bmatrix} = \mathbb{A}.$$

Άρα $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}$ και με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B ώστε

$$AB = I_n = BA.$$

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B ώστε

$$AB = I_n = BA.$$

Τον πίνακα B τον συμβολίζουμε με A^{-1} .

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B ώστε

$$AB = I_n = BA.$$

Τον πίνακα B τον συμβολίζουμε με A^{-1} .

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Τον πίνακα $\mathbb{B}$ τον συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{-1}$.

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι π.χ ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Τον πίνακα $\mathbb{B}$ τον συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{-1}$.

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι π.χ ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Εάν υπήρχε ο $\mathbb{A}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Τον πίνακα $\mathbb{B}$ τον συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{-1}$.

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι π.χ ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Εάν υπήρχε ο $\mathbb{A}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Τον πίνακα $\mathbb{B}$ τον συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{-1}$.

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι π.χ ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Εάν υπήρχε ο $\mathbb{A}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1} \mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Τον πίνακα $\mathbb{B}$ τον συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{-1}$.

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι π.χ ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Εάν υπήρχε ο $\mathbb{A}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{που δεν ισχύει.}$$

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός 9. Ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbb{B}$ ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_n = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Τον πίνακα $\mathbb{B}$ τον συμβολίζουμε με $\mathbb{A}^{-1}$.

Δεν είναι όλοι οι πίνακες αντιστρέψιμοι π.χ ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Εάν υπήρχε ο $\mathbb{A}^{-1}$ τότε

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{που δεν ισχύει.}$$

Ορισμός 10. Ένας πίνακας $\mathbb{A}$ που δεν αντιστρέφεται ονομάζεται ιδιάζων πίνακας. Εάν ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος λέμε ότι είναι μη-ιδιάζων.

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 11. Εάν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 11. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$.

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 11. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$.

Απόδειξη.

Είναι απλό να ελέγχουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 11. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$.

Απόδειξη.

Είναι απλό να ελέγχουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Αντιστρόφως ας υποθέσουμε ότι $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Θα δείξουμε ότι ο $\mathbb{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 11. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$.

Απόδειξη.

Είναι απλό να ελέγχουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Αντιστρόφως ας υποθέσουμε ότι $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Θα δείξουμε ότι ο $\mathbb{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Ας υποθέσουμε ότι είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $\mathbb{B}$ με $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_2 = \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Ας δούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας 2×2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 11. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Σε αυτή την περίπτωση $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A}$.

Απόδειξη.

Είναι απλό να ελέγχουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Αντιστρόφως ας υποθέσουμε ότι $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Θα δείξουμε ότι ο $\mathbb{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Ας υποθέσουμε ότι είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $\mathbb{B}$ με $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_2 = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Αυτό μας δίνει το σύστημα $\alpha x_1 + \beta x_3 = 1, \alpha x_2 + \beta x_4 = 0, \gamma x_1 + \delta x_3 = 0$ και $\gamma x_2 + \delta x_4 = 1$.



Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0\ 0\ 0\ 0\ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\gamma = 0$ τότε από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$.

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0\ 0\ 0\ 0\ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\gamma = 0$ τότε από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$.

Τότε όμως η τελευταία εξίσωση γράφεται $0x_2 + 0x_4 = 1$ που είναι άτοπο.

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0\ 0\ 0\ 0\ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\gamma = 0$ τότε από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$.

Τότε όμως η τελευταία εξίσωση γράφεται $0x_2 + 0x_4 = 1$ που είναι άτοπο. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0\ 0\ 0\ 0\ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\gamma = 0$ τότε από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$.

Τότε όμως η τελευταία εξίσωση γράφεται $0x_2 + 0x_4 = 1$ που είναι άτοπο. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\alpha = 0$ από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ παίρνουμε ότι $\beta\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$ ή $\gamma = 0$.

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0\ 0\ 0\ 0\ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\gamma = 0$ τότε από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$.

Τότε όμως η τελευταία εξίσωση γράφεται $0x_2 + 0x_4 = 1$ που είναι άτοπο. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\alpha = 0$ από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ παίρνουμε ότι $\beta\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$ ή $\gamma = 0$.

Εάν $\alpha = \beta = 0$ τότε δεν έχουμε λύση εφόσον θα πρέπει $0x_1 + 0x_3 = 1$.

Εάν $\alpha \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta - \beta \frac{\gamma}{\alpha} & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 \end{array} \right]$$

Εάν $\gamma \neq 0$ τότε η τρίτη γραμμή είναι $[0\ 0\ 0\ 0\ \gamma/\alpha]$ και άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\gamma = 0$ τότε από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ εφόσον $\alpha \neq 0$.

Τότε όμως η τελευταία εξίσωση γράφεται $0x_2 + 0x_4 = 1$ που είναι άτοπο. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

Εάν $\alpha = 0$ από την $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ παίρνουμε ότι $\beta\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$ ή $\gamma = 0$.

Εάν $\alpha = \beta = 0$ τότε δεν έχουμε λύση εφόσον θα πρέπει $0x_1 + 0x_3 = 1$.

Εάν $\alpha = \gamma = 0$ παρόμοια με πριν βρίσκουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύση.

Παρατήρηση 12. Εάν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι ο πίνακας $A + B$ δεν είναι κατανάγκη αντιστρέψιμος.

Παρατήρηση 12. Εάν οι πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμοι ο πίνακας $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ δεν είναι κατανάγκη αντιστρέψιμος.

Για παράδειγμα εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ τότε από το παραπάνω θεώρημα οι $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμοι και

$$\mathbb{A}^{-1} = \left(\frac{1}{-2}\right) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B}^{-1} = \left(\frac{1}{-10}\right) \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 12. Εάν οι πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμοι ο πίνακας $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ δεν είναι κατανάγκη αντιστρέψιμος.

Για παράδειγμα εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ τότε από το παραπάνω θεώρημα οι $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμοι και

$$\mathbb{A}^{-1} = \left(\frac{1}{-2}\right) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B}^{-1} = \left(\frac{1}{-10}\right) \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος εφόσον η ορίζουσα του είναι μηδέν.

Θεώρημα 13. Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ έχει μοναδική λύση.

Θεώρημα 13. Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη.

Το διάνυσμα $\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}$ είναι λύση εφόσον

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{b} = \mathbb{b}.$$

Θεώρημα 13. Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη.

Το διάνυσμα $\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}$ είναι λύση εφόσον

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{b} = \mathbb{b}.$$

Η λύση είναι μοναδική εφόσον εάν

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}\mathbb{y}$$

Θεώρημα 13. Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη.

Το διάνυσμα $\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}$ είναι λύση εφόσον

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{b} = \mathbb{b}.$$

Η λύση είναι μοναδική εφόσον εάν

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}\mathbb{y} \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{x} - \mathbb{y}) = \mathbb{0}$$

Θεώρημα 13. Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη.

Το διάνυσμα $\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}$ είναι λύση εφόσον

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{b} = \mathbb{b}.$$

Η λύση είναι μοναδική εφόσον εάν

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{A}\mathbb{y} \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{x} - \mathbb{y}) = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}(\mathbb{x} - \mathbb{y}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{0}$$

Θεώρημα 13. Εάν ο $n \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη.

Το διάνυσμα $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}$ είναι λύση εφόσον

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{b}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{b} = \mathbb{b}.$$

Η λύση είναι μοναδική εφόσον εάν

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{A}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$



Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$

b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$

b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$

b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Απόδειξη.

(1) Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$.

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

- a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$
- b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Απόδειξη.

(1) Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$.
 Παίρνοντας $\mathbb{C} = \mathbb{A}$ έχουμε ότι ισχύουν οι ισότητες και άρα $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

- a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$
- b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Απόδειξη.

- (1) Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$.
Παίρνοντας $\mathbb{C} = \mathbb{A}$ έχουμε ότι ισχύουν οι ισότητες και άρα $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.
- (2) Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{A}\mathbb{B}$ από αριστερά με τον $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$ παίρνουμε

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

- a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$
- b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Απόδειξη.

- (1) Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$.
Παίρνοντας $\mathbb{C} = \mathbb{A}$ έχουμε ότι ισχύουν οι ισότητες και άρα $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.
- (2) Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{A}\mathbb{B}$ από αριστερά με τον $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$ παίρνουμε

$$(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{I}\mathbb{B} = \mathbb{I}.$$

Πρόταση 2. Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ αντιστρέψιμοι τότε

- a) $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$
- b) ο πίνακας $\mathbb{A}\mathbb{B}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$$

Απόδειξη.

- (1) Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει πίνακας $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$.
Παίρνοντας $\mathbb{C} = \mathbb{A}$ έχουμε ότι ισχύουν οι ισότητες και άρα $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.
- (2) Πολλαπλασιάζοντας τον $\mathbb{A}\mathbb{B}$ από αριστερά με τον $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$ παίρνουμε

$$(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}^{-1}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{I}\mathbb{B} = \mathbb{I}.$$

Όμοια δείχνουμε $\mathbb{A}\mathbb{B}(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}) = \mathbb{I}$. □

Παρατήρηση 14. Εάν $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_k$ είναι αντιστρέψιμοι τότε

$$(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2 \cdots \mathbb{A}_k)^{-1} = \mathbb{A}_k^{-1} \cdots \mathbb{A}_2^{-1} \mathbb{A}_1^{-1}.$$

Παρατήρηση 14. Εάν $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι αντιστρέψιμοι τότε

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε δει ότι δεν ισχύει $AB = BA$ πάντα. Έτσι εάν για τον πίνακα A έχουμε βρει ένα πίνακα B με $BA = I$ δεν συνεπάγεται ότι ο B είναι ο αντίστροφος του A .

Παρατήρηση 14. Εάν $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι αντιστρέψιμοι τότε

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε δει ότι δεν ισχύει $AB = BA$ πάντα. Έτσι εάν για τον πίνακα A έχουμε βρει ένα πίνακα B με $BA = I$ δεν συνεπάγεται ότι ο B είναι ο αντίστροφος του A .

Ορισμός 15. Ο πίνακας B ονομάζεται

αριστερός αντίστροφος του A εάν $BA = I_n$

Παρατήρηση 14. Εάν $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι αντιστρέψιμοι τότε

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε δει ότι δεν ισχύει $AB = BA$ πάντα. Έτσι εάν για τον πίνακα A έχουμε βρει ένα πίνακα B με $BA = I$ δεν συνεπάγεται ότι ο B είναι ο αντίστροφος του A .

Ορισμός 15. Ο πίνακας B ονομάζεται

αριστερός αντίστροφος του A εάν $BA = I_n$

δεξιός αντίστροφος του A εάν $AB = I_m$.

Παράδειγμα 16. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε για τους πίνακες

$$\mathbb{B} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \text{ ισχύει}$$

a) $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_2 = \mathbb{C}\mathbb{A}$

b) $\mathbb{A}\mathbb{C} \neq \mathbb{I}_2$ και το γινόμενο $\mathbb{B}\mathbb{C}$ δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 16. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε για τους πίνακες

$$\mathbb{B} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \text{ ισχύει}$$

a) $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_2 = \mathbb{C}\mathbb{A}$

b) $\mathbb{A}\mathbb{C} \neq \mathbb{I}_2$ και το γινόμενο $\mathbb{B}\mathbb{C}$ δεν ορίζεται.

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\mathbb{A} &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} (-11)(-3) + (-10)4 + 16 \cdot 1 & (-11)(-4) + (-10)6 + 16 \cdot 1 \\ 7(-3) + 8 \cdot 4 + (-11)1 & 7(-4) + 8 \cdot 6 + (-11)1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 16. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε για τους πίνακες

$$\mathbb{B} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \text{ ισχύει}$$

a) $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_2 = \mathbb{C}\mathbb{A}$

b) $\mathbb{A}\mathbb{C} \neq \mathbb{I}_2$ και το γινόμενο $\mathbb{B}\mathbb{C}$ δεν ορίζεται.

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\mathbb{A} &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} (-11)(-3) + (-10)4 + 16 \cdot 1 & (-11)(-4) + (-10)6 + 16 \cdot 1 \\ 7(-3) + 8 \cdot 4 + (-11)1 & 7(-4) + 8 \cdot 6 + (-11)1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathbb{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0(-3) + (-\frac{1}{2})4 + 3 \cdot 1 & 0(-4) + (-\frac{1}{2})6 + 3 \cdot 1 \\ 0(-3) + (\frac{1}{2})4 + (-2) \cdot 1 & 0(-4) + (\frac{1}{2})6 + (-2) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}\mathbb{C} &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (-3)0 + (-4)0 & (-3) \cdot (-\frac{1}{2}) + (-4)\frac{1}{2} & (-3)3 + (-4)(-2) \\ 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 6 \cdot \frac{1}{2} & 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{I}_3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{C} &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3)0 + (-4)0 & (-3) \cdot (-\frac{1}{2}) + (-4)\frac{1}{2} & (-3)3 + (-4)(-2) \\ 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 6 \cdot \frac{1}{2} & 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

Το γινόμενο $\mathbb{B}\mathbb{C}$ δεν ορίζεται γιατί ο $\mathbb{B}$ είναι (2×3) -πίνακας και ο $\mathbb{C}$ είναι (2×3) .

Παρατήρηση 17.

Ένας διαγώνιος πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος όταν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη μηδενικά.

Παρατήρηση 17.

Ένας διαγώνιος πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος όταν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη μηδενικά.

Είναι άμεσο να δούμε ότι για τον διαγώνιο πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ισχύει ότι $\mathbb{A}^{-1} = (\beta_{i,j})_{i,j}$ όπου $\beta_{i,i} = a_{i,i}^{-1}$ για κάθε i και $\beta_{i,j} = 0$ για $i \neq j$.

Παρατήρηση 17.

Ένας διαγώνιος πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος όταν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη μηδενικά.

Είναι άμεσο να δούμε ότι για τον διαγώνιο πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ισχύει ότι

$\mathbb{A}^{-1} = (\beta_{i,j})_{i,j}$ όπου $\beta_{i,i} = a_{i,i}^{-1}$ για κάθε i και $\beta_{i,j} = 0$ για $i \neq j$.

Δηλαδή αν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση 17.

Ένας διαγώνιος πίνακας $\mathbb{A}$ είναι αντιστρέψιμος όταν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη μηδενικά.

Είναι άμεσο να δούμε ότι για τον διαγώνιο πίνακα $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ ισχύει ότι

$\mathbb{A}^{-1} = (\beta_{i,j})_{i,j}$ όπου $\beta_{i,i} = a_{i,i}^{-1}$ για κάθε i και $\beta_{i,j} = 0$ για $i \neq j$.

Δηλαδή αν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \end{matrix}$$
· Βρείτε τον πίνακα $\mathbb{A}$ του συστήματος, τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ και τη λύση του συστήματος.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \end{matrix}$$
· Βρείτε τον πίνακα $\mathbb{A}$ του συστήματος, τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ και τη λύση του συστήματος.
Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$
 Βρείτε τον πίνακα $\mathbb{A}$ του συστήματος, τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ και τη λύση του συστήματος.

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Η ορίζουσα του $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός $3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1$.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$
 Βρείτε τον πίνακα $\mathbb{A}$ του συστήματος, τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ και τη λύση του συστήματος.

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Η ορίζουσα του $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός $3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1$.

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \end{matrix}$$
· Βρείτε τον πίνακα $\mathbb{A}$ του συστήματος, τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ και τη λύση του συστήματος.

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Η ορίζουσα του $\mathbb{A}$ είναι ο αριθμός $3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = -1$.

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ τότε

$$\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{x}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3. Εάν για τους πίνακες $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ ισχύει $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$ δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{0}$ έχει μοναδική λύση την τετρωμμένη. Δείξτε επίσης ότι ο αριθμός στηλών του $\mathbb{A}$ είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό γραμμών του.

Άσκηση 3. Εάν για τους πίνακες A, B ισχύει $BA = I_n$ δείξτε ότι η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Δείξτε επίσης ότι ο αριθμός στηλών του A είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό γραμμών του.

Λύση . Εάν $Ax = 0 \Rightarrow B(Ax) = BAx \Rightarrow 0 = x$. Επομένως η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Άσκηση 3. Εάν για τους πίνακες A, B ισχύει $BA = I_n$ δείξτε ότι η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Δείξτε επίσης ότι ο αριθμός στηλών του A είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό γραμμών του.

Λύση . Εάν $Ax = 0 \Rightarrow B(Ax) = BAx \Rightarrow 0 = x$. Επομένως η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Εάν ο αριθμός στηλών του A ήταν μεγαλύτερος από τον αριθμό γραμμών τότε η εξίσωση $Ax = 0$ θα είχε και μη τετριμμένη λύση που είναι άτοπο.