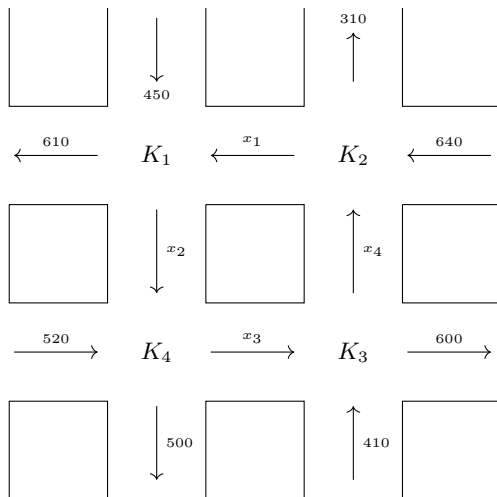


Παράδειγμα 40. Έχουμε ένα σύστημα σωλήνων μονόδρομης ροής που συνδέονται μεταξύ τους όπως μας δείχνει το σχήμα 3. Τις ώρες που έχουμε έντονη δραστηριότητα έχουμε εισαγωγή και εξαγωγή υγρών όπως μας δείχνει το σχήμα. Ποιές πρέπει να είναι οι τιμές των x_1, x_2, x_3, x_4 ώστε στους τέσσερις κόμβους να έχουμε ισόποση εισαγωγή και εξαγωγή υγρών.



Σχήμα: Σύστημα σωλήνων μονόδρομης ροής

Στον κόμβο K_1 για να έχουμε ισόποση εισαγωγή και εξαγωγή θα πρέπει $x_1 + 450 = x_2 + 610$.

στον κόμβο K_2 θα πρέπει $x_1 + 310 = x_4 + 640$,

στον K_3 θα πρέπει να ισχύει $x_3 + 410 = x_4 + 600$

τέλος στον κόμβο K_4 θα πρέπει $x_2 + 520 = x_3 + 500$.

Οι τέσσερις αυτές εξισώσεις μας δίνουν το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 160 \\x_1 &\quad - x_4 = 330 \\x_2 - x_3 &= -20 \\x_3 - x_4 &= 190\end{aligned}$$

Με απαλοιφή Gauss

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\0 & 0 & 1 & -1 & 190\end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\0 & 0 & 1 & -1 & 190\end{array}\right] \\&\xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 190 \\0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\0 & 0 & -1 & 1 & -190 \\0 & 0 & 1 & -1 & 190\end{array}\right] \xrightarrow{E_{4,3}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 190 \\0 & 1 & 0 & -1 & 110 \\0 & 0 & -1 & 1 & -150 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι συμβατό και έχει μια ελεύθερη μεταβλητή, την τέταρτη.

Από τις εξισώσεις παίρνουμε $x_3 = 150 + x_4$, $x_2 = 100 + x_4$ και $x_1 = 190 + x_2 = 290 + x_4$.

Leontief οικονομικό μοντέλο.

Η οικονομία ενός κράτους χωρίζεται σε n – τομείς που παράγουν προϊόντα ή παρέχουν υπηρεσίες.

Κάθε κλάδος έχει δύο τύπους απαιτήσεων

- εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τομείς
- ζήτηση από τον ίδιο τομέα ή τους άλλους τομείς της οικονομίας

Leontief οικονομικό μοντέλο.

Η οικονομία ενός κράτους χωρίζεται σε n – τομείς που παράγουν προϊόντα ή παρέχουν υπηρεσίες.

Κάθε κλάδος έχει δύο τύπους απαιτήσεων

- εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τομείς
- ζήτηση από τον ίδιο τομέα ή τους άλλους τομείς της οικονομίας

Ας δούμε αρχικά την περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική ζήτηση. Τότε έχουμε n –τομείς της οικονομίας που έχουν αλληλεξάρτηση στην παραγωγή. Κάθε τομέας καταναλώνει μέρος των αγαθών ή υπηρεσιών που παράγουν οι άλλοι τομείς και μέρος των αγαθών που παράγει ο ίδιος.

Για να παράγει ο i –τομέας ένα προϊόν ή μία υπηρεσία χρειάζεται υλικά που τα παράγει ο ίδιος τομέας και οι άλλοι τομείς. Θα λέμε ότι η οικονομία είναι κλειστή εάν ικανοποιεί τις ανάγκες της στην παραγωγή και δεν μένουν αγαθά.

Για να συμβαίνει αυτό κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές

- ο i –τομέας παράγει p_i αγαθά ή υπηρεσίες

Leontief οικονομικό μοντέλο.

Η οικονομία ενός κράτους χωρίζεται σε n – τομείς που παράγουν προϊόντα ή παρέχουν υπηρεσίες.

Κάθε κλάδος έχει δύο τύπους απαιτήσεων

- εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τομείς
- ζήτηση από τον ίδιο τομέα ή τους άλλους τομείς της οικονομίας

Ας δούμε αρχικά την περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική ζήτηση. Τότε έχουμε n –τομείς της οικονομίας που έχουν αλληλεξάρτηση στην παραγωγή. Κάθε τομέας καταναλώνει μέρος των αγαθών ή υπηρεσιών που παράγουν οι άλλοι τομείς και μέρος των αγαθών που παράγει ο ίδιος.

Για να παράγει ο i –τομέας ένα προϊόν ή μία υπηρεσία χρειάζεται υλικά που τα παράγει ο ίδιος τομέας και οι άλλοι τομείς. Θα λέμε ότι η οικονομία είναι κλειστή εάν ικανοποιεί τις ανάγκες της στην παραγωγή και δεν μένουν αγαθά.

Για να συμβαίνει αυτό κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές

ο i –τομέας παράγει p_i αγαθά ή υπηρεσίες

Εάν $a_{i,j}$ είναι το ποσοστό της μίας μονάδας προϊόντος που παράγει ο j –τομέας και χρησιμοποιεί ο i –τομέας για να παράγει μια μονάδα προϊόν του θα πρέπει

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 1$$

Leontief οικονομικό μοντέλο.

Η οικονομία ενός κράτους χωρίζεται σε n – τομείς που παράγουν προϊόντα ή παρέχουν υπηρεσίες.

Κάθε κλάδος έχει δύο τύπους απαιτήσεων

- εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τομείς
- ζήτηση από τον ίδιο τομέα ή τους άλλους τομείς της οικονομίας

Ας δούμε αρχικά την περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική ζήτηση. Τότε έχουμε n –τομείς της οικονομίας που έχουν αλληλεξάρτηση στην παραγωγή. Κάθε τομέας καταναλώνει μέρος των αγαθών ή υπηρεσιών που παράγουν οι άλλοι τομείς και μέρος των αγαθών που παράγει ο ίδιος.

Για να παράγει ο i –τομέας ένα προϊόν ή μία υπηρεσία χρειάζεται υλικά που τα παράγει ο ίδιος τομέας και οι άλλοι τομείς. Θα λέμε ότι η οικονομία είναι κλειστή εάν ικανοποιεί τις ανάγκες της στην παραγωγή και δεν μένουν αγαθά.

Για να συμβαίνει αυτό κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές

ο i –τομέας παράγει p_i αγαθά ή υπηρεσίες

Εάν $a_{i,j}$ είναι το ποσοστό της μίας μονάδας προϊόντος που παράγει ο j –τομέας και χρησιμοποιεί ο i –τομέας για να παράγει μια μονάδα προϊόν του θα πρέπει

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 1$$

ισχύει $p_i = a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \cdots + a_{i,n}p_n$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Leontief οικονομικό μοντέλο.

Η οικονομία ενός κράτους χωρίζεται σε n – τομείς που παράγουν προϊόντα ή παρέχουν υπηρεσίες.

Κάθε κλάδος έχει δύο τύπους απαιτήσεων

- εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τομείς
- ζήτηση από τον ίδιο τομέα ή τους άλλους τομείς της οικονομίας

Ας δούμε αρχικά την περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική ζήτηση. Τότε έχουμε n –τομείς της οικονομίας που έχουν αλληλεξάρτηση στην παραγωγή. Κάθε τομέας καταναλώνει μέρος των αγαθών ή υπηρεσιών που παράγουν οι άλλοι τομείς και μέρος των αγαθών που παράγει ο ίδιος.

Για να παράγει ο i –τομέας ένα προϊόν ή μία υπηρεσία χρειάζεται υλικά που τα παράγει ο ίδιος τομέας και οι άλλοι τομείς. Θα λέμε ότι η οικονομία είναι κλειστή εάν ικανοποιεί τις ανάγκες της στην παραγωγή και δεν μένουν αγαθά.

Για να συμβαίνει αυτό κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές

ο i –τομέας παράγει p_i αγαθά ή υπηρεσίες

Εάν $a_{i,j}$ είναι το ποσοστό της μίας μονάδας προϊόντος που παράγει ο j –τομέας και χρησιμοποιεί ο i –τομέας για να παράγει μια μονάδα προϊόν του θα πρέπει

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 1$$

ισχύει $p_i = a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \cdots + a_{i,n}p_n$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Leontief οικονομικό μοντέλο.

Η οικονομία ενός κράτους χωρίζεται σε n – τομείς που παράγουν προϊόντα ή παρέχουν υπηρεσίες.

Κάθε κλάδος έχει δύο τύπους απαιτήσεων

- εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τομείς
- ζήτηση από τον ίδιο τομέα ή τους άλλους τομείς της οικονομίας

Ας δούμε αρχικά την περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική ζήτηση. Τότε έχουμε n –τομείς της οικονομίας που έχουν αλληλεξάρτηση στην παραγωγή. Κάθε τομέας καταναλώνει μέρος των αγαθών ή υπηρεσιών που παράγουν οι άλλοι τομείς και μέρος των αγαθών που παράγει ο ίδιος.

Για να παράγει ο i –τομέας ένα προϊόν ή μία υπηρεσία χρειάζεται υλικά που τα παράγει ο ίδιος τομέας και οι άλλοι τομείς. Θα λέμε ότι η οικονομία είναι κλειστή εάν ικανοποιεί τις ανάγκες της στην παραγωγή και δεν μένουν αγαθά.

Για να συμβαίνει αυτό κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές

ο i –τομέας παράγει p_i αγαθά ή υπηρεσίες

Εάν $a_{i,j}$ είναι το ποσοστό της μίας μονάδας προϊόντος που παράγει ο j –τομέας και χρησιμοποιεί ο i –τομέας για να παράγει μια μονάδα προϊόν του θα πρέπει

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 1$$

ισχύει $p_i = a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \cdots + a_{i,n}p_n$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Η τελευταία συνθήκη μας λέει ότι όσα προϊόντα παράγει ο i –τομέας καταναλώνονται από τον ίδιο και τους άλλους τομείς της οικονομίας.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ και $\mathbf{x} = [p_1, \dots, p_n]^\top$ τότε η κατάσταση ισορροπίας της οικονομίας περιγράφεται από το σύστημα

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}p_1 + a_{1,2}p_2 + a_{1,3}p_3 + \cdots + a_{1,n}p_n & = p_1 \\ a_{2,1}p_1 + a_{2,2}p_2 + a_{2,3}p_3 + \cdots + a_{2,n}p_n & = p_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}p_1 + a_{n,2}p_2 + a_{n,3}p_3 + \cdots + a_{n,n}p_n & = p_n \end{cases}$$

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται πίνακας ενδιάμεσης ζήτησης.

Εάν $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n,n}$ και $\mathbf{x} = [p_1, \dots, p_n]^\top$ τότε η κατάσταση ισορροπίας της οικονομίας περιγράφεται από το σύστημα

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}p_1 + a_{1,2}p_2 + a_{1,3}p_3 + \cdots + a_{1,n}p_n &= p_1 \\ a_{2,1}p_1 + a_{2,2}p_2 + a_{2,3}p_3 + \cdots + a_{2,n}p_n &= p_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}p_1 + a_{n,2}p_2 + a_{n,3}p_3 + \cdots + a_{n,n}p_n &= p_n \end{cases}$$

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ ονομάζεται πίνακας ενδιάμεσης ζήτησης.

Ας παρατηρήσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $a_{i,j} \geq 0$ για κάθε i, j . Επειδή $a_{i,j}$ είναι το ποσοστό μιας μονάδας προϊόντος που παράγει ο j -τομέας και χρησιμοποιούνται από τον i -τομέα για να παράγει μια μονάδα προϊόντος του,

έχουμε ότι η j -στήλη του πίνακα $\mathbb{A}$, $\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ μας δείχνει πως έχει κατανεμηθεί μια

μονάδα προϊόντος του j -τομέα στους τομείς της οικονομίας. Έτσι έχουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίσο με τη μονάδα. Εάν έχουμε και ένα τομέα που μόνο καταναλώνει προϊόντα ή υπηρεσίες τότε έχουμε το σύστημα $\mathbf{x} = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ όπου η i -συντεταγμένη του διανύσματος $\mathbf{d}$ είναι οι μονάδες εξωτερικής ζήτησης προϊόντων του i -τομέα.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Η ξυλεία πουλάει το 15% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 50% στην ενέργεια, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Η ξυλεία πουλάει το 15% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 50% στην ενέργεια, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Η ενέργεια πουλάει το 20% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 15% ξυλεία, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Η ξυλεία πουλάει το 15% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 50% στην ενέργεια, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Η ενέργεια πουλάει το 20% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 15% ξυλεία, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Οι μεταφορές πουλάνε το 20% της παραγωγή τους στα ορυχεία, το 10% στην ξυλεία, το 50% στην ενέργεια και ξοδεύουν οι ίδιες το υπόλοιπο.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Η ξυλεία πουλάει το 15% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 50% στην ενέργεια, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Η ενέργεια πουλάει το 20% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 15% ξυλεία, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Οι μεταφορές πουλάνε το 20% της παραγωγή τους στα ορυχεία, το 10% στην ξυλεία, το 50% στην ενέργεια και ξοδεύουν οι ίδιες το υπόλοιπο.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Η ξυλεία πουλάει το 15% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 50% στην ενέργεια, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Η ενέργεια πουλάει το 20% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 15% ξυλεία, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Οι μεταφορές πουλάνε το 20% της παραγωγή τους στα ορυχεία, το 10% στην ξυλεία, το 50% στην ενέργεια και ξοδεύουν οι ίδιες το υπόλοιπο.

Βρείτε τον πίνακα -εισροών-εκροών και βρείτε το σύνολο τιμών ισορροπίας.

Παράδειγμα 41. Έχουμε μια οικονομία που αποτελείται από τέσσερις τομείς, ορυχεία, ξυλεία, ενέργεια και μεταφορές.

Τα ορυχεία πουλούν το 10% της παραγωγής τους στην ξυλεία, το 60% στην ενέργεια και ξοδεύουν τα ίδια το υπόλοιπο.

Η ξυλεία πουλάει το 15% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 50% στην ενέργεια, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Η ενέργεια πουλάει το 20% της παραγωγή της στα ορυχεία, το 15% ξυλεία, το 20% στις μεταφορές και ξοδεύει η ίδια το υπόλοιπο.

Οι μεταφορές πουλάνε το 20% της παραγωγή τους στα ορυχεία, το 10% στην ξυλεία, το 50% στην ενέργεια και ξοδεύουν οι ίδιες το υπόλοιπο.

Βρείτε τον πίνακα -εισροών-εκροών και βρείτε το σύνολο τιμών ισορροπίας. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις εισροές-εκροές που απαιτούνται από κάθε τομέα για την παραγωγή ενός

	ορυχεία	Ξυλεία	Ενέργεια	Μεταφορές
ορυχεία	0.3	0.15	0.2	0.2
Ξυλεία	0.1	0.15	0.15	0.1
Ενέργεια	0.6	0.5	0.45	0.5
μεταφορές	0	0.2	0.2	0.2

Η πρώτη στήλη του πίνακα δίνει πώς μοίρασαν μια μονάδα προϊόντος τα ορυχεία στους τέσσερις τομείς,

η δεύτερη στήλη του πίνακα δίνει πώς μοίρασε μια μονάδα προϊόντος η ξυλεία στους τέσσερις τομείς,

η τρίτη στήλη του πίνακα δίνει πώς μοίρασε μια μονάδα προϊόντος οι ενέργεια στους τέσσερις τομείς

η τέταρτη στήλη του πίνακα δίνει πώς μοίρασε μια μονάδα προϊόντος οι μεταφορές στους τέσσερις τομείς

Τότε χρησιμοποιώντας ότι έχουμε κλειστό σύστημα παίρνουμε τις εξισώσεις

$$p_1 = 0.3p_1 + 0.15p_2 + 0.2p_3 + 0.2p_4 \Rightarrow 0.7p_1 - 0.15p_2 - 0.2p_3 - 0.2p_4 = 0$$

$$p_2 = 0.1p_1 + 0.15p_2 + 0.15p_3 + 0.1p_4 \Rightarrow -0.1p_1 + 0.85p_2 - 0.15p_3 - 0.1p_4 = 0$$

$$p_3 = 0.6p_1 + 0.5p_2 + 0.45p_3 + 0.5p_4 \Rightarrow -0.6p_1 - 0.5p_2 + 0.55p_3 - 0.5p_4 = 0$$

$$p_4 = 0p_1 + 0.2p_2 + 0.2p_3 + 0.2p_4 \Rightarrow -0.2p_2 - 0.2p_3 + 0.8p_4 = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ομογενές σύστημα και το λύνουμε.

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.15 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & 0.85 & -0.15 & -0.1 \\ -0.6 & -0.5 & 0.55 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.137 \\ 0 & 1 & 0 & -0.84 \\ 0 & 0 & 1 & -3.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε $p_3 = \frac{446}{141}p_4$, $p_2 = \frac{118}{141}p_4$ και $p_1 = \frac{193}{141}p_4$.

Τότε χρησιμοποιώντας ότι έχουμε κλειστό σύστημα παίρνουμε τις εξισώσεις

$$p_1 = 0.3p_1 + 0.15p_2 + 0.2p_3 + 0.2p_4 \Rightarrow 0.7p_1 - 0.15p_2 - 0.2p_3 - 0.2p_4 = 0$$

$$p_2 = 0.1p_1 + 0.15p_2 + 0.15p_3 + 0.1p_4 \Rightarrow -0.1p_1 + 0.85p_2 - 0.15p_3 - 0.1p_4 = 0$$

$$p_3 = 0.6p_1 + 0.5p_2 + 0.45p_3 + 0.5p_4 \Rightarrow -0.6p_1 - 0.5p_2 + 0.55p_3 - 0.5p_4 = 0$$

$$p_4 = 0p_1 + 0.2p_2 + 0.2p_3 + 0.2p_4 \Rightarrow -0.2p_2 - 0.2p_3 + 0.8p_4 = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ομογενές σύστημα και το λύνουμε.

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.15 & -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & 0.85 & -0.15 & -0.1 \\ -0.6 & -0.5 & 0.55 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.137 \\ 0 & 1 & 0 & -0.84 \\ 0 & 0 & 1 & -3.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε $p_3 = \frac{446}{141}p_4$, $p_2 = \frac{118}{141}p_4$ και $p_1 = \frac{193}{141}p_4$.

Γραμμική εξάρτηση

Το σύστημα $Ax = 0$ σε διανυσματική μορφή γράφεται ως

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σε διανυσματική μορφή η παραπάνω εξίσωση μεταφράζεται αν μπορούμε να συνδυάσουμε τα διανύσματα στήλες του πίνακα ώστε να πάρουμε το μηδενικό διάνυσμα. Αυτό οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 42. Λέμε ότι τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ του $\mathbb{R}^m$ είναι

- 1) γραμμικά εξαρτημένα εάν υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = 0.$$

Ορισμός 42. Λέμε ότι τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ του $\mathbb{R}^m$ είναι

- 1) γραμμικά εξαρτημένα εάν υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = 0.$$

- 2) γραμμικά ανεξάρτητα εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Ισοδύναμα τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

Ορισμός 42. Λέμε ότι τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ του $\mathbb{R}^m$ είναι

- 1) γραμμικά εξαρτημένα εάν υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = \mathbf{0}.$$

- 2) γραμμικά ανεξάρτητα εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Ισοδύναμα τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

Ορισμός 42. Λέμε ότι τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ του $\mathbb{R}^m$ είναι

- 1) γραμμικά εξαρτημένα εάν υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = \mathbf{0}.$$

- 2) γραμμικά ανεξάρτητα εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ισοδύναμα τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

Παρατήρηση 43. Από τους παραπάνω ορισμούς παίρνουμε ότι αν θέλουμε να εξετάσουμε αν τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ανεξάρτητα πρέπει να βρούμε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax = \mathbf{0}$ όπου A είναι ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$. Εάν το ομογενές σύστημα $Ax = \mathbf{0}$ έχει μη-τετριμμένη λύση τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εάν έχει μόνο την τετριμμένη λύση τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 44. Εξετάστε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 44. Εξετάστε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Θα πάρουμε τον πίνακα A που έχει στήλες τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 και θα βρούμε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Για να λύσουμε το σύστημα θα φέρουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή.

Παράδειγμα 44. Εξετάστε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Θα πάρουμε τον πίνακα A που έχει στήλες τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 και θα βρούμε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Για να λύσουμε το σύστημα θα φέρουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 44. Εξετάστε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Θα πάρουμε τον πίνακα A που έχει στήλες τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 και θα βρούμε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Για να λύσουμε το σύστημα θα φέρουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι υπάρχουν δύο οδηγοί, στις στήλες 1 και 2 και η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη. Το ομογενές σύστημα που μας δίνει ο τελευταίος πίνακας είναι ο

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x - 2y = -z \\ y = z \end{array}.$$

Παράδειγμα 44. Εξετάστε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Θα πάρουμε τον πίνακα $\mathbb{A}$ που έχει στήλες τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 και θα βρούμε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}x = 0$. Για να λύσουμε το σύστημα θα φέρουμε τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι υπάρχουν δύο οδηγοί, στις στήλες 1 και 2 και η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη. Το ομογενές σύστημα που μας δίνει ο τελευταίος πίνακας είναι ο

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - 2y &= -z \\ y &= z \end{aligned}.$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι οι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $zw_1 + zw_2 + zw_3 = 0$ για κάθε z . Άρα για $z = 1$ έχουμε $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ και έτσι έχουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παράδειγμα 45. Δείξτε ότι αν τα διανύσματα w_1, w_2, w_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και τα $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 45. Δείξτε ότι αν τα διανύσματα w_1, w_2, w_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και τα $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εξετάζουμε πότε ένας γραμμικός συνδυασμός των $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_1$ είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα.

Παράδειγμα 45. Δείξτε ότι αν τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και τα $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εξετάζουμε πότε ένας γραμμικός συνδυασμός των $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_1$ είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα.

$$\begin{aligned}\lambda_1(w_1 + w_2) + \lambda_2(w_2 + w_3) + \lambda_3(w_3 + w_1) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3)w_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)w_3 &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

και άρα $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ εφόσον τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & + \lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_2 & = 0 \end{array}$$

έχει λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Άρα τα $w_1 + w_2, w_2 + w_3, w_3 + w_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατηρήσεις 46.

Ας παρατηρήσουμε ότι εάν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε το σύνολο αυτών των διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν πάρουμε το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ και τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$,

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k \Leftrightarrow 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k - \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Επομένως υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που μας δίνει το $\mathbf{0}$ και δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν. Έτσι έχουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Παρατηρήσεις 46.

Ας παρατηρήσουμε ότι εάν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε το σύνολο αυτών των διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν πάρουμε το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ και τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$,

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k \Leftrightarrow 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k - \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Επομένως υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που μας δίνει το $\mathbf{0}$ και δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν. Έτσι έχουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε τουλάχιστον ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι εφόσον είναι γραμμικά εξαρτημένα υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$. Εάν $c_i \neq 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$\mathbf{w}_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right)\mathbf{w}_1 - \dots + \left(-\frac{c_{i-1}}{c_i}\right)\mathbf{w}_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\mathbf{w}_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\mathbf{w}_k \quad (10)$$

δηλαδή το $\mathbf{w}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων.

Παρατηρήσεις 46.

Ας παρατηρήσουμε ότι εάν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε το σύνολο αυτών των διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν πάρουμε το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ και τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$,

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k \Leftrightarrow 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k - \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Επομένως υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που μας δίνει το $\mathbf{0}$ και δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν. Έτσι έχουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε τουλάχιστον ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι εφόσον είναι γραμμικά εξαρτημένα υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$. Εάν $c_i \neq 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$\mathbf{w}_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right)\mathbf{w}_1 - \dots + \left(-\frac{c_{i-1}}{c_i}\right)\mathbf{w}_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\mathbf{w}_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\mathbf{w}_k \quad (10)$$

δηλαδή το $\mathbf{w}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων.

Παρατηρήσεις 46.

Ας παρατηρήσουμε ότι εάν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει το μηδενικό διάνυσμα τότε το σύνολο αυτών των διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν πάρουμε το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ και τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$,

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k \Leftrightarrow 0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_k - \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Επομένως υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που μας δίνει το $\mathbf{0}$ και δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν. Έτσι έχουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε τουλάχιστον ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι εφόσον είναι γραμμικά εξαρτημένα υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$. Εάν $c_i \neq 0$ τότε παίρνουμε ότι

$$\mathbf{w}_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right)\mathbf{w}_1 - \dots + \left(-\frac{c_{i-1}}{c_i}\right)\mathbf{w}_{i-1} + \left(\frac{-c_{i+1}}{c_i}\right)\mathbf{w}_{i+1} + \dots + \left(\frac{-c_k}{c_i}\right)\mathbf{w}_k \quad (10)$$

δηλαδή το $\mathbf{w}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων.

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τα γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.

Θεώρημα 47. Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη θεωρήματος 47.

Εάν το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$\begin{aligned} w_i &= c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k \\ \Rightarrow c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + (-1) w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k &= 0 \end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αντιστρόφως έστω ότι τα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εάν κανένα από αυτά δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, από Παρατήρηση 46 ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έστω ότι ένα από αυτά είναι το μηδενικό. Εάν $w_1 = 0$ τότε

$$w_1 = 0 = 0w_2 + \dots + 0w_k$$

και άρα w_1 γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Εάν $w_1 \neq 0$ και $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = 0$ παίρνουμε το τελευταίο c_i που δεν είναι μηδέν. Αυτό δεν είναι το c_1 διότι αν ήταν θα είχαμε

$c_1 w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_k = 0$ που είναι άτοπο εφόσον $c_1 \neq 0$ και $w_1 \neq 0$.

Τότε

$$w_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right) w_1 + \left(-\dots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\right) w_{i-1} + \left(-\frac{c_{i+1}}{c_i}\right) w_{i+1} + \dots + \left(-\frac{c_k}{c_i}\right) w_k$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 47. Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη θεωρήματος 47.

Εάν το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$\begin{aligned} w_i &= c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k \\ \Rightarrow c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + (-1) w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k &= 0 \end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Θεώρημα 47. Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη θεωρήματος 47.

Εάν το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$w_i = c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k$$

$$\Rightarrow c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + (-1) w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k = 0$$

και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αντιστρόφως έστω ότι τα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εάν κανένα από αυτά δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, από Παρατήρηση 46 ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Θεώρημα 47. Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη θεωρήματος 47.

Εάν το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$\begin{aligned} w_i &= c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k \\ \Rightarrow c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + (-1) w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k &= 0 \end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αντιστρόφως έστω ότι τα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εάν κανένα από αυτά δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, από Παρατήρηση 46 ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έστω ότι ένα από αυτά είναι το μηδενικό. Εάν $w_1 = 0$ τότε

$$w_1 = 0 = 0w_2 + \dots + 0w_k$$

και άρα w_1 γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Θεώρημα 47. Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη θεωρήματος 47.

Εάν το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$\begin{aligned} w_i &= c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k \\ \Rightarrow c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + (-1) w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k &= 0 \end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αντιστρόφως έστω ότι τα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εάν κανένα από αυτά δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, από Παρατήρηση 46 ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έστω ότι ένα από αυτά είναι το μηδενικό. Εάν $w_1 = 0$ τότε

$$w_1 = 0 = 0w_2 + \dots + 0w_k$$

και άρα w_1 γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Εάν $w_1 \neq 0$ και $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = 0$ παίρνουμε το τελευταίο c_i που δεν είναι μηδέν. Αυτό δεν είναι το c_1 διότι αν ήταν θα είχαμε $c_1 w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_k = 0$ που είναι άτοπο εφόσον $c_1 \neq 0$ και $w_1 \neq 0$.

Θεώρημα 47. Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη θεωρήματος 47.

Εάν το w_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε

$$\begin{aligned} w_i &= c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k \\ \Rightarrow c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + (-1) w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_k w_k &= 0 \end{aligned}$$

και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αντιστρόφως έστω ότι τα $w_1, w_2, \dots, w_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εάν κανένα από αυτά δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, από Παρατήρηση 46 ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έστω ότι ένα από αυτά είναι το μηδενικό. Εάν $w_1 = 0$ τότε

$$w_1 = 0 = 0w_2 + \dots + 0w_k$$

και άρα w_1 γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Εάν $w_1 \neq 0$ και $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = 0$ παίρνουμε το τελευταίο c_i που δεν είναι μηδέν. Αυτό δεν είναι το c_1 διότι αν ήταν θα είχαμε

$c_1 w_1 + 0w_2 + \dots + 0w_k = 0$ που είναι άτοπο εφόσον $c_1 \neq 0$ και $w_1 \neq 0$.

Τότε

$$w_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right) w_1 + \left(-\dots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\right) w_{i-1} + \left(-\frac{c_{i+1}}{c_i}\right) w_{i+1} + \dots + \left(-\frac{c_k}{c_i}\right) w_k$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Ο πίνακας αυτού του ομογενούς συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Ο πίνακας αυτού του ομογενούς συστήματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$. Επειδή ο πίνακας έχει δύο γραμμές έχει το πολύ δύο οδηγούς.

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Ο πίνακας αυτού του ομογενούς συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

Επειδή ο πίνακας έχει δύο γραμμές έχει το πολύ δύο οδηγούς.

Επειδή έχουμε τρεις μεταβλητές μια από αυτές θα είναι ελεύθερη. Επομένως από την Πρόταση 2 το σύστημα έχει μη-τετριμμένη λύση και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Ο πίνακας αυτού του ομογενούς συστήματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

Επειδή ο πίνακας έχει δύο γραμμές έχει το πολύ δύο οδηγούς.

Επειδή έχουμε τρεις μεταβλητές μια από αυτές θα είναι ελεύθερη. Επομένως από την Πρόταση 2 το σύστημα έχει μη-τετριμμένη λύση και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Η ίδια απόδειξη στον $\mathbb{R}^m$ μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Ο πίνακας αυτού του ομογενούς συστήματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

Επειδή ο πίνακας έχει δύο γραμμές έχει το πολύ δύο οδηγούς.

Επειδή έχουμε τρεις μεταβλητές μια από αυτές θα είναι ελεύθερη. Επομένως από την Πρόταση 2 το σύστημα έχει μη-τετριμμένη λύση και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Η ίδια απόδειξη στον $\mathbb{R}^m$ μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 48. Στον $\mathbb{R}^m$ οποιαδήποτε διανύσματα πλήθους μεγαλύτερο από m είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Εάν στον $\mathbb{R}^2$ πάρουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα τότε αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι εάν $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και $w_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ τότε σχηματίζουμε το σύστημα

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0.$$

Ο πίνακας αυτού του ομογενούς συστήματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

Επειδή ο πίνακας έχει δύο γραμμές έχει το πολύ δύο οδηγούς.

Επειδή έχουμε τρεις μεταβλητές μια από αυτές θα είναι ελεύθερη. Επομένως από την Πρόταση 2 το σύστημα έχει μη-τετριμμένη λύση και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Η ίδια απόδειξη στον $\mathbb{R}^m$ μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 48. Στον $\mathbb{R}^m$ οποιαδήποτε διανύσματα πλήθους μεγαλύτερο από m είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι οποιαδήποτε τέσσερα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και οποιαδήποτε πέντε διανύσματα στον $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει επίσης το ακόλουθο θεώρημα.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει επίσης το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 49. Εάν $m < n$ τότε ένα $m \times n$ -ομογενές σύστημα έχει μη-μηδενική λύση. Ισοδύναμα ένα ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους από ότι εξισώσεις έχει μη-τετριμμένη λύση.

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει επίσης το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 49. *Εάν $m < n$ τότε ένα $m \times n$ -ομογενές σύστημα έχει μη-μηδενική λύση. Ισοδύναμα ένα ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους από ότι εξισώσεις έχει μη-τετριμμένη λύση.*

Πράγματι το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ είναι ισοδύναμο με

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $m < n$ έχουμε ότι τα n -διανύσματα στήλες του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα υπάρχει μια μη-μηδενική n -άδα $(x_1, \dots, x_n)$ που είναι λύση του συστήματος.

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Εάν A ένας $m \times n$ πίνακας τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_A x = Ax.$$

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Εάν A ένας $m \times n$ πίνακας τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_A x = Ax.$$

Η απεικόνιση T_A παίρνει ένα διάνυσμα x του $\mathbb{R}^n$ και το μετατρέπει στο διάνυσμα Ax του $\mathbb{R}^m$.

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Εάν $\mathbb{A}$ ένας $m \times n$ πίνακας τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$T_{\mathbb{A}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_{\mathbb{A}}\mathbf{x} = \mathbb{A}\mathbf{x}.$$

Η απεικόνιση $T_{\mathbb{A}}$ παίρνει ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ και το μετατρέπει στο διάνυσμα $\mathbb{A}\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα 50. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ τότε ορίζεται η $T_{\mathbb{A}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$T_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Ο $n \times n$ -πίνακας $\lambda \mathbb{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ μετατρέπει το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ στο

$\lambda \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Λέμε ότι είναι πίνακας $\lambda \mathbb{I}$ είναι πίνακας
συστολής εάν $0 \leq \lambda \leq 1$

Ο $n \times n$ -πίνακας $\lambda \mathbb{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ μετατρέπει το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ στο

$\lambda \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Λέμε ότι είναι πίνακας $\lambda \mathbb{I}$ είναι πίνακας

συστολής εάν $0 \leq \lambda \leq 1$

διαστολής εάν $\lambda > 1$.

Παράδειγμα 51. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγει μια διαστολή κατά τον x -άξονα, εφόσον

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

δηλαδή διπλασιάζει την x -συντεταγμένη.

Παράδειγμα 51. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγει μια διαστολή κατά τον x -άξονα, εφόσον

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

δηλαδή διπλασιάζει την x -συντεταγμένη.

Σε τι σχήμα μετατρέπει ο πίνακας $\mathbb{A}$ τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$?

Παράδειγμα 51. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγει μια διαστολή κατά τον x -άξονα, εφόσον

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

δηλαδή διπλασιάζει την x -συντεταγμένη.

Σε τι σχήμα μετατρέπει ο πίνακας $\mathbb{A}$ τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$?

Θα δούμε ότι πίνακας $\mathbb{A}$ μετασχηματίζει τον κύκλο στην έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Παράδειγμα 51. Ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παράγει μια διαστολή κατά τον x -άξονα, εφόσον

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

δηλαδή διπλασιάζει την x -συντεταγμένη.

Σε τι σχήμα μετατρέπει ο πίνακας $\mathbb{A}$ τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$?

Θα δούμε ότι πίνακας $\mathbb{A}$ μετασχηματίζει τον κύκλο στην έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Εάν (x, y) ένα σημείο του κύκλου τότε

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του $\mathbb{A}\mathbf{x}$ ικανοποιούν την $\frac{(2x)^2}{4} + y^2 = 1$. Επομένως ο $\mathbb{A}$ μετατρέπει τον κύκλο σε έλλειψη.

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο $T_{\mathbb{A}}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$11) \quad T_{\mathbb{A}}(x + y) = T_{\mathbb{A}}x + T_{\mathbb{A}}y$$

Εάν A είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο T_A έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$1) \quad T_A(x + y) = T_A x + T_A y$$

$$2) \quad T_A(\lambda x) = \lambda T_A x.$$

Εάν A είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο T_A έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$1) \quad T_A(x + y) = T_A x + T_A y$$

$$2) \quad T_A(\lambda x) = \lambda T_A x.$$

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο $T_{\mathbb{A}}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$11) \quad T_{\mathbb{A}}(x + y) = T_{\mathbb{A}}x + T_{\mathbb{A}}y$$

$$12) \quad T_{\mathbb{A}}(\lambda x) = \lambda T_{\mathbb{A}}x.$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι $T_{\mathbb{A}}(0) = 0$ και

$$T_{\mathbb{A}}(x + \lambda y) = T_{\mathbb{A}}x + \lambda T_{\mathbb{A}}y.$$

Εάν A είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο T_A έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$11) \quad T_A(x + y) = T_A x + T_A y$$

$$12) \quad T_A(\lambda x) = \lambda T_A x.$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι $T_A(0) = 0$ και

$$T_A(x + \lambda y) = T_A x + \lambda T_A y.$$

Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι $0 = x - x$. Από αυτή την ιδιότητα

$$T_A(0) = T_A(x - x) = T_A(x + (-1)x) = T_A(x) + T_A(-x) = T_A(x) - T_A(x) = 0.$$

Εάν A είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο T_A έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$11) T_A(x + y) = T_A x + T_A y$$

$$12) T_A(\lambda x) = \lambda T_A x.$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι $T_A(0) = 0$ και

$$T_A(x + \lambda y) = T_A x + \lambda T_A y.$$

Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι $0 = x - x$. Από αυτή την ιδιότητα

$$T_A(0) = T_A(x - x) = T_A(x + (-1)x) = T_A(x) + T_A(-x) = T_A(x) - T_A(x) = 0.$$

Για την δεύτερη

$$T_A(x + \lambda y) = T_A(x) + T_A(\lambda y) = T_A(x) + \lambda T_A(y).$$

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο $T_{\mathbb{A}}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$11) \quad T_{\mathbb{A}}(x + y) = T_{\mathbb{A}}x + T_{\mathbb{A}}y$$

$$12) \quad T_{\mathbb{A}}(\lambda x) = \lambda T_{\mathbb{A}}x.$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι $T_{\mathbb{A}}(0) = 0$ και

$$T_{\mathbb{A}}(x + \lambda y) = T_{\mathbb{A}}x + \lambda T_{\mathbb{A}}y.$$

Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι $0 = x - x$. Από αυτή την ιδιότητα

$$T_{\mathbb{A}}(0) = T_{\mathbb{A}}(x - x) = T_{\mathbb{A}}(x + (-1)x) = T_{\mathbb{A}}(x) + T_{\mathbb{A}}(-x) = T_{\mathbb{A}}(x) - T_{\mathbb{A}}(x) = 0.$$

Για την δεύτερη

$$T_{\mathbb{A}}(x + \lambda y) = T_{\mathbb{A}}(x) + T_{\mathbb{A}}(\lambda y) = T_{\mathbb{A}}(x) + \lambda T_{\mathbb{A}}(y).$$

Η απεικονίσεις με τις παραπάνω ιδιότητες έχουν ειδική ονομασία.

Εάν A είναι ένας πίνακας τότε από την (7) παίρνουμε ότι ο T_A έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$11) T_A(x + y) = T_A x + T_A y$$

$$12) T_A(\lambda x) = \lambda T_A x.$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι $T_A(0) = 0$ και

$$T_A(x + \lambda y) = T_A x + \lambda T_A y.$$

Η πρώτη ιδιότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας ότι $0 = x - x$. Από αυτή την ιδιότητα

$$T_A(0) = T_A(x - x) = T_A(x + (-1)x) = T_A(x) + T_A(-x) = T_A(x) - T_A(x) = 0.$$

Για την δεύτερη

$$T_A(x + \lambda y) = T_A(x) + T_A(\lambda y) = T_A(x) + \lambda T_A(y).$$

Η απεικονίσεις με τις παραπάνω ιδιότητες έχουν ειδική ονομασία.

Ορισμός 52. Μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέμε ότι είναι γραμμική εάν έχει τις ιδιότητες 11) και 12).

Για μια γραμμική απεικόνιση προκύπτει από τους ορισμούς ότι για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$T(\lambda \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k) = \lambda T \mathbf{x}_1 + \lambda_2 T \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k T \mathbf{x}_k. \quad (11)$$

Εάν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Συμβολίζουμε με $e_1, \dots, e_n$ τα διανύσματα $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Από την (11) παίρνουμε ότι για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό ισχύει

$$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n).$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Από την (11) παίρνουμε ότι για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό ισχύει

$$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n).$$

Η παραπάνω ισότητα μας δείχνει ότι αν γνωρίζουμε τα διανύσματα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ τότε βρίσκουμε άμεσα και το διάνυσμα $T(x)$.

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Από την (11) παίρνουμε ότι για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό ισχύει

$$T(x) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n).$$

Η παραπάνω ισότητα μας δείχνει ότι αν γνωρίζουμε τα διανύσματα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ τότε βρίσκουμε άμεσα και το διάνυσμα $T(x)$.

Το διάνυσμα $T e_k$ είναι στον $\mathbb{R}^m$ άρα έχει m -συντεταγμένες, $T e_k = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον $m \times n$ -πίνακα $\mathbb{A}$ που έχει στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $T e_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Επομένως ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι ο

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{A}}(x) &= \mathbb{A}x = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= x_1 T e_1 + x_2 T e_2 + \cdots + x_n T e_n = T(x). \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι ο τελεστής $T_{\mathbb{A}}$ που ορίζει ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι ίσος με τον τελεστή T . Αυτή η ισότητα μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι ο τελεστής $T_{\mathbb{A}}$ που ορίζει ο πίνακας $\mathbb{A}$ είναι ίσος με τον τελεστή T . Αυτή η ισότητα μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3. Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ταυτίζεται με τον συνάρτηση που ορίζεται με τον $m \times n$ πίνακα που έχει στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $T(\mathbf{e}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Παράδειγμα 53. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A) βρείτε το $T_{\mathbb{A}}\mathbb{x}$, B) Βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbb{y}$ ώστε $T_{\mathbb{A}}(\mathbb{y}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 53. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Α) βρείτε το $T_{\mathbb{A}}\mathbf{x}$, Β) Βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbf{y}$ ώστε $T_{\mathbb{A}}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Α) } T_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε ένα $\mathbf{y}$ με $T_{\mathbb{A}}(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$ είναι ισοδύναμο με το να λύσουμε το σύστημα

$$\mathbb{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrc} x & -3z & = -2 \\ -3x + y + 6z & & = 3 \\ 2x - 2y - z & & = -1 \end{array}$$

Παράδειγμα 53. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A) βρείτε το $T_{\mathbb{A}}\mathbf{x}$, B) Βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbf{z}$ ώστε $T_{\mathbb{A}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{A) } T_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε ένα $\mathbf{z}$ με $T_{\mathbb{A}}(\mathbf{z}) = \mathbf{b}$ είναι ισοδύναμο με το να λύσουμε το σύστημα

$$\mathbb{A}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrc} x & -3z & = -2 \\ -3x + y + 6z & = 3 \\ 2x - 2y - z & = -1 \end{array}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$[\mathbb{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $z = 3, y = 6$ και $x = 7$. Επομένως

$$T_{\mathbb{A}}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 54. Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμικός μετασχηματισμός ώστε $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή T .

Παράδειγμα 54. Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμικός μετασχηματισμός ώστε $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή T .

Έχουμε ότι $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 7x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 54. Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμικός μετασχηματισμός ώστε $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή T .

Έχουμε ότι $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 7x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$.

Θέλουμε να βρούμε τα διανύσματα $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ και $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Για $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ παίρνουμε $T(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Παράδειγμα 54. Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμικός μετασχηματισμός ώστε $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή T .

Έχουμε ότι $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 7x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$.

Θέλουμε να βρούμε τα διανύσματα $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ και $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Για $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ παίρνουμε $T(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Για $\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ παίρνουμε $T(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{b} + 1\mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Παράδειγμα 54. Έστω $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμικός μετασχηματισμός ώστε $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή T .

Έχουμε ότι $T\mathbf{x} = x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 7x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$.

Θέλουμε να βρούμε τα διανύσματα $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ και $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Για $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ παίρνουμε $T(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

Για $\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ παίρνουμε $T(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{b} + 1\mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Άρα ο πίνακας του T είναι ο $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 55. Εάν για την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γνωρίζουμε

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ και } T \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ να βρεθεί ο πίνακας του } T.$$

Παράδειγμα 55. Εάν για την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γνωρίζουμε

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ και } T \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ να βρεθεί ο πίνακας του } T.$$

Επειδή γνωρίζουμε τα διανύσματα $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ και $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ θα γράψουμε τα e_1, e_2 ως

γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\Psiάχνουμε \lambda_1, \lambda_2 \text{ ώστε } \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -2$. και άρα

$$e_1 = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow T(e_1) = 5T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 33 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 55. Εάν για την γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γνωρίζουμε

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ και } T \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ να βρεθεί ο πίνακας του } T.$$

Επειδή γνωρίζουμε τα διανύσματα $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ και $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ θα γράψουμε τα e_1, e_2 ως

$$\text{γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Psiάχνουμε λ_1, λ_2 ώστε $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -2$. και άρα

$$e_1 = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow T(e_1) = 5T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 33 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

$$\Psiάχνουμε μ_1, μ_2 ώστε $\mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση $\mu_1 = -2$ και $\mu_2 = 1$. Έτσι παίρνουμε ότι

$$e_2 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow T(e_2) = -2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -13 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Επομένως ο πίνακας του } T \text{ είναι ο } \begin{bmatrix} 33 & -13 \\ 21 & -8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$