

Διανύσματα

Έχουμε δει ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{a}$ στον $\mathbb{R}^3$ αναπαριστάται με μια διατεταγμένη τριάδα (a_1, a_2, a_3) .

Μια διαφορετική αναπαράσταση είναι να γράφουμε το διάνυσμα ως $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

Διανύσματα

Έχουμε δει ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{a}$ στον $\mathbb{R}^3$ αναπαριστάται με μια διατεταγμένη τριάδα (a_1, a_2, a_3) .

Μια διαφορετική αναπαράσταση είναι να γράφουμε το διάνυσμα ως $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

Τότε για τα διανύσματα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 24. Εάν $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ να βρεθούν τα διανύσματα $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ και $4\mathfrak{a}$.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ενώ

$$4\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα στον $\mathbb{O}$ στον $\mathbb{R}^m$ είναι μια m -άδα πραγματικών αριθμών στη μορφή

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix}$$

Τότε για τα διανύσματα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} + b_{m-1} \\ a_m + b_m \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_{m-1} \\ \lambda a_m \end{bmatrix}.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι το $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$

Ορισμός 25. Λέμε ότι τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ είναι

α) ίσα εάν $a_i = b_i$ για κάθε $i \leq m$,

Ορισμός 25. Λέμε ότι τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ είναι

α) ίσα εάν $a_i = b_i$ για κάθε $i \leq m$,

β) παράλληλα εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a_i = \lambda b_i$ για κάθε $i \leq m$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\mathfrak{a} = \lambda \mathfrak{b}$.

Ορισμός 25. Λέμε ότι τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ είναι

- α) ίσα εάν $a_i = b_i$ για κάθε $i \leq m$,
- β) παράλληλα εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a_i = \lambda b_i$ για κάθε $i \leq m$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\mathfrak{a} = \lambda \mathfrak{b}$.

Ορισμός 25. Λέμε ότι τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ είναι

α) ίσα εάν $a_i = b_i$ για κάθε $i \leq m$,

β) παράλληλα εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a_i = \lambda b_i$ για κάθε $i \leq m$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\mathfrak{a} = \lambda \mathfrak{b}$.

Παράδειγμα 26. Τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ δεν είναι ίσα.

Ορισμός 25. Λέμε ότι τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ είναι

α) ίσα εάν $a_i = b_i$ για κάθε $i \leq m$,

β) παράλληλα εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a_i = \lambda b_i$ για κάθε $i \leq m$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\mathfrak{a} = \lambda \mathfrak{b}$.

Παράδειγμα 26. Τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ δεν είναι ίσα.

Τα διανύσματα $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$ είναι παράλληλα εφόσον

$$\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\mathfrak{a}$$

Ορισμός 27. Ένα διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \dots, \mathfrak{o}_k \in \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ώστε

$$\mathbb{b} = \lambda_1 \mathfrak{o}_1 + \lambda_2 \mathfrak{o}_2 + \dots + \lambda_k \mathfrak{o}_k.$$

Ορισμός 27. Ένα διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ώστε

$$\mathbb{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathfrak{a}_k.$$

Το διάνυσμα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathfrak{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathfrak{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ εφόσον

$$2\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_2 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 \\ 4-3 \\ 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{b}$$

Ορισμός 27. Ένα διάνυσμα $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_k \in \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ώστε

$$\mathbb{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathfrak{a}_k.$$

Το διάνυσμα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathfrak{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathfrak{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

εφόσον

$$2\mathfrak{a}_1 + 3\mathfrak{a}_2 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 \\ 4-3 \\ 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{b}$$

Θα δούμε παρακάτω ότι για να βρούμε εάν ένα διάνυσμα $\mathbb{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ θα πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων.

Εάν $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα τότε με $\mathfrak{a}^\top$ συμβολίζουμε το διάνυσμα

$$\mathfrak{a}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}^\top = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

Εάν $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα τότε με $\mathfrak{a}^\top$ συμβολίζουμε το διάνυσμα

$$\mathfrak{a}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}^\top = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

Εάν $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ εσωτερικό γινόμενο των $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός

$$\langle \mathfrak{a}^\top, \mathfrak{b} \rangle = [a_1, a_2, \dots, a_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m a_i b_i.$$

Εάν $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ ένα διάνυσμα τότε με $\mathfrak{a}^\top$ συμβολίζουμε το διάνυσμα

$$\mathfrak{a}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}^\top = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

Εάν $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ εσωτερικό γινόμενο των $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός

$$\langle \mathfrak{a}^\top, \mathfrak{b} \rangle = [a_1, a_2, \dots, a_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m a_i b_i.$$

Παράδειγμα 28. Εάν $\mathfrak{a} = (1, 2, 3, 1)$ και $\mathfrak{b} = (1, 0, -1, 1)$ τότε

$$\langle \mathfrak{a}^\top, \mathfrak{b} \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -3.$$

Εάν έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m
 \end{array}$$

παίρνουμε το διάνυσμα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $\Sigma_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$, $i = 1, \dots, n$.

Το διάνυσμα Σ_i είναι οι συντελεστές της μεταβλητής x_i στις εξισώσεις του συστήματος.

Εάν έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

παίρνουμε το διάνυσμα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $\mathbb{z}_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$, $i = 1, \dots, n$.

Το διάνυσμα $\mathbb{z}_i$ είναι οι συντελεστές της μεταβλητής x_i στις εξισώσεις του συστήματος. Τότε

$$\begin{aligned} x_1\mathbb{z}_1 + x_2\mathbb{z}_2 + \dots + x_n\mathbb{z}_n &= x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m
 \end{array}
 \Leftrightarrow x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}.$$

Έτσι το σύστημα $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{b}$ γράφεται σε διανυσματική μορφή.

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m
 \end{array}
 \Leftrightarrow x_1\underline{\Sigma}_1 + x_2\underline{\Sigma}_2 + \dots + x_n\underline{\Sigma}_n = \underline{\mathbb{b}}.$$

Έτσι το σύστημα $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{\mathbb{b}}$ γράφεται σε διανυσματική μορφή.

Η διανυσματική γραφή του συστήματος μας δίνει την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Το σύστημα $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{\mathbb{b}}$ έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα $\underline{\mathbb{b}}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων-στήλες του πίνακα του συστήματος.

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει ότι

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
 a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m
 \end{array}
 \Leftrightarrow x_1\underline{\Sigma}_1 + x_2\underline{\Sigma}_2 + \dots + x_n\underline{\Sigma}_n = \underline{\mathbb{b}}.$$

Έτσι το σύστημα $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{\mathbb{b}}$ γράφεται σε διανυσματική μορφή.

Η διανυσματική γραφή του συστήματος μας δίνει την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Το σύστημα $\mathbb{A}\underline{x} = \underline{\mathbb{b}}$ έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα $\underline{\mathbb{b}}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων-στήλης του πίνακα του συστήματος.

Μία n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι λύση του συστήματος αν και μόνο αν δίνει το $\underline{\mathbb{b}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\underline{\Sigma}_i, i \leq n$, δηλαδή εάν ισχύει ότι

$$x_1\underline{\Sigma}_1 + x_2\underline{\Sigma}_2 + \dots + x_n\underline{\Sigma}_n = \underline{\mathbb{b}}.$$

Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

κοιτάμε να βρούμε αριθμούς $x_1, \dots, x_n$ ώστε ο γραμμικός συνδυασμός των

διανυσμάτων στηλών $\underline{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$, $x_1 \underline{\Sigma}_1 + \dots + x_n \underline{\Sigma}_n$, να μας δώσει το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Έτσι τώρα βλέπουμε το σύστημα σε μορφή διανυσμάτων.

Παράδειγμα 29. Το σύστημα $\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}$ αρχικά το βλέπαμε ως το σημείο τομής ευθειών. Τώρα στην διανυσματική μορφή ρωτάμε αν μπορούμε να συνδυάσουμε τα διανύσματα $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ώστε να πάρουμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Εάν έχουμε τον πίνακα A θέλουμε να ξέρουμε εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για όλα τα b .

Εάν έχουμε τον πίνακα A θέλουμε να ξέρουμε εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για όλα τα b .

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι για να έχει το σύστημα λύση για κάθε b θα πρέπει να μπορούμε να γράψουμε κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στηλών του πίνακα A .

Εάν έχουμε τον πίνακα A θέλουμε να ξέρουμε εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για όλα τα b .

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι για να έχει το σύστημα λύση για κάθε b θα πρέπει να μπορούμε να γράψουμε κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στηλών του πίνακα A .

Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να έχει ο A ένα οδηγό σε κάθε γραμμή.

Θεώρημα 30. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- α) το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$
- β) κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων στηλών του A
- γ) ο A έχει οδηγό σε κάθε γραμμή.

Μια ισοδύναμη διατύπωση του β) είναι ότι τα διανύσματα στήλες του πίνακα A παράγουν τον $\mathbb{R}^m$.

Έχουμε δει την ισοδυναμία των α) και β).

Έστω ότι ισχύει το γ) Θα δείξουμε ότι ισχύει και το β)

Παίρνουμε ένα $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Τότε το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετατρέπεται στο ισοδύναμο $[\mathbf{U} : \mathbf{d}]$., όπου $\mathbf{U}$ κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον $\mathbf{A}$. Επειδή ο $\mathbf{U}$ έχει οδηγό σε κάθε γραμμή, δεν υπάρχει γραμμή της μορφής $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 | b]$ με $b \neq 0$. Τότε από το θεώρημα 23 το σύστημα είναι συμβατό.

Μένει να δείξουμε ότι το $\alpha) \Rightarrow \gamma$). Εάν δεν ισχύει η γ) τότε υπάρχει μια γραμμή του $\mathbf{U}$ που είναι μηδενική. Τότε και η τελευταία γραμμή ίση με $[0 \ 0 \ \cdots \ 0]$ εφόσον σ'ένα κλιμακωτό πίνακα αν μια γραμμή είναι μηδενική τότε και όλες οι επόμενες θα είναι μηδενικές. Τότε παίρνοντας το διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ με τελευταία συντεταγμένη ίση με 1 ο επαυξημένος πίνακας έχει τελευταία γραμμή ίση με $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 | 1]$. Από το θεώρημα 23 το σύστημα είναι δεν είναι συμβατό.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τον πίνακα να προκύπτει από ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Θα δούμε τώρα λίγο πιο τυπικά τον ορισμό του πίνακα.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τον πίνακα να προκύπτει από ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Θα δούμε τώρα λίγο πιο τυπικά τον ορισμό του πίνακα.

Πίνακας 3×1 είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ στο μορφή $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Πίνακας $m \times 1$ είναι

ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ γραμμένο στη μορφή $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τον πίνακα να προκύπτει από ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Θα δούμε τώρα λίγο πιο τυπικά τον ορισμό του πίνακα.

Πίνακας 3×1 είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ στο μορφή $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Πίνακας $m \times 1$ είναι

ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ γραμμένο στη μορφή $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$.

Εάν έχουμε μια n -άδα από διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_n$ τότε αυτά τα

αναπαριστάμε ως $\mathfrak{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$, $i \leq n$, όπου ο πρώτος δείκτης δείχνει την

συντεταγμένη του διανύσματος και ο δεύτερος το διάνυσμα.

Πίνακας $m \times n$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_1$, στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_2$ κ.ο.κ. Ένας $m \times n$ πίνακας έχει

m γραμμές, όπου η i — γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i —συντεταγμένη των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ (με αυτή την σειρά).

Πίνακας $m \times n$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_1$, στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_2$ κ.ο.κ. Ένας $m \times n$ πίνακας έχει

m γραμμές, όπου η i -γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ (με αυτή την σειρά).

n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα $\mathfrak{a}_j$,

Πίνακας $m \times n$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_1$, στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_2$ κ.ο.κ. Ένας $m \times n$ πίνακας έχει

m γραμμές, όπου η i -γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ (με αυτή την σειρά).

n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα $\mathfrak{a}_j$,

mn στοιχεία, τα $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Το (i, j) -στοιχείο του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι το $a_{i,j}$ και είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i -γραμμή και j -στήλη.

Πίνακας $m \times n$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_1$, στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_2$ κ.ο.κ. Ένας $m \times n$ πίνακας έχει

m γραμμές, όπου η i -γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ (με αυτή την σειρά).

n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα $\mathfrak{a}_j$,

mn στοιχεία, τα $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Το (i, j) -στοιχείο του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι το $a_{i,j}$ και είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i -γραμμή και j -στήλη.

Πίνακας $m \times n$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή στην πρώτη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_1$, στη δεύτερη στήλη βάζουμε τις συντεταγμένες του $\mathfrak{a}_2$ κ.ο.κ. Ένας $m \times n$ πίνακας έχει

m γραμμές, όπου η i -γραμμή, $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$, αποτελείται από την i -συντεταγμένη των διανυσμάτων $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ (με αυτή την σειρά).

n στήλες όπου η j -στήλη είναι το διάνυσμα $\mathfrak{a}_j$,

mn στοιχεία, τα $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Το (i, j) -στοιχείο του πίνακα $\mathbb{A}$ είναι το $a_{i,j}$ και είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i -γραμμή και j -στήλη.

Ένας $m \times n$ πίνακας $\mathbb{A}$ συμβολίζεται επίσης και ως $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{i=1, j=1}^{m, n}$.

Για ένα $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ το γινόμενο $\mathbb{A}\mathbf{x}$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 a_{1,1} \\ x_1 a_{2,1} \\ \vdots \\ x_1 a_{m,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 a_{1,2} \\ x_2 a_{2,2} \\ \vdots \\ x_2 a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} x_n a_{1,n} \\ x_n a_{2,n} \\ \vdots \\ x_n a_{m,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Από τον ορισμό έχουμε ότι

- 1) το γινόμενο $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ που είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα $\mathbb{A}$ πολλαπλασιασμένες με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{x}$. Δηλαδή

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = x_1 \Sigma_1 + x_2 \Sigma_2 + \cdots + x_n \Sigma_n$$

όπου Σ_i είναι το διάνυσμα που είναι η i στήλη του $\mathbb{A}$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι

- 1) το γινόμενο $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ που είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα $\mathbb{A}$ πολλαπλασιασμένες με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{x}$. Δηλαδή

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = x_1\mathbb{A}_1 + x_2\mathbb{A}_2 + \cdots + x_n\mathbb{A}_n$$

όπου $\mathbb{A}_i$ είναι το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{A}$.

- 2) το i -στοιχείο του διανύσματος $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της i -γραμμής του $\mathbb{A}$ με το διάνυσμα $\mathbf{x}$.

Δηλαδή το i -στοιχείο του $\mathbb{A}\mathbf{x}$ είναι το

$$[a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n$$

Παράδειγμα 31. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{x} &= -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 32. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ να βρεθεί το 3ο στοιχείο

του διανύσματος $\mathbb{A}\mathbb{x}$.

Το 3ο στοιχείο του $\mathbb{A}\mathbb{x}$ είναι το

$$\begin{aligned} [3\text{η-γραμμή } \mathbb{A}] \cdot \mathbb{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= (-2)9 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 = -14. \end{aligned}$$

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι για κάθε $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$, κάθε διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathbb{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{A}\mathbf{y} \quad (7)$$

$$\mathbb{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbb{A}\mathbf{x}. \quad (8)$$

Εάν έχουμε ένα σύστημα $Ax = b$ θέλουμε να βρούμε το σύνολο των λύσεων. Θα δούμε ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$ σχετίζεται με το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = 0$.

Εάν έχουμε ένα σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ θέλουμε να βρούμε το σύνολο των λύσεων. Θα δούμε ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ σχετίζεται με το σύνολο των λύσεων του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ορισμός 33. Ομογενές γραμμικό σύστημα ονομάζουμε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\dots & +a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array}.$$

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ο πίνακας του συστήματος τότε το παραπάνω σύστημα γράφεται ως $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Εάν έχουμε ένα σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ θέλουμε να βρούμε το σύνολο των λύσεων. Θα δούμε ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ σχετίζεται με το σύνολο των λύσεων του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ορισμός 33. Ομογενές γραμμικό σύστημα ονομάζουμε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\dots & +a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array}.$$

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ο πίνακας του συστήματος τότε το παραπάνω σύστημα γράφεται ως $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Εάν έχουμε το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ τότε είναι άμεσο ότι έχει λύση την n -άδα $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ή ισοδύναμα το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$.

Εάν έχουμε ένα σύστημα $\mathbb{A}x = b$ θέλουμε να βρούμε το σύνολο των λύσεων. Θα δούμε ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $\mathbb{A}x = b$ σχετίζεται με το σύνολο των λύσεων του συστήματος $\mathbb{A}x = 0$.

Ορισμός 33. Ομογενές γραμμικό σύστημα ονομάζουμε ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\dots & +a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array}.$$

Εάν $\mathbb{A}$ είναι ο πίνακας του συστήματος τότε το παραπάνω σύστημα γράφεται ως $\mathbb{A}x = 0$.

Εάν έχουμε το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}x = 0$ τότε είναι άμεσο ότι έχει λύση την n -άδα $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ή ισοδύναμα το μηδενικό διάνυσμα 0 .

Η λύση αυτή ονομάζεται **τετριμμένη λύση**.

Θέλουμε να ξέρουμε πότε ένα ομογενές σύστημα έχει και μη-τετριμμένη λύση. Την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα θα μας τη δώσει ο πίνακας του συστήματος.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 23 παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με τις λύσεις του ομογενούς συστήματος.

Πρόταση 2. Το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}x = 0$ έχει μη-τετριμμένη λύση αν και μόνο αν η κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\mathbb{A}$ έχει τουλάχιστον μια ελεύθερη μεταβλητή.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 23 παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με τις λύσεις του ομογενούς συστήματος.

Πρόταση 2. Το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη-τετριμμένη λύση αν και μόνο αν η κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\mathbb{A}$ έχει τουλάχιστον μια ελεύθερη μεταβλητή.

Για να λύσουμε ένα ομογενές σύστημα χρησιμοποιώντας πίνακες δεν χρειάζεται να πάρουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος αλλά μόνο τον πίνακα του συστήματος, δηλαδή τον πίνακα με τους συντελεστές των αγνώστων

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Αυτό διότι η τελευταία στήλη του επαυξημένου πίνακα έχει μόνο μηδενικά στοιχεία και με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τα στοιχεία της δεν μεταβάλλονται.

Παράδειγμα 34. Να λυθεί το ομογενές σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Αρχικά θα βρούμε τον κλιμακωτό πίνακα για το σύστημα.

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 3. Παίρνουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{2,1} = \frac{\text{συντελεστής πρώτης μεταβλητής στη 2η γραμμή}}{\text{πρώτο οδηγό}} = 1/3,$$

$$\lambda_{3,1} = \frac{\text{συντελεστής πρώτης μεταβλητής στη 3η γραμμή}}{\text{πρώτο οδηγό}} = 2/3,$$

Τότε αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{2,1}$ και από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{3,1}$ ο πίνακας $\mathbb{A}$ του συστήματος μετατρέπεται στον

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & -4/3 & -5/3 \\ 0 & -2/3 & 7/3 & -4/3 \end{bmatrix}$$

Η πρώτη μη-μηδενική στήλη μετά την πρώτη είναι η δεύτερη. Άρα η στήλη 2 είναι οδηγός στήλη.

Ο συντελεστής της δεύτερης μεταβλητής στην 2η γραμμή δεν είναι μηδέν και άρα ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός $5/3$. Παίρνουμε τον αριθμό

$$\lambda_{3,2} = \frac{\text{συντελεστής 2ης μεταβλητής στη 3η γραμμή}}{\text{δευτερο οδηγό}} = -\frac{2}{5}.$$

Τότε αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή τη δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{3,2}$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & -4/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 9/5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ο όρος στην τρίτη γραμμή και τρίτη στήλη είναι μη μηδενικός και είναι ο τρίτος οδηγός. Επειδή δεν υπάρχει τέταρτη γραμμή σταματάμε.

Ο πίνακας $\mathbb{A}_2$ είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Στον πίνακα $\mathbb{A}_2$ έχουμε τρεις οδηγούς, στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη. Άρα η πρώτη, δεύτερη και τρίτη μεταβλητή είναι βασικές ενώ η τέταρτη είναι ελεύθερη. Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος θα γράψουμε το σύστημα που μας δίνει ο πίνακας $\mathbb{A}_2$ σε μορφή εξισώσεων και στη συνέχεια θα πάρουμε την ελεύθερη μεταβλητή στο δεξιό μέρος των εξισώσεων.

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = 0 \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{5}{3}w = 0 \\ \frac{9}{5}z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = -2w \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{5}{3}w \\ \frac{9}{5}z = 2w \end{cases}.$$

Το σύστημα μετατράπηκε σε 3×3 άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και άρα έχει λύση.

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = 0 \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{5}{3}w = 0 \\ \frac{9}{5}z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = -2w \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{5}{3}w \\ \frac{9}{5}z = 2w \end{cases}.$$

Το σύστημα μετατράπηκε σε 3×3 άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και άρα έχει λύση.

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $z = \frac{10w}{9}$.

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} 3x - 2y + z + 2w = 0 \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{5}{3}w = 0 \\ \frac{9}{5}z - 2w = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = -2w \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{5}{3}w \\ \frac{9}{5}z = 2w \end{cases}.$$

Το σύστημα μετατράπηκε σε 3×3 άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και άρα έχει λύση.

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $z = \frac{10w}{9}$.

Από την δεύτερη παίρνουμε $y = \frac{1}{5}(5w + 4z) = \frac{1}{5}(5w + 4\frac{10}{9}w) = \frac{17w}{9}$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = 0 \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{5}{3}w = 0 \\ \frac{9}{5}z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = -2w \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{5}{3}w \\ \frac{9}{5}z = 2w \end{cases}.$$

Το σύστημα μετατράπηκε σε 3×3 άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και άρα έχει λύση.

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $z = \frac{10w}{9}$.

Από την δεύτερη παίρνουμε $y = \frac{1}{5}(5w + 4z) = \frac{1}{5}(5w + 4\frac{10}{9}w) = \frac{17w}{9}$

και από την πρώτη παίρνουμε $x = \frac{2w}{9}$.

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 2w = 0 \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{5}{3}w = 0 \\ \frac{9}{5}z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = -2w \\ \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{5}{3}w \\ \frac{9}{5}z = 2w \end{cases}.$$

Το σύστημα μετατράπηκε σε 3×3 άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και άρα έχει λύση.

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $z = \frac{10w}{9}$.

Από την δεύτερη παίρνουμε $y = \frac{1}{5}(5w + 4z) = \frac{1}{5}(5w + 4\frac{10}{9}w) = \frac{17w}{9}$

και από την πρώτη παίρνουμε $x = \frac{2w}{9}$.

Επομένως οι λύσεις είναι τα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w/9 \\ 17w/9 \\ 10w/9 \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2/9 \\ 17/9 \\ 10/9 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Η λύση της μορφής (9) λέμε ότι είναι σε παραμετρική μορφή με παράμετρο το w , την ελεύθερη μεταβλητή.

Εάν οι λύσεις του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δίνονται στην μορφή $\mathbf{c}_0 + \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2$ όπου $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ σταθερά διανύσματα και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η λύση δίνεται σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους τους αριθμούς λ_1, λ_2 .

Εάν οι λύσεις του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δίνονται στην μορφή $\mathbf{c}_0 + \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2$ όπου $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ σταθερά διανύσματα και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η λύση δίνεται σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους τους αριθμούς λ_1, λ_2 .

$$x + y + z = 0$$

Παράδειγμα 35. Να λυθεί το σύστημα $3x - 4y - 2z = 0$.

$$-x - 3y + 5z = 0$$

Εάν οι λύσεις του συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δίνονται στην μορφή $\mathbf{c}_0 + \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2$ όπου $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ σταθερά διανύσματα και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ λέμε ότι η λύση δίνεται σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους τους αριθμούς λ_1, λ_2 .

$$x + y + z = 0$$

Παράδειγμα 35. Να λυθεί το σύστημα $3x - 4y - 2z = 0$.

$$-x - 3y + 5z = 0$$

Ξεκινάμε να παράγουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος που είναι ο

$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 και παίρνουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{2,1} = \frac{\text{συντελεστής πρώτης μεταβλητής στη 2η γραμμή}}{\text{πρώτο οδηγό}} = 3,$$

$$\lambda_{3,1} = \frac{\text{συντελεστής πρώτης μεταβλητής στη 3η γραμμή}}{\text{πρώτο οδηγό}} = -1.$$

Τότε αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{2,1}$ και από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{3,1}$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Τότε αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{2,1}$ και από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{3,1}$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο συντελεστής στη θέση $(2, 2)$ είναι το $-7 \neq 0$. Άρα ο δεύτερος οδηγός είναι το -7 . Παίρνουμε τον αριθμό

$$\lambda_{3,2} = \frac{\text{συντελεστής 2η μεταβλητής στη 3η γραμμή}}{\text{δευτερο οδηγό}} = 2/7.$$

Αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή τη δεύτερη πολλαπλασιασμένη με τον $\lambda_{3,2}$ ο $\mathbb{A}_1$ μετατρέπεται

$$\mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 52/7 \end{bmatrix}.$$

Ο τρίτος οδηγός είναι ο αριθμός $52/7$. Άρα το σύστημα έχει μετατραπεί στο ισοδύναμο

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\ -7y - 5z &= 0 . \\ \frac{52}{7}z &= 0\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό είναι άνω τριγωνικό και είναι άμεσο ότι έχει μοναδική λύση τη μηδενική, $x = y = z = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του. Για να βρούμε τις λύσεις του θα χρησιμοποιήσουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του. Για να βρούμε τις λύσεις του θα χρησιμοποιήσουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$.

Εάν x_0 λύση του συστήματος $Ax = b$ και w μια λύση του ομογενούς $Ax = 0$ τότε το διάνυσμα $x_0 + w$ είναι επίσης λύση του $Ax = b$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του. Για να βρούμε τις λύσεις του θα χρησιμοποιήσουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$.

Εάν x_0 λύση του συστήματος $Ax = b$ και w μια λύση του ομογενούς $Ax = 0$ τότε το διάνυσμα $x_0 + w$ είναι επίσης λύση του $Ax = b$.

Πράγματι από την (7) παίρνουμε

$$A(x_0 + w) = Ax_0 + Aw = b + 0 = b.$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του. Για να βρούμε τις λύσεις του θα χρησιμοποιήσουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$.

Εάν x_0 λύση του συστήματος $Ax = b$ και w μια λύση του ομογενούς $Ax = 0$ τότε το διάνυσμα $x_0 + w$ είναι επίσης λύση του $Ax = b$.

Πράγματι από την (7) παίρνουμε

$$A(x_0 + w) = Ax_0 + Aw = b + 0 = b.$$

Τι άλλες λύσεις έχει το σύστημα? Ισχύει ότι όλες οι λύσεις του $Ax = b$ είναι οι $x_0 + w$ όπου w είναι λύση του ομογενούς.

Θεώρημα 36. Έστω το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και x_0 μια λύση του. Τότε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $x_0 + w$ όπου w μια οποιαδήποτε λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Θεώρημα 36. Έστω το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και x_0 μια λύση του. Τότε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $x_0 + w$ όπου w μια οποιαδήποτε λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Απόδειξη.

Έστω x_0 μια λύση του $Ax = b$. Εάν y είναι μια άλλη λύση του τότε

$$A(y - x_0) = Ay - Ax_0 = b - b = 0$$

και άρα το διάνυσμα $w = y - x_0$ είναι λύση του ομογενούς. Έτσι έχουμε ότι $y = x_0 + w$. □

Θεώρημα 36. Έστω το συμβατό σύστημα $Ax = b$ και x_0 μια λύση του. Τότε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $Ax = b$ είναι τα διανύσματα $x_0 + w$ όπου w μια οποιαδήποτε λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$.

Απόδειξη.

Έστω x_0 μια λύση του $Ax = b$. Εάν y είναι μια άλλη λύση του τότε

$$A(y - x_0) = Ay - Ax_0 = b - b = 0$$

και άρα το διάνυσμα $w = y - x_0$ είναι λύση του ομογενούς. Έτσι έχουμε ότι $y = x_0 + w$. □

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι ένα συμβατό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση, την τετριμμένη.

Παράδειγμα 37. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 37. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right].$$

Μετατρέποντας τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Παράδειγμα 37. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right].$$

Μετατρέποντας τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ο πρώτος οδηγός είναι στη στήλη 1 και είναι ο αριθμός 1 και ο δεύτερος οδηγός είναι στη στήλη 2 και είναι ο αριθμός -3 . Η τρίτη γραμμή είναι μηδενική και άρα έχουμε δύο οδηγούς. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Παράδειγμα 37. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right].$$

Μετατρέποντας τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ο πρώτος οδηγός είναι στη στήλη 1 και είναι ο αριθμός 1 και ο δεύτερος οδηγός είναι στη στήλη 2 και είναι ο αριθμός -3 . Η τρίτη γραμμή είναι μηδενική και άρα έχουμε δύο οδηγούς. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Γράφουμε το σύστημα που μας δίνει ο τελευταίος πίνακας σε μορφή εξισώσεων και στη συνέχεια μεταφέρουμε την ελεύθερη μεταβλητή στο δεξιό μέρος των εξισώσεων.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 + 3x_3 \\ -3x_2 &= 3 - 3x_3 \end{aligned}.$$

Παράδειγμα 37. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right].$$

Μετατρέποντας τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ο πρώτος οδηγός είναι στη στήλη 1 και είναι ο αριθμός 1 και ο δεύτερος οδηγός είναι στη στήλη 2 και είναι ο αριθμός -3 . Η τρίτη γραμμή είναι μηδενική και άρα έχουμε δύο οδηγούς. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Γράφουμε το σύστημα που μας δίνει ο τελευταίος πίνακας σε μορφή εξισώσεων και στη συνέχεια μεταφέρουμε την ελεύθερη μεταβλητή στο δεξιό μέρος των εξισώσεων.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 & \Rightarrow & & x_1 + 2x_2 &= 5 + 3x_3 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 & & & -3x_2 &= 3 - 3x_3 \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση μας δίνει $x_2 = -1 + x_3$ ενώ η πρώτη $x_1 = 7 + x_3$.

Παράδειγμα 37. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right].$$

Μετατρέποντας τον $\mathbb{A}$ σε κλιμακωτή μορφή παίρνουμε τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & \mathbf{-3} & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ο πρώτος οδηγός είναι στη στήλη 1 και είναι ο αριθμός 1 και ο δεύτερος οδηγός είναι στη στήλη 2 και είναι ο αριθμός -3 . Η τρίτη γραμμή είναι μηδενική και άρα έχουμε δύο οδηγούς. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Γράφουμε το σύστημα που μας δίνει ο τελευταίος πίνακας σε μορφή εξισώσεων και στη συνέχεια μεταφέρουμε την ελεύθερη μεταβλητή στο δεξιό μέρος των εξισώσεων.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 + 3x_3 \\ -3x_2 &= 3 - 3x_3 \end{aligned}.$$

Η δεύτερη εξίσωση μας δίνει $x_2 = -1 + x_3$ ενώ η πρώτη $x_1 = 7 + x_3$.

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι οι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + x_3 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι έχουμε τις λύσεις τους συστήματος σε παραμετρική μορφή με παράμετρο την ελεύθερη μεταβλητή x_3 .

Παράδειγμα 38. Έχουμε τρεις πόλεις που ανταλλάσσουν πληθυσμό ανά μήνα με τον ακόλουθο κανόνα:

Από την πόλη Α το $1/2$ του πληθυσμού μένει παραμένει στη πόλη, το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/4$ πάει στην πόλη Γ,

Παράδειγμα 38. Έχουμε τρεις πόλεις που ανταλλάσσουν πληθυσμό ανά μήνα με τον ακόλουθο κανόνα:

Από την πόλη A το $\frac{1}{2}$ του πληθυσμού μένει παραμένει στη πόλη, το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη B και το υπόλοιπο $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Γ, από την πόλη B το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη A, το $\frac{1}{2}$ του πληθυσμού παραμένει στην πόλη B και το υπόλοιπο $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Γ,

Παράδειγμα 38. Έχουμε τρεις πόλεις που ανταλλάσσουν πληθυσμό ανά μήνα με τον ακόλουθο κανόνα:

Από την πόλη Α το $\frac{1}{2}$ του πληθυσμού μένει παραμένει στη πόλη, το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Γ, από την πόλη Β το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $\frac{1}{2}$ του πληθυσμού παραμένει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Γ, και από την πόλη Γ το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $\frac{1}{2}$ δεν μετοικίζει.

Παράδειγμα 38. Έχουμε τρεις πόλεις που ανταλλάσσουν πληθυσμό ανά μήνα με τον ακόλουθο κανόνα:

Από την πόλη Α το $\frac{1}{2}$ του πληθυσμού μένει παραμένει στη πόλη, το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Γ, από την πόλη Β το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $\frac{1}{2}$ του πληθυσμού παραμένει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Γ, και από την πόλη Γ το $\frac{1}{4}$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $\frac{1}{4}$ πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $\frac{1}{2}$ δεν μετοικίζει.

Παράδειγμα 38. Έχουμε τρεις πόλεις που ανταλλάσσουν πληθυσμό ανά μήνα με τον ακόλουθο κανόνα:

Από την πόλη Α το $1/2$ του πληθυσμού μένει παραμένει στη πόλη, το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/4$ πάει στην πόλη Γ, από την πόλη Β το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $1/2$ του πληθυσμού παραμένει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/4$ πάει στην πόλη Γ, και από την πόλη Γ το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $1/4$ πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/2$ δεν μετοικίζει.

Γράφουμε τις παραπάνω πληροφορίες σε μορφή πίνακα

	A	B	Γ	
A	0.5	0.25	0.25	← ποσοστό που δίνουν στην πόλη Α οι Α,Β, Γ
B	0.25	0.5	0.25	← ποσοστό που δίνουν στην πόλη Β οι Α,Β, Γ
Γ	0.25	0.25	0.5	← ποσοστό που δίνουν στην πόλη Γ οι Α,Β, Γ

Παράδειγμα 38. Έχουμε τρεις πόλεις που ανταλλάσσουν πληθυσμό ανά μήνα με τον ακόλουθο κανόνα:

Από την πόλη Α το $1/2$ του πληθυσμού μένει παραμένει στη πόλη, το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/4$ πάει στην πόλη Γ, από την πόλη Β το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $1/2$ του πληθυσμού παραμένει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/4$ πάει στην πόλη Γ, και από την πόλη Γ το $1/4$ του πληθυσμού πάει στην πόλη Α, το $1/4$ πάει στην πόλη Β και το υπόλοιπο $1/2$ δεν μετοικίζει.

Γράφουμε τις παραπάνω πληροφορίες σε μορφή πίνακα

	A	B	Γ	
A	0.5	0.25	0.25	← ποσοστό που δίνουν στην πόλη Α οι Α,Β, Γ
B	0.25	0.5	0.25	← ποσοστό που δίνουν στην πόλη Β οι Α,Β, Γ
Γ	0.25	0.25	0.5	← ποσοστό που δίνουν στην πόλη Γ οι Α,Β, Γ

Στον παραπάνω πίνακα η πρώτη στήλη δείχνει πως μοίρασε η πόλη Α τον πληθυσμό της στις πόλεις Α,Β,Γ, η δεύτερη στήλη δείχνει πως μοίρασε η πόλη Β τον πληθυσμό της στις πόλεις Α,Β,Γ, και η τρίτη στήλη δείχνει πως μοίρασε η πόλη Γ τον πληθυσμό της στις πόλεις Α,Β,Γ.

Εάν $a_0 = A, b_0 = B, c_0 = \Gamma$ ο αρχικός πληθυσμός των πόλεων και a_k, b_k, c_k ο πληθυσμός των πόλεων τον k -μήνα τότε

$$a_1 = 0.5a_0 + 0.25b_0 + 0.25c_0, b_1 = 0.25a_0 + 0.5b_0 + 0.25c_0, c_1 = 0.25a_0 + 0.25b_0 + 0.5c_0$$

Εάν $a_0 = A, b_0 = B, c_0 = \Gamma$ ο αρχικός πληθυσμός των πόλεων και a_k, b_k, c_k ο πληθυσμός των πόλεων τον k -μήνα τότε

$$a_1 = 0.5a_0 + 0.25b_0 + 0.25c_0, b_1 = 0.25a_0 + 0.5b_0 + 0.25c_0, c_1 = 0.25a_0 + 0.25b_0 + 0.5c_0$$

ενώ το δεύτερο μήνα

$$a_2 = 0, 5a_1 + 0.25b_1 + 0.25c_1, b_2 = 0.25a_1 + 0.5b_1 + 0.25c_1, c_2 = 0.25a_1 + 0.25b_1 + 0.5c_1$$

Εάν $a_0 = A, b_0 = B, c_0 = \Gamma$ ο αρχικός πληθυσμός των πόλεων και a_k, b_k, c_k ο πληθυσμός των πόλεων τον k -μήνα τότε

$$a_1 = 0.5a_0 + 0.25b_0 + 0.25c_0, b_1 = 0.25a_0 + 0.5b_0 + 0.25c_0, c_1 = 0.25a_0 + 0.25b_0 + 0.5c_0$$

ενώ το δεύτερο μήνα

$$a_2 = 0.5a_1 + 0.25b_1 + 0.25c_1, b_2 = 0.25a_1 + 0.5b_1 + 0.25c_1, c_2 = 0.25a_1 + 0.25b_1 + 0.5c_1$$

Εάν πάρουμε τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$ ως παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

και επίσης

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \\ c_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \\ c_{k-1} \end{bmatrix}$$

Με απλή επαγωγή παίρνουμε

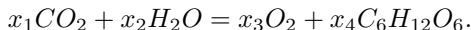
$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbb{A} \cdots \mathbb{A}}_{k\text{-φορές}} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} := \mathbb{A}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$

Με απλή επαγωγή παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbb{A} \cdots \mathbb{A}}_{k\text{-φορές}} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} := \mathbb{A}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε αν οι πληθυσμοί σταθεροποιούνται τελικά. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να υπολογίσουμε τον πίνακα $\mathbb{A}^k$ και να δούμε αν τα στοιχεία του τείνουν να σταθεροποιηθούν, Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο πως μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον πίνακα $\mathbb{A}^k$ και τον πληθυσμό κάθε πόλης.

Παράδειγμα 39. Στη φωτοσύνθεση τα φυτά χρησιμοποιούν την ηλιακή ενέργεια ώστε να μετατρέψουν το διοξείδιο του άνθρακα CO_2 και το νερό H_2O σε γλυκόζη $C_6H_{12}O_6$ και οξυγόνο, O_2 . Η χημική αντίδραση είναι της μορφής



Για να έχουμε σωστή αντίδραση θα πρέπει ο αριθμός των σωμάτων από κάθε υλικό να είναι ο ίδιος και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Βρείτε τα x_1, x_2, x_3, x_4 ώστε να έχουμε σωστή αντίδραση.

Για το C θα πρέπει να ισχύει $x_1 = 6x_4$,

για το H θα πρέπει να ισχύει $2x_1 + x_2 = 2x_3 + 6x_4$,

και για το O θα πρέπει να ισχύει $2x_2 = 12x_4$,

Επομένως έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 2x_2 & - & 12x_4 = 0 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα, εφόσον έχουμε $x_1 = 6x_4$,

$2x_2 = 12x_4 \Rightarrow x_2 = 6x_4$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε ότι $x_3 = 6x_4$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τις $x_1 = x_2 = x_3 = 6x_4, x_4 > 0$.