

Οι λύσεις για τις ασκήσεις του 5ο μαθήματος (5ς Εβδομάδας)

Από τις σημειώσεις

1) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Η λύση:

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την δεύτερη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0(-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -6 & -7 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + 0(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \\ &\quad + 3(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 0(-1)^{2+4} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & -7 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= -3 \left(5(-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + 4(-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \right) \\ &= -15(-10 + 12) - 12(-6 + 4) = -30 + 24 = -6. \end{aligned}$$

2) Δείξτε ότι $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$.

Η λύση:

Ας παρατηρήσουμε ότι η δεύτερη γραμμή του δεύτερου πίνακα προκύπτει αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή πρώτου πίνακα την πρώτη γραμμή του πολλαπλασιασμένη με 2. Επειδή $\det(E_{2,1}(2)A) = \det(A)$ έχουμε την ισότητα των οριζουσών.

3) Χρησιμοποιείστε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7, \\ -3x + z &= -8, \\ y + 2z &= -3. \end{aligned}$$

Επιβεβαιώστε ότι οι λύσεις που βρήκατε είναι λύσεις του συστήματος.

Η λύση:

Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ και η δεξιά πλευρά του συστήματος είναι

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ Ως εκ τούτου,}$$

$$\det(\mathbf{A}) = -1 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 6 - 2 = 4.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \left(-1 \det \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (13 - 7) = \frac{1}{4} 6 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \left(0 \det \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (6 + 2(-16 + 21)) = \frac{1}{4} 16 = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \left(-1 \det \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (-9 - (-16 + 21)) = -\frac{1}{4} 14 = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Άρα $x = \frac{3}{2}$, $y = 4$, $z = -\frac{7}{2}$. Θα αντικαθιστούμε στο σύστημα για να επιβιώσουμε ότι είναι ή λύση του συστήματος.

$$2\frac{3}{2} + 4 = 7,$$

$$-3\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -8,$$

$$4 - 2\frac{7}{2} = -3.$$