

## Οι λύσεις για τις ασκήσεις για το 4ο μάθημα (4ς Εβδομάδας)

Απο τις σημειώσεις

1) Να υπολογίστε το γινόμενο

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

*Η λύση:*

Το πρώτο στοιχείο είναι το

$$[1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2 + 6 = 4.$$

Το δεύτερο στοιχείο είναι το

$$[-3 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6 + 3 = 9.$$

Το τρίτο στοιχείο είναι το

$$[1 \ 6] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2 + 18 = 16.$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

2) Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η εξίσωση  $Ax = b$  δεν έχει λύση για όλα τα πιθανά  $b$  και περιγράψτε το σύνολο των  $b$  για τα οποία η εξίσωση  $Ax = b$  έχει λύση.

*Η λύση:*

Ο επανξιημένος πίνακας για το σύστημα  $Ax = b$  είναι

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -2 & 2 & 0 & b_2 \\ 4 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right].$$

Θα μεταφέρουμε σε κλιμακωτή μορφή,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -2 & 2 & 0 & b_2 \\ 4 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & 7 & 7 & b_3 - 4b_1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + \frac{7}{2}b_2 + 3b_1 \end{array} \right],$$

$$\lambda_{21} = -\frac{2}{1}, \lambda_{31} = \frac{4}{1}, \lambda_{32} = -\frac{7}{2}.$$

Από την τρίτη γραμμή ακολουθεί

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b_3 + \frac{7}{2}b_2 + 3b_1.$$

Δηλαδή,

$$b_3 + \frac{7}{2}b_2 + 3b_1 = 0.$$

Επειδή δεν έχουμε οδηγό σε κάθε γραμμή το σύστημα δεν έχει λύση για κάθε  $b \in R^3$ .

Εάν  $b_3 + \frac{7}{2}b_2 + 3b_1 \neq 0$  το σύστημα δεν έχει λύση. Το σύστημα έχει λύση όταν

$$b_3 + \frac{7}{2}b_2 + 3b_1 = 0 \text{ ως εκ τούτου } b_3 = -\frac{7}{2}b_2 - 3b_1.$$

**3)** Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος εξισώσεων.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

*Η λύση:*

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δύο οδηγούς στις στήλες 1 και 2, τους 1, -3 αντίστοιχα. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα A μας δίνει στο σύστημα

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$-3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 = x_3, \quad x_1 = x_3,$$

$$\text{Άρα η λύση είναι } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

**4)** Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του μη ομογενούς γραμμικού συστήματος εξισώσεων,

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13$$

$$-x_1 + x_2 = -8$$

*Η λύση:*

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή. Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Έχουμε δύο οδηγούς στις στήλες 1 και 2, τους 1, -3 αντίστοιχα. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα συστήματος μας δίνει στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2(x_3 - 1) - 3x_3 &= 5 \\ x_2 &= x_3 - 1, \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 7, \\ x_2 &= x_3 - 1, \end{aligned}$$

Άρα η λύση είναι  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

**5)** Δίνετε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε μια μη-τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος  $Ax = 0$  μετά από έλεγχο.

*Η λύση:*

Εάν  $x_1, x_2$  λύση του ομογενούς θα πρέπει

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

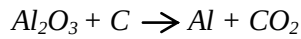
Ας παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Επομένως  $3x_1 - 2x_2 = 0$ . Ως εκ τούτου  $x_1 = \frac{2}{3}x_2$ .

‘Άρα  $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1$  είναι μια μη-τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος.

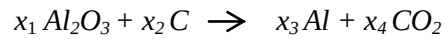
6) Να λυθεί η άσκηση. Έχουμε τη χημική αντίδραση



Όπου οξείδιο του αλουμινίου,  $Al_2O_3$ , και άνθρακας  $C$ , παράγουν αλουμίνιο και διοξείδιο του άνθρακα. Εξισορροπείστε τη χημική αντίδραση.

*Η λύση:*

Πολλαπλασιάζουμε κάθε συστατικό της αντίδρασης με μια άγνωστη μεταβλητή.



Για να είναι εξισορροπημένη η αντίδραση όσες μονάδες  $Al$ ,  $O$ ,  $C$  υπάρχει στο πρώτο μέρος της αντίδρασης τόσες μονάδες να υπάρχουν και στο δεύτερο μέρος. Η ισορροπία μας δίνει το σύστημα,

$$2x_1 = x_3,$$

$$3x_1 = 2x_4, \Leftrightarrow$$

$$x_2 = x_4$$

$$x_1 = \frac{2}{3}x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = \frac{4}{3}x_4,$$

$x_4$  είναι ελεύθερη μεταβλητή.