

Οι λύσεις για τις ασκήσεις του 10ο μαθήματος (10ς Εβδομάδας)

Από τις σημειώσεις

1) Να λυθεί άσκηση: Δίνετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + z + 3w = q \\ 3x + 7y + 5z = 0 \\ y + z + pw = 8 \end{cases}$$

Βρείτε για ποιες τιμές των p, q το σύστημα έχει α) μοναδική λύση, β) καμία λύση και γ) άπειρες λύσεις. Για τα p, q που έχει άπειρες λύσεις βρείτε το σύνολο των λύσεων.

Η λύση:

Μεταφέρουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & q \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & p & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{2,1}(1), E_{3,1}(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & q \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & p & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,2}(-1)E_{4,2}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & q \\ 0 & 0 & 2 & 3 & q \\ 0 & 0 & 1 & p+3 & 8+q \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\text{αλλαγή, η τρίτη με τετάρτη}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & q \\ 0 & 0 & 1 & p+3 & 8+q \\ 0 & 0 & 2 & 3 & q \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{4,3}(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & q \\ 0 & 0 & 1 & p+3 & 8+q \\ 0 & 0 & 0 & -2p-3 & -16-q \end{array} \right] \end{aligned}$$

α) μοναδική λύση:

Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $-2p - 3 \neq 0$. Δηλαδή $p \neq -\frac{3}{2}$. Τότε ο κλιμακωτός πίνακας έχει τέσσερις οδηγούς και έχει τάξη 4 ($\text{rank}=4$). Η διάσταση του μηδενοχώρου είναι $4-4=0$. Από την κλιμακωτή μορφή του πίνακα έχουμε

$$x + 2y + z = 0,$$

$$-y + 3w = q,$$

$$z + (p + 3)w = 8 + q$$

$$(-2p - 3)w = -16 - q.$$

Ως εκ τούτου έχουμε

$$w = \frac{16+q}{2p+3}, \quad z = -(p+3) \frac{16+q}{2p+3} + 8 + q,$$

$$y = 3w - q = 3 \frac{16+q}{2p+3} - q,$$

$$x = -2y - z = -6 \frac{16+q}{2p+3} - 2q + (p+3) \frac{16+q}{2p+3} - 8 - q = (p-3) \frac{16+q}{2p+3} - 3q - 8.$$

β) καμία λύση:

Αν $-2p - 3 = 0$ ($p = -\frac{3}{2}$) και $-16 - q \neq 0$ ($q \neq -16$) τότε το σύστημα δεν έχει λύση.

γ) Άπειρες λύσεις:

Αν $-2p - 3 = 0$ ($p = -\frac{3}{2}$) και $-16 - q = 0$, ($q = 16$) τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Ο κλιμακωτός πίνακας έχει τρεις οδηγούς και έχει τάξη 3 ($\text{rank}=3$). Η διάσταση του μηδενοχώρου είναι $4-3=1$. Από την κλιμακωτή μορφή του πίνακα έχουμε

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 0, \\ -y + 3w &= q, \\ z + (p + 3)w &= 8 + q.\end{aligned}$$

Η ελεύθερη μεταβλητή είναι τέταρτη, w . Βρίσκουμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος v_0 . Παίρνουμε $w = 0$ και λύνουμε το σύστημα. Έχουμε

$$z = 8 + q, \quad y = -q, \quad x = -2y - z = 2q - 8 - q = q - 8.$$

$$\text{Άρα η ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι } v_0 = \begin{bmatrix} q - 8 \\ -q \\ 8 + q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η διάσταση του μηδενικού χώρου είναι $4 - 3 = 1$ και χρειαζόμαστε μια βάση. Για να βρούμε μια βάση του μηδενικού χώρου παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $w = 1$ και λύνουμε το ομογενές σύστημα $\mathbf{Ax} = 0$,

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 0, \\ -y + 3w &= 0, \\ z + (p + 3)w &= 0.\end{aligned}$$

Έχουμε

$$z = -p - 3, \quad y = 3, \quad x = -2y - z = -6 + p + 3 = p - 3.$$

Επομένως $\begin{bmatrix} p - 3 \\ 3 \\ -p - 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι η βάση του μηδενικού χώρου και $v = \lambda \begin{bmatrix} p - 3 \\ 3 \\ -p - 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος.

Άρα, το σύνολο των λύσεων του μη ομογενούς συστήματος είναι

$$v_0 + \lambda v = \begin{bmatrix} q - 8 \\ -q \\ 8 + q \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p - 3 \\ 3 \\ -p - 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

όπου $p = -\frac{3}{2}$, $q = 24$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

2) Να λυθεί άσκηση: Δίνετε το σύστημα

$$\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ -x + 2y - 5z = b_1 \\ 5x - 13y + 13z = b_2 \end{cases}$$

α) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση?

β) Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Η λύση:

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[\mathbf{A} : \mathbf{b}]$ του συστήματος. Με

στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & b_1 \\ 5 & -13 & 13 & b_2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2,1}(-1), E_{3,1}(5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & b_1 + 4 \\ 0 & 2 & 8 & b_2 - 20 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & b_1 + 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 + b_2 - 12 \end{array} \right]$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $2b_1 + b_2 - 12 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή

του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z = 2b_1 + b_2 - 12$.

Εάν $2b_1 + b_2 - 12 \neq 0$ τότε το σύστημα δεν έχει λύση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2 να ικανοποιούν την $2b_1 + b_2 - 12 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & b_1 + 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -1 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και έχει μια ελεύθερη μεταβλητή, z .

Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε την ελεύθερη μεταβλητή, την τρίτη, ίσες με μηδέν, $z = 0$.

Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -y = b_1 + 4 \end{cases}$$

Ως εκ τούτου $y = -b_1 - 4$, $x = 3(-b_1 - 4) + 4 = -3b_1 - 8$.

Έτσι το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό και έχει μοναδική λύση τη

$$\begin{bmatrix} -3b_1 - 8 \\ -b_1 - 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα μια ειδική λύση του συστήματος είναι η

$$v_0 = \begin{bmatrix} -3b_1 - 8 \\ -b_1 - 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του μη ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενοχώρο του A. Το ομογενές σύστημα που προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα είναι το

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -y - 4z = 0 \end{cases}$$

Για $z = 1$ βρίσκουμε $y = -4$ και $x = -13$. Έτσι $\begin{bmatrix} -13 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι η βάση του μηδενοχώρου. Άρα

$v = \lambda \begin{bmatrix} -13 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος. Άρα το σύνολο των λύσεων του μη ομογενούς συστήματος είναι

$$v_0 + v = \begin{bmatrix} -3b_1 - 8 \\ -b_1 - 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -13 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$