

Οι λύσεις για τις ασκήσεις του 11ο μαθήματος (11ς Εβδομάδας)

Από τις σημειώσεις

1) Να λυθεί η άσκηση: Είναι το $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; Εάν είναι βρείτε την ιδιοτιμή του.

Η λύση:

Εξετάζουμε εάν ισχύει $\mathbf{Aw} = \lambda \mathbf{w}$ για κάποιο λ .

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 - 6 + 3 \\ 6 + 6 - 2 \\ -3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -5,$$

έχουμε ότι το $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}$.

2) Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Η λύση:

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(2), E_{3,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε μια βασική μεταβλητή την πρώτη και δυο, δεύτερη και η τρίτη, μεταβλητές είναι ελεύθερες. Από την κλιμακωτή μορφή έχουμε

$$x + y + z = 0.$$

Για $z = 0, y = 1$ έχουμε

$$x + 1 = 0.$$

Ως εκ τούτου

$$x = -1.$$

Για $z = 1, y = 0$ έχουμε

$$x = -1.$$

Επομένως τα διανύσματα $b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι βάση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

3) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Η λύση:

Έχουμε ότι

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) &= (4 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (4 - \lambda)((4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1) \\ &= (4 - \lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2) \\ &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 33\lambda + 36. \end{aligned}$$

Για ιδιοτιμές

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = 0.$$

Δηλαδή,

$$(4 - \lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2) = (4 - \lambda)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_{1,2} = 4, 3$ ($\lambda_2 = 3$ είναι η διπλή ιδιοτιμή).