

Οι λύσεις για τις ασκήσεις του 3ο μαθήματος (3ς Εβδομάδας)

Από τις σημειώσεις

1) Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbf{A}$ με την Gauss-Jordan μέθοδο.

Η λύση:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

$$\text{Άρα } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε την τρίτη στήλη του $\mathbf{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbf{A}^{-1}$.

Η λύση:

Επειδή

$[\mathbf{A} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = [\mathbf{A} \mathbf{I}]$, από $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ συνεπάγεται ότι οι στήλες του $\mathbf{A}^{-1}$ είναι οι λύσεις τις εξισώσεις

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{e}_3$. Για να βρούμε την τρίτη στήλη του $\mathbf{A}^{-1}$ πρέπει να λύσουμε

την εξίσωση,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{e}_3.$$

Δηλαδή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

$$\text{Ως εκ τούτου αν } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ τότε } \begin{cases} -x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ -2x_3 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα η τρίτη στήλη } \mathbf{A}^{-1} \text{ είναι } \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3) Να λυθεί η άσκηση:

Βρείτε την **LU** παραγοντοποίηση του $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Η λύση:

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 2. Επίσης $\lambda_{2,1} = 2$, $\lambda_{3,1} = -3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 14 & 10 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1.$$

$$\text{Έχουμε } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & ? & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 7 και $\lambda_{3,2} = 2$.

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 14 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2.$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{E}_{31}(-3)\mathbf{E}_{21}(2)\mathbf{A},$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{E}_{32}(2)\mathbf{U}_1,$$

Για τον $\mathbf{L}$ πρέπει να πάρουμε

$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$ και διαιρέσουμε με 2 και 7 αντίστοιχα. Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι $\mathbf{E}_{31}(-3)$, $\mathbf{E}_{21}(2)$, $\mathbf{E}_{32}(2)$.

Τότε έχουμε

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$