

Οι λύσεις για τις ασκήσεις του 2ο μαθήματος (2ς Εβδομάδας)

Απο τις σημειώσεις

1) Να λυθεί η άσκηση: Υπολογίστε τους πίνακες $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3$ και $(5\mathbf{I}_3)\mathbf{A}$ εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Η λύση:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3 &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5\mathbf{I}_3)\mathbf{A} &= \left(5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -5 & 15 \\ -20 & 15 & -30 \\ -15 & 5 & 10 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2) Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ και ότι $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

Η λύση:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Άρα $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$.

3) Να λυθεί η άσκηση: Έστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

υπολογίστε το γινόμενο $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$. Βρείτε ένα πίνακα $\mathbf{B}$ ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Η λύση:

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 10 & 12 & 10 \\ 15 & 15 & 12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 15 \\ 6 & 10 & 12 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{B} = r\mathbf{I}_3$, όπου r είναι βαθμοτό.

- 4) Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$
να βρεθεί η 2η στήλη του πίνακα $\mathbf{B}$.

Η λύση:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2],$$

όπου $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ είναι στήλες του $\mathbf{B}$, δηλαδή, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2]$.

Υποθέτουμε $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Τότε

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 17 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -11, \\ -3x + 5y = 17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 11 \\ -3(3y - 11) + 5y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 11 \\ -9y + 33 + 5y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 11 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Ως εκ τούτου

$$x = 1, y = 4.$$

$$\text{Άρα } \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$