

Οι λύσεις για τις ασκήσεις για το πρώτο μάθημα (1ς Εβδομάδας)

Απο τις σημειώσεις και άλλες:

- 1) Βρείτε τις στοιχειώδεις πράξεις που μετασχηματίζουν τον πίνακα A στον πίνακα B

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Η λύση: Κάνουμε την εναλλαγή της πρώτης γραμμής με τη δεύτερη

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Μετά για να έχουμε την τρίτη γραμμή του B αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με 4/1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 6 \end{bmatrix} = B.$$

- 2) Ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος έχει μετασχηματιστεί με στοιχειώδεις πράξεις στον

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right].$$

Γράψτε το σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα A και εξετάστε αν είναι συμβατό. Εάν είναι βρείτε τη λύση του.

Η λύση:

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6$$

$$-7x_3 = 2$$

$$5x_3 = 0$$

Απο την τρίτη εξίσωση συνεπάγεται ότι $x_3 = 0$ και απο την δεύτερη εξίσωση συνεπάγεται ότι $x_3 = -2/7$. Άρα το σύστημα είναι ασύμβατο.

- 3) Μετασχηματίστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

σε κλιμακωτή μορφή και γράψτε τους οδηγούς και οδηγούς στήλες.

Η λύση:

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 που είναι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της πρώτης στήλης. Επίσης η πρώτη στήλη είναι η πρώτη οδηγός στήλη. Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Δηλαδή, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με 2/1 και αφαιρούμε από την δεύτερη γραμμή την πρώτη, πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό 2/1. Μετά πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με 4/1 και αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή την πρώτη, πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό 4/1.

Θα έχουμε

$$A \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -12 & -18 \end{bmatrix}$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη. Επειδή το δεύτερο στοιχείο της δεύτερης στήλης είναι μηδέν κάνουμε την εναλλαγή της δεύτερης γραμμής με την τρίτη

$$A_1 \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -12 & -18 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Ο δεύτερος οδηγός της δεύτερης στήλης είναι ο αριθμός -3.

Επειδή το στοιχείο της τρίτης γραμμής κάτω από τον δεύτερο οδηγό είναι μηδέν δεν αλλάζουμε την τρίτη γραμμή. Η τρίτη οδηγός στήλη είναι η τρίτη και ο τρίτος οδηγός είναι ο -3.

4) Μετασχηματίστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

σε κλιμακωτή μορφή και γράψτε τους οδηγούς και οδηγούς στήλες.

Η λύση:

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 2. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $-3/2$ και αφαιρούμε από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη, πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $-3/2$.

$$A_1 \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3/2 & 17/2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 3/2. Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 10/3 και αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή τη δεύτερη, πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό 10/3.

$$A_2 \rightarrow A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -67/3 & -29 \end{bmatrix}.$$

Η τρίτη στήλη οδηγός είναι η τρίτη και ο τρίτος οδηγός είναι ο αριθμός -67/3. Η κλιμακωτή μορφή της A είναι A_3 .

5) Μετασχηματίστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η λύση: Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -1 και αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή την πρώτη, πολλαπλασιασμένη με το αριθμό -1.

$$A \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η δεύτερη και ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός -1. Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με -2/1 και αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή την δεύτερη, πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό -2/1.

$$A_1 \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Η τρίτη στήλη οδηγός είναι η τρίτη και ο τρίτος οδηγός είναι ο αριθμός 14. Η κλιμακωτή μορφή της A είναι η A_2 .