

Άσκηση . Για τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε

α) μια βάση του χώρου στηλών β) τη διάσταση και μια βάση του μηδενохώρου του.

Άσκηση . Για τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε

α) μια βάση του χώρου στηλών β) τη διάσταση και μια βάση του μηδενохώρου του.

$$A \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση . Για τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε

α) μια βάση του χώρου στηλών β) τη διάσταση και μια βάση του μηδενохώρου του.

$$A \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δύο οδηγούς, στην πρώτη και τρίτη στήλη. Επομένως ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει διάσταση 2.

Άσκηση . Για τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε

α) μια βάση του χώρου στηλών β) τη διάσταση και μια βάση του μηδενохώρου του.

$$A \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δύο οδηγούς, στην πρώτη και τρίτη στήλη. Επομένως ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει διάσταση 2.

Μια βάση του είναι τα διανύσματα $\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επειδή $\dim \text{Col}(\mathbb{A}) + \dim N(\mathbb{A}) = 4$ έχουμε ότι η διάσταση του μηδενохώρου είναι 2.

Άσκηση . Για τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε

α) μια βάση του χώρου στηλών β) τη διάσταση και μια βάση του μηδενохώρου του.

$$A \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δύο οδηγούς, στην πρώτη και τρίτη στήλη. Επομένως ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει διάσταση 2.

Μια βάση του είναι τα διανύσματα $\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επειδή $\dim \text{Col}(\mathbb{A}) + \dim N(\mathbb{A}) = 4$ έχουμε ότι η διάσταση του μηδενохώρου είναι 2.

Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι η δεύτερη και η τρίτη. Για να βρούμε μια βάση του μηδενохώρου παίρνουμε $x_2 = 1$ και $x_4 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3 \cdot 1 &= 0 \\ x_3 + 2 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση . Για τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε

α) μια βάση του χώρου στηλών β) τη διάσταση και μια βάση του μηδενохώρου του.

$$A \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δύο οδηγούς, στην πρώτη και τρίτη στήλη. Επομένως ο χώρος στηλών του $\mathbb{A}$ έχει διάσταση 2.

Μια βάση του είναι τα διανύσματα $\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επειδή $\dim \text{Col}(\mathbb{A}) + \dim N(A) = 4$ έχουμε ότι η διάσταση του μηδενохώρου είναι 2.

Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι η δεύτερη και η τρίτη. Για να βρούμε μια βάση του μηδενохώρου παίρνουμε $x_2 = 1$ και $x_4 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3 \cdot 1 &= 0 \\ x_3 + 2 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_3 = 0$ και $x_1 = -1$. Άρα ένα διάνυσμα για τη βάση

του $N(A)$ είναι το $w_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε ένα δεύτερο στοιχείο της βάσης παίρνουμε $x_2 = 0$ και $x_4 = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + 3 \cdot 0 & + & 0 \cdot 1 & = & 0 \\ x_3 + 2 \cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

Για να βρούμε ένα δεύτερο στοιχείο της βάσης παίρνουμε $x_2 = 0$ και $x_4 = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & 3 \cdot 0 & + & 0 \cdot 1 & = 0 \\ x_3 + & 2 \cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_1 = 0$ και $x_3 = -2$. Άρα ένα δεύτερο διάνυσμα για τη

βάση του $N(A)$ είναι το $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε ένα δεύτερο στοιχείο της βάσης παίρνουμε $x_2 = 0$ και $x_4 = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & 3 \cdot 0 & + & 0 \cdot 1 & = 0 \\ & & & x_3 + & 2 \cdot 1 & = 0 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_1 = 0$ και $x_3 = -2$. Άρα ένα δεύτερο διάνυσμα για τη

βάση του $N(A)$ είναι το $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Τα διανύσματα w_1, w_2 είναι μια βάση του $N(A)$.

Άσκηση . Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right]$$

έχει

$\alpha)$ καμία $\beta)$ μία $\gamma)$ άπειρες λύσεις.

Βρείτε σε κάθε περίπτωση το σύνολο των λύσεων.

Λύση .

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(-1)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & -5 & -8 & a + 4 \end{array} \right]$$

Άσκηση . Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right]$$

έχει

α) καμία β) μία γ) άπειρες λύσεις.

Βρείτε σε κάθε περίπτωση το σύνολο των λύσεων.

Λύση .

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(-1)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & -5 & -8 & a + 4 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 + a + 12 \end{array} \right].$$

Άσκηση . Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right]$$

έχει

α) καμία β) μία γ) άπειρες λύσεις.

Βρείτε σε κάθε περίπτωση το σύνολο των λύσεων.

Λύση .

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(-1)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & -5 & -8 & a + 4 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 + a + 12 \end{array} \right].$$

Εάν $-a^2 + a + 12 \neq 0$ το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

Άσκηση . Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right]$$

έχει

α) καμία β) μία γ) άπειρες λύσεις.

Βρείτε σε κάθε περίπτωση το σύνολο των λύσεων.

Λύση .

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(-1)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & -5 & -8 & a + 4 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 + a + 12 \end{array} \right].$$

Εάν $-a^2 + a + 12 \neq 0$ το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

Έστω $-a^2 + a + 12 = 0 \Rightarrow a = -3, 4$.

Άσκηση . Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το παρακάτω σύστημα

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right]$$

έχει

α) καμία β) μία γ) άπειρες λύσεις.

Βρείτε σε κάθε περίπτωση το σύνολο των λύσεων.

Λύση .

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & a^2 \\ -1 & -7 & -11 & a \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(-1)E_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & -5 & -8 & a + 4 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & a^2 - 8 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 + a + 12 \end{array} \right].$$

Εάν $-a^2 + a + 12 \neq 0$ το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

Έστω $-a^2 + a + 12 = 0 \Rightarrow a = -3, 4$.

Ο κλιμακωτός πίνακας του συστήματος έχει δύο οδηγούς και έχει τάξη 2. Ο κλιμακωτός πίνακα του επαυξημένου πίνακα έχει επίσης τάξη 2 όταν $a = -3, 4$ και άρα το σύστημα έχει λύση. Επειδή η διάσταση του μηδενохώρου είναι $3 - 2 = 1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη.

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη.
Για να βρούμε μια ειδική λύση παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 0$.

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη.
Για να βρούμε μια ειδική λύση παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ -5x_2 & = & a^2 - 8 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-1}{5}(a^2 - 8)$ και $x_1 = 4 - 2x_2 = \frac{2}{5}(a^2 + 2)$.

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη.
Για να βρούμε μια ειδική λύση παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ -5x_2 & = & a^2 - 8 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-1}{5}(a^2 - 8)$ και $x_1 = 4 - 2x_2 = \frac{2}{5}(a^2 + 2)$.

Άρα ειδική λύση είναι το $w_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2a^2 + 4 \\ 8 - a^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη. Για να βρούμε μια ειδική λύση παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & = 4 \\ & -5x_2 & = a^2 - 8 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-1}{5}(a^2 - 8)$ και $x_1 = 4 - 2x_2 = \frac{2}{5}(a^2 + 2)$.

Άρα ειδική λύση είναι το $w_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2a^2 + 4 \\ 8 - a^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Για να βρούμε μια βάση του μηδενохώρου παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 1$ και λύνουμε το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}x = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +3 = 0 \\ & -5x_2 & -8 = 0 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-8}{5}$ και $x_1 = \frac{1}{5}$.

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη.
Για να βρούμε μια ειδική λύση παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ -5x_2 & = & a^2 - 8 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-1}{5}(a^2 - 8)$ και $x_1 = 4 - 2x_2 = \frac{2}{5}(a^2 + 2)$.

Άρα ειδική λύση είναι το $w_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2a^2 + 4 \\ 8 - a^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Για να βρούμε μια βάση του μηδενохώρου παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 1$ και λύνουμε το ομογενές σύστημα $\mathbb{A}x = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3 & = & 0 \\ -5x_2 - 8 & = & 0 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-8}{5}$ και $x_1 = \frac{1}{5}$.

Άρα μια βάση του μηδενохώρου είναι το διάνυσμα $w = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$

Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η τρίτη.
 Για να βρούμε μια ειδική λύση παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & = 4 \\ & -5x_2 & = a^2 - 8 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-1}{5}(a^2 - 8)$ και $x_1 = 4 - 2x_2 = \frac{2}{5}(a^2 + 2)$.

Άρα ειδική λύση είναι το $w_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2a^2 + 4 \\ 8 - a^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Για να βρούμε μια βάση του μηδενохώρου παίρνουμε την ελεύθερη μεταβλητή $x_3 = 1$ και λύνουμε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +3 = 0 \\ & -5x_2 & -8 = 0 \end{array}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_2 = \frac{-8}{5}$ και $x_1 = \frac{1}{5}$.

Άρα μια βάση του μηδενохώρου είναι το διάνυσμα $w = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$

Άρα το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι τα διανύσματα

$$w_0 + \lambda w = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2a^2 + 4 \\ 8 - a^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να λυθεί άσκηση: Δίνετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + z + 3w = q \\ 3x + 7y + 5z = 0 \\ y + z + pw = 8 \end{cases}.$$

Βρείτε για ποιες τιμές των p, q το σύστημα έχει

α) μοναδική λύση, β) καμία λύση και γ) άπειρες λύσεις.

Για τα p, q που έχει άπειρες λύσεις βρείτε το σύνολο των λύσεων.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$[A : b] \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$[A : b] \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z + 0w = b_3 - b_2 - b_1$.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$[A : b] \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z + 0w = b_3 - b_2 - b_1$.

Εάν $b_3 - b_2 - b_1 \neq 0$ τότε το σύστημα δεν έχει λύση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Άσκηση . Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + z + w = b_1 \\ x - y - z + w = b_2. \\ 2x \quad \quad + 2w = b_3 \end{cases}$$

α) ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_1, b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

β) να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Λύση . Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A : b]$ του συστήματος. Με στοιχειώδεις πράξεις θα πάρουμε τον κλιμακωτό πίνακα του συστήματος.

$$[A : b] \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right]$$

Για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ εφόσον η τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα είναι η $0x + 0y + 0z + 0w = b_3 - b_2 - b_1$.

Εάν $b_3 - b_2 - b_1 \neq 0$ τότε το σύστημα δεν έχει λύση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα b_1, b_2, b_3 να ικανοποιούν την $b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

Τότε το σύστημα έχει επαυξημένο πίνακα τον

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 .

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές.

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές. Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και τέταρτη, ίσες με μηδέν.

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές. Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και τέταρτη, ίσες με μηδέν. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ -2y &= b_2 - b_1 \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή. Έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές. Θα πρέπει να βρούμε μια ειδική λύση του συστήματος. Για να βρούμε μια ειδική λύση θα πάρουμε τις ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και τέταρτη, ίσες με μηδέν. Τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ -2y &= b_2 - b_1 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι άνω τριγωνικό και έχει μοναδική λύση τη $\begin{bmatrix} \frac{b_1+b_2}{2} \\ \frac{b_1-b_2}{2} \end{bmatrix}$.

Άρα μια ειδική λύση του συστήματος είναι η $w_0 = \begin{bmatrix} \frac{b_1+b_2}{2} \\ \frac{b_1-b_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Παίρνοντας $z = 0$ και $w = 1$ το

σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad x = -1.$$

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Παίρνοντας $z = 0$ και $w = 1$ το

σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad x = -1.$$

Άρα μια δεύτερη λύση του ομογενούς είναι η $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον μηδενικό χώρο του $\mathbb{A}$. Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος είναι αυτός της εξίσωσης (1).

Όπως είδαμε ο πίνακας έχει δύο οδηγούς, τον πρώτο στην πρώτη στήλη, τον αριθμό 1 και τον δεύτερο στη δεύτερη στήλη και γραμμή τον αριθμό -2 . Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2 και άρα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, την τρίτη και την τέταρτη.

Παίρνοντας $z = 1$ και $w = 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = -1 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Άρα μια λύση του ομογενούς είναι η $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Παίρνοντας $z = 0$ και $w = 1$ το

σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad x = -1.$$

Άρα μια δεύτερη λύση του ομογενούς είναι η $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι έχουμε ότι λύσεις του συστήματος είναι οι

$$w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \begin{bmatrix} \frac{b_1 + b_2}{2} - \lambda_2 \\ \frac{b_1 - b_2}{2} - \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Να λυθεί η άσκηση Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned}x - 3y + z &= 4 \\ -x + 2y - 5z &= b_1 \\ 5x - 13y + 13z &= b_2\end{aligned}$$

- α) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των b_2, b_3 ώστε το σύστημα να έχει λύση?
β) Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος όταν ικανοποιείται η συνθήκη του α) ερωτήματος.

Άσκηση . Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} (a+1)x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & (a+1)y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & (a+1)z & = & b^2 \end{array}$$

Βρείτε για ποια a και τη συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b, b^2 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

Λύση . Εάν $a+1=0$ τότε ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b^2 - b \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b^2 - b - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άσκηση . Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} (a+1)x + y + z & = & 1 \\ x + (a+1)y + z & = & b \\ x + y + (a+1)z & = & b^2 \end{array}$$

Βρείτε για ποια a και τη συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b, b^2 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

Λύση . Εάν $a + 1 = 0$ τότε ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b^2 - b \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b^2 - b - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Άσκηση . Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} (a+1)x + y + z & = & 1 \\ x + (a+1)y + z & = & b \\ x + y + (a+1)z & = & b^2 \end{array}$$

Βρείτε για ποια a και τη συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b, b^2 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

Λύση . Εάν $a + 1 = 0$ τότε ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b^2 - b \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b^2 - b - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Έστω $a + 1 \neq 0$. Φέρνουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

Άσκηση . Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} (a+1)x + y + z & = & 1 \\ x + (a+1)y + z & = & b \\ x + y + (a+1)z & = & b^2 \end{array}$$

Βρείτε για ποια a και τη συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b, b^2 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

Λύση . Εάν $a+1=0$ τότε ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b^2 - b \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b^2 - b - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Έστω $a+1 \neq 0$. Φέρνουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(\frac{1}{a+1})E_{2,1}(\frac{1}{a+1})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 - \frac{1}{a+1} & 1 - \frac{1}{a+1} & b - \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 - \frac{1}{a+1} & a+1 - \frac{1}{a+1} & b^2 - \frac{1}{a+1} \end{array} \right]$$

Άσκηση . Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} (a+1)x + y + z & = & 1 \\ x + (a+1)y + z & = & b \\ x + y + (a+1)z & = & b^2 \end{array}$$

Βρείτε για ποια a και τη συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b, b^2 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

Λύση . Εάν $a+1=0$ τότε ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b^2 - b \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b^2 - b - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Έστω $a+1 \neq 0$. Φέρνουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(\frac{1}{a+1})E_{2,1}(\frac{1}{a+1})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 - \frac{1}{a+1} & 1 - \frac{1}{a+1} & b - \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 - \frac{1}{a+1} & a+1 - \frac{1}{a+1} & b^2 - \frac{1}{a+1} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{M_2(a+1)M_3(a+1)} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)^2 - 1 & a+1 - 1 & (a+1)b - 1 \\ 0 & a+1 - 1 & (a+1)^2 - 1 & (a+1)b^2 - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άσκηση . Για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rclcl} (a+1)x + y & + & z & = & 1 \\ x & + & (a+1)y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & (a+1)z & = & b^2 \end{array}$$

Βρείτε για ποια a και τη συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b, b^2 ώστε το σύστημα να έχει λύση.

Λύση . Εάν $a+1=0$ τότε ο πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{P_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b^2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b^2 - b \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b^2 - b - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Έστω $a+1 \neq 0$. Φέρνουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{3,1}(\frac{1}{a+1})E_{2,1}(\frac{1}{a+1})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 - \frac{1}{a+1} & 1 - \frac{1}{a+1} & b - \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 - \frac{1}{a+1} & a+1 - \frac{1}{a+1} & b^2 - \frac{1}{a+1} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{M_2(a+1)M_3(a+1)} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)^2 - 1 & a+1 - 1 & (a+1)b - 1 \\ 0 & a+1 - 1 & (a+1)^2 - 1 & (a+1)b^2 - 1 \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b - 1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2 - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ | b - 1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ | b^2 - 1]$.

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ | b - 1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ | b^2 - 1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a + 2 = 0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ | b - 1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ | b^2 - 1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a + 2 = 0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ |\ b - 1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ |\ b^2 - 1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a + 2 = 0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a + 2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ |\ b - 1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0\ |\ b^2 - 1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a + 2 = 0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a + 2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(\frac{1}{a+2})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & 0 & a(a+2) - \frac{a}{a+2} & (a+1)b^2-1 - \frac{1}{a+2}((a+1)b-1) \end{array} \right]$$

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b-1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b^2-1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a+2=0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a+2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(\frac{1}{a+2})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & 0 & a(a+2) - \frac{a}{a+2} & (a+1)b^2-1 - \frac{1}{a+2}((a+1)b-1) \end{array} \right]$$

Εάν $a(a+2) - \frac{a}{a+2} \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του b .

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b-1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b^2-1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a+2=0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a+2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(\frac{1}{a+2})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & 0 & a(a+2) - \frac{a}{a+2} & (a+1)b^2-1 - \frac{1}{a+2}((a+1)b-1) \end{array} \right]$$

Εάν $a(a+2) - \frac{a}{a+2} \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του b .

Έστω $a(a+2) - \frac{a}{a+2} = 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1, -3$.

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b-1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b^2-1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a+2=0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a+2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(\frac{1}{a+2})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & 0 & a(a+2) - \frac{a}{a+2} & (a+1)b^2-1 - \frac{1}{a+2}((a+1)b-1) \end{array} \right]$$

Εάν $a(a+2) - \frac{a}{a+2} \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του b .

Έστω $a(a+2) - \frac{a}{a+2} = 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1, -3$.

Την περίπτωση $a = -1 \Leftrightarrow a+1 = 0$ την εξετάσαμε στην αρχή.

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b-1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b^2-1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a+2=0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a+2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(\frac{1}{a+2})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & 0 & a(a+2) - \frac{a}{a+2} & (a+1)b^2-1 - \frac{1}{a+2}((a+1)b-1) \end{array} \right]$$

Εάν $a(a+2) - \frac{a}{a+2} \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του b .

Έστω $a(a+2) - \frac{a}{a+2} = 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1, -3$.

Την περίπτωση $a = -1 \Leftrightarrow a+1 = 0$ την εξετάσαμε στην αρχή.

Εάν $a = -3$ τότε η τρίτη γραμμή είναι ίση με

$$[0\ 0\ 0\ | -2b^2 - 2b - 2]$$

Εάν $a = 0$ τότε για να έχει το σύστημα λύση θα πρέπει $b = 1$ εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b-1]$ και η τρίτη γραμμή είναι η $[0\ 0\ 0|b^2-1]$.

Εάν $a \neq 0$ και $a+2=0$ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -b^2-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε b .

Εάν $a \neq 0$ και $a+2 \neq 0$ μπορούμε να συνεχίσουμε την μετατροπή του επαυξημένου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουμε.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & a & a(a+2) & (a+1)b^2-1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(\frac{1}{a+2})} \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a(a+2) & a & (a+1)b-1 \\ 0 & 0 & a(a+2) - \frac{a}{a+2} & (a+1)b^2-1 - \frac{1}{a+2}((a+1)b-1) \end{array} \right]$$

Εάν $a(a+2) - \frac{a}{a+2} \neq 0$ ο πίνακας του συστήματος έχει τρεις οδηγούς και άρα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του b .

Έστω $a(a+2) - \frac{a}{a+2} = 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \Leftrightarrow a = -1, -3$.

Την περίπτωση $a = -1 \Leftrightarrow a+1 = 0$ την εξετάσαμε στην αρχή.

Εάν $a = -3$ τότε η τρίτη γραμμή είναι ίση με

$$[0\ 0\ 0\ | -2b^2 - 2b - 2]$$

Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα έχει λύση ότι $-2b^2 - 2b - 2 = 0$.