

Άσκηση . Είναι το $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; Εάν είναι βρείτε την ιδιοτιμή του.

Άσκηση . Είναι το $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; Εάν

είναι βρείτε την ιδιοτιμή του.

Εξετάζουμε εάν ισχύει $Aw = \lambda w$ για κάποιο λ .

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 12 + 14 \\ 3 - 4 + 14 \\ 5 - 12 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση . Είναι το $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; Εάν

είναι βρείτε την ιδιοτιμή του.

Εξετάζουμε εάν ισχύει $Aw = \lambda w$ για κάποιο λ .

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 12 + 14 \\ 3 - 4 + 14 \\ 5 - 12 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{για κάθε } \lambda \text{ (γιατί?)}$$

έχουμε ότι το $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A .

Να λυθεί η άσκηση.

Άσκηση . Είναι το $\mathbb{W} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

Εάν είναι βρείτε την ιδιοτιμή του.

Να λυθεί η άσκηση.

Άσκηση . Είναι το $\mathbb{W} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

Εάν είναι βρείτε την ιδιοτιμή του.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.
Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

Η εξίσωση $x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

Η εξίσωση $x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$. Επομένως

$$N(\mathbb{A} - (-5)\mathbb{I}_2) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x & - & z = 0 \\ 3x - 3y + 3z & = & 0 \\ 2x - 2y + 2z & & \end{array}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array} .$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array}.$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

Έχουμε ότι $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array} .$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(3/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array}.$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(3/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο βασικές μεταβλητές την πρώτη και την δεύτερη και η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array}$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(3/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο βασικές μεταβλητές την πρώτη και την δεύτερη και η τρίτη μεταβλητής είναι ελεύθερη. Για $z = 1$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ -3y + 6 = 0 \end{array}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array}.$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(3/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο βασικές μεταβλητές την πρώτη και την δεύτερη και η τρίτη μεταβλητής είναι ελεύθερη. Για $z = 1$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ -3y + 6 = 0 \end{array} \Rightarrow x = 1, y = 2$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Πρέπει να βρούμε μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα $\mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3$.

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbb{A} - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array}$$

Φέρνουμε το πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(2)E_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(3/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο βασικές μεταβλητές την πρώτη και την δεύτερη και η τρίτη μεταβλητής είναι ελεύθερη. Για $z = 1$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ -3y + 6 = 0 \end{array} \Rightarrow x = 1, y = 2$$

Επομένως το διάνυσμα $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι βάση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην

ιδιοτιμή $\lambda = 3$

Άσκηση . Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ βρείτε μια βάση για τον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -5$.

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης έχουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

Τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης έχουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

Τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{w}) = \mathbb{A}^{-1}(\lambda\mathbf{w})$$

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης έχουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

Τότε

$$\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{w}) = \mathbb{A}^{-1}(\lambda\mathbf{w}) \Rightarrow (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})(\mathbf{w}) = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w})$$

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης έχουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

Τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{w}) = \mathbb{A}^{-1}(\lambda\mathbf{w}) \Rightarrow (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})(\mathbf{w}) = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}) \\ &\Rightarrow \mathbf{w} = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w})\end{aligned}$$

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης έχουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

Τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{w}) = \mathbb{A}^{-1}(\lambda\mathbf{w}) \Rightarrow (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})(\mathbf{w}) = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}) \\ &\Rightarrow \mathbf{w} = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\mathbf{w} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Άσκηση . Εάν $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $\mathbb{A}$ δείξτε ότι $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbb{A}^{-1}$.

Από τα δεδομένα της Άσκησης έχουμε ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε $\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$.

Τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbf{w}) = \mathbb{A}^{-1}(\lambda\mathbf{w}) \Rightarrow (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})(\mathbf{w}) = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}) \\ &\Rightarrow \mathbf{w} = \lambda\mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\mathbf{w} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbf{w}).\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του $\mathbb{A}^{-1}$ με ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{w}$.

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 7 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 7 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= (5 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -2 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda) ((3 - \lambda)(7 - \lambda) + 2) \end{aligned}$$

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 7 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= (5 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -2 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda) ((3 - \lambda)(7 - \lambda) + 2) \\ &= (5 - \lambda) (23 - 10\lambda + \lambda^2) \end{aligned}$$

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 7 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= (5 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -2 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda) ((3 - \lambda)(7 - \lambda) + 2) \\ &= (5 - \lambda) (23 - 10\lambda + \lambda^2) \\ &= (5 - \lambda)(\lambda - (5 + \sqrt{2}))(\lambda - (5 - \sqrt{2})) \end{aligned}$$

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 7 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= (5 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -2 & 7 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda) ((3 - \lambda)(7 - \lambda) + 2) \\ &= (5 - \lambda) (23 - 10\lambda + \lambda^2) \\ &= (5 - \lambda)(\lambda - (5 + \sqrt{2}))(\lambda - (5 - \sqrt{2})) \\ &= -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 73\lambda + 115. \end{aligned}$$

Να λυθεί η άσκηση:

Άσκηση . Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ $v_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$ και $x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

α) Δείξτε ότι το v_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το v_1 και ένα ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα v_2 του A .

β) Γράψτε x_0 ί ως $x_0 = v_1 + \lambda v_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = A^k x_0$. Υπολογίστε τα x_1, x_2 και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k x_k = v_1$.

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ί ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ί ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

Έτσι βρήκαμε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \quad \text{και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ί ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

Έτσι βρήκαμε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Θα βρούμε μια άλλη ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \quad \text{και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ί ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

Έτσι βρήκαμε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Θα βρούμε μια άλλη ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Έτσι για τον πίνακα $\mathbb{A}$ επειδή μια ιδιοτιμή του είναι ο αριθμός 1 εάν λ είναι μια άλλη ιδιοτιμή του έχουμε ότι

$$1 \cdot \lambda = \det(\mathbb{A}) = 0.42 - 0.12 = 0.3$$

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ί ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

Έτσι βρήκαμε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Θα βρούμε μια άλλη ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Έτσι για τον πίνακα $\mathbb{A}$ επειδή μια ιδιοτιμή του είναι ο αριθμός 1 εάν λ είναι μια άλλη ιδιοτιμή του έχουμε ότι

$$1 \cdot \lambda = \det(\mathbb{A}) = 0.42 - 0.12 = 0.3$$

Θα βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$.

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ή ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

Έτσι βρήκαμε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Θα βρούμε μια άλλη ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Έτσι για τον πίνακα $\mathbb{A}$ επειδή μια ιδιοτιμή του είναι ο αριθμός 1 εάν λ είναι μια άλλη ιδιοτιμή του έχουμε ότι

$$1 \cdot \lambda = \det(\mathbb{A}) = 0.42 - 0.12 = 0.3$$

Θα βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$.

$$\mathbb{A} \mathbf{v}_2 = 0.3 \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow (\mathbb{A} - 0.3 \mathbb{I}_2) \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} \quad \text{και } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

α) Δείξτε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από το $\mathbf{v}_1$ και ένα ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ του $\mathbb{A}$.

β) Γράψτε $\mathbf{z}_0$ ή ως $\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$

γ) Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίστε το $x_k = \mathbb{A}^k \mathbf{z}_0$. Υπολογίστε τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και γράψτε μια σχέση για το x_k . Αποδείξτε ότι $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1$.

Για το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.6 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 \\ 0.4 \cdot 3 + 0.7 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

Έτσι βρήκαμε ότι το $\mathbf{v}_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$.

Θα βρούμε μια άλλη ιδιοτιμή του $\mathbb{A}$. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα $\mathbb{A}$ είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Έτσι για τον πίνακα $\mathbb{A}$ επειδή μια ιδιοτιμή του είναι ο αριθμός 1 εάν λ είναι μια άλλη ιδιοτιμή του έχουμε ότι

$$1 \cdot \lambda = \det(\mathbb{A}) = 0.42 - 0.12 = 0.3$$

Θα βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_2$ για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$.

$$\mathbb{A} \mathbf{v}_2 = 0.3 \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow (\mathbb{A} - 0.3 \mathbb{I}_2) \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 0.3x & + & 0.3y = 0 \\ 0.4x & + & 0.4y = 0 \end{array} \Rightarrow x = -y.$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$.

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)\mathbf{v}_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\mathbf{x}_1 = \mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbb{A}(\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2)$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = A(v_1 + \lambda v_2) \\ &= Av_1 + \lambda Av_2 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = A(v_1 + \lambda v_2) \\ &= Av_1 + \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3v_2 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = A(v_1 + \lambda v_2) \\ &= Av_1 + \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3v_2 \end{aligned}$$

Επίσης

$$x_2 = Ax_1 = A(v_1 + 0.3 \cdot \lambda v_2)$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = A(v_1 + \lambda v_2) \\ &= Av_1 + \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3v_2 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 = A(v_1 + 0.3 \cdot \lambda v_2) \\ &= Av_1 + 0.3 \cdot \lambda Av_2 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = A(v_1 + \lambda v_2) \\ &= Av_1 + \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3v_2 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 = A(v_1 + 0.3 \cdot \lambda v_2) \\ &= Av_1 + 0.3 \cdot \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3^2 v_2 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_0 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$x_0 = v_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)v_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = A(v_1 + \lambda v_2) \\ &= Av_1 + \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3v_2 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 = A(v_1 + 0.3 \cdot \lambda v_2) \\ &= Av_1 + 0.3 \cdot \lambda Av_2 \\ &= v_1 + \lambda \cdot 0.3^2 v_2 \end{aligned}$$

Με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι

$$x_k = v_1 + \lambda \cdot (0.3)^k v_2$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$.

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)\mathbf{v}_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbb{A}(\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbb{A}\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbb{A}\mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot 0.3\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2 &= \mathbb{A}\mathbf{x}_1 = \mathbb{A}(\mathbf{v}_1 + 0.3 \cdot \lambda \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbb{A}\mathbf{v}_1 + 0.3 \cdot \lambda \mathbb{A}\mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot 0.3^2 \mathbf{v}_2\end{aligned}$$

Με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot (0.3)^k \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -(0.3)^k \\ (0.3)^k \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0.3$

Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$.

Άρα είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για το β) ερώτημα θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{3}{7} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{14} = -\lambda, \frac{-1}{14} = \lambda.$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + \left(-\frac{1}{14}\right)\mathbf{v}_2.$$

Για το γ) ερώτημα εάν $\lambda = -1/14$,

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \mathbb{A}\mathbf{x}_0 = \mathbb{A}(\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbb{A}\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbb{A}\mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot 0.3\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2 &= \mathbb{A}\mathbf{x}_1 = \mathbb{A}(\mathbf{v}_1 + 0.3 \cdot \lambda \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbb{A}\mathbf{v}_1 + 0.3 \cdot \lambda \mathbb{A}\mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot 0.3^2 \mathbf{v}_2\end{aligned}$$

Με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot (0.3)^k \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -(0.3)^k \\ (0.3)^k \end{bmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_1 + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1.$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbb{Z}_k$ είναι ο εξής.

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbb{z}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbb{x}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}^{-1}$.

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbb{X}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbb{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbb{B}^{-1}$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

και με επαγωγή

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

και με επαγωγή

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Έχουμε ότι $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.
Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

και με επαγωγή

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Έχουμε ότι $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.
Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

και με επαγωγή

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Έχουμε ότι $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{B}\mathbf{D}^k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

και με επαγωγή

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

$$\text{Έχουμε ότι } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{B}\mathbf{D}^k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-(0.3)^k}{14} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος για αν βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{x}_k$ είναι ο εξής.
Ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$ όπου

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{B}^{-1}$.

Με επαγωγή παίρνουμε ότι

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (0.3)^k \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

και με επαγωγή

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Έχουμε ότι $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{B}\mathbf{D}^k\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{B}\mathbf{D}^k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-(0.3)^k}{14} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + \frac{(0.3)^k}{14} \\ \frac{3}{7} + \frac{-(0.3)^k}{14} \end{bmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$