

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\det(\mathbb{A}) = 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\det(\mathbb{A}) = 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+4} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+4} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left(0 \det \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - \right. \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+4} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left(0 \det \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 0 \det \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+4} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left(0 \det \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 0 \det \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5 \det \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Θα αναπτύξουμε την ορίζουσα κατά την τρίτη γραμμή που έχει πολλά μηδενικά.

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= 2(-1)^{3+1} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+4} \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left(0 \det \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 0 \det \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5 \det \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2(5(7 \cdot 1 - 2 \cdot 3)) = 10. \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η τρίτη γραμμή του δεύτερου πίνακα προκύπτει αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή πρώτου πίνακα την πρώτη γραμμή του πολλαπλασιασμένη με 3.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η τρίτη γραμμή του δεύτερου πίνακα προκύπτει αφαιρώντας από την τρίτη γραμμή πρώτου πίνακα την πρώτη γραμμή του πολλαπλασιασμένη με 3.

Επειδή $\det(E_{3,1}(3)\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A})$ έχουμε την ισότητα των οριζουσών.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την πρώτη γραμμή την δεύτερη
η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται

Άσκηση 5. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την πρώτη γραμμή  δεύτερη
η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται
 $= 7$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή  πρώτη

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή τ

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή την πρώτη

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι πολλα/νη με 2

$$= 2 \cdot 7 = 14$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή την πρώτη

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι πολλα/νη με 2

$$= 2 \cdot 7 = 14$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\det(M_i(\lambda)\mathbb{A}) = \lambda \det(\mathbb{A})$ έχουμε ότι

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή την πρώτη

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι πολλα/νη με 2

$$= 2 \cdot 7 = 14$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\det(M_i(\lambda)\mathbb{A}) = \lambda \det(\mathbb{A})$ έχουμε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} =$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή την πρώτη

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι πολλα/νη με 2

$$= 2 \cdot 7 = 14$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\det(M_i(\lambda)\mathbb{A}) = \lambda \det(\mathbb{A})$ έχουμε ότι

$$\det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = 3^2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = 3^3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

γνωρίζοντας ότι $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 7$.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

αφαιρώντας από την δεύτερη γραμμή την πρώτη

$$= 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

εφόσον η δεύτερη γραμμή είναι πολλα/νη με 2

$$= 2 \cdot 7 = 14$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\det(M_i(\lambda)\mathbb{A}) = \lambda \det(\mathbb{A})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} &= 3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = 3^2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = 3^3 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \\ &= 27 \cdot 7 \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείστε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\det(\mathbb{A})$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\det(\mathbb{A}) = -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείστε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4. \end{aligned}$$



$$\frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \frac{1}{4} (-1 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}) \\ &= \frac{1}{4} (-10 - 6) = -4. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (-1 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}) \\ &= \frac{1}{4} (-10 - 6) = -4. \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (-1 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}) \\ &= \frac{1}{4} (-10 - 6) = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (2 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}) \\ &= 13. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 4 \\ -x + 2z &= 2 \\ 3x + y + 3z &= -2\end{aligned}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4.\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(-1 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}) \\ &= \frac{1}{4}(-10 - 6) = -4.\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(2 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}) \\ &= 13.\end{aligned}$$


$$z = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιείστε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$2x + y + z = 4$$

$$-x + 2z = 2$$

$$3x + y + 3z = -2$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= -1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -1(-3 - 6) - 1(4 + 1) = 4. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \frac{1}{4} (-1 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}) \\ &= \frac{1}{4} (-10 - 6) = -4. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= \frac{1}{4} (2 \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}) \\ &= 13. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{4} (-1 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Άσκηση 8. Χρησιμοποιείτε τον κανόνα Cramer για να υπολογίσετε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x + y &= 7 \\ -3x + z &= -8 . \\ y + 2z &= -3\end{aligned}$$

Επιβεβαιώστε ότι οι λύσεις που βρήκατε είναι λύσεις του συστήματος.

Άσκηση 9. α) Ισχύει ότι εάν $\mathbb{A}$ είναι μη-μηδενικός 2×2 πίνακας και $\det(\mathbb{A}) = 0$ τότε η μία στήλη είναι πολλαπλάσιο της άλλης?

Άσκηση 9. α) Ισχύει ότι εάν $\mathbb{A}$ είναι μη-μηδενικός 2×2 πίνακας και $\det(\mathbb{A}) = 0$ τότε η μία στήλη είναι πολλαπλάσιο της άλλης?

$$0 = \det \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow ad = cb$$

Άσκηση 9. α) Ισχύει ότι εάν $\mathbb{A}$ είναι μη-μηδενικός 2×2 πίνακας και $\det(\mathbb{A}) = 0$ τότε η μία στήλη είναι πολλαπλάσιο της άλλης?

$$0 = \det \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow ad = cb$$

Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση που $a \neq 0$ και $c \neq 0$.

Άσκηση 9. α) Ισχύει ότι εάν $\mathbb{A}$ είναι μη-μηδενικός 2×2 πίνακας και $\det(\mathbb{A}) = 0$ τότε η μία στήλη είναι πολλαπλάσιο της άλλης?

$$0 = \det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow ad = cb$$

Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση που $a \neq 0$ και $c \neq 0$.

Από την $ad = cb \Rightarrow b = (\frac{d}{c})a$ και $d(\frac{b}{a})c = (\frac{d}{c})c$.

Επομένως εάν $\lambda = \frac{d}{c}$ τότε

$$b = \lambda a \quad \text{και} \quad d = \lambda c.$$

Στην περίπτωση που $c = 0$ πρέπει $ad = 0$ εφόσον $ab - cd = 0$.

Εάν $a = 0$ τότε $a = 0b$ και $c = 0d$.

Εάν $d = 0$ τότε $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Εάν $a = 0$ τότε

$$a = 0b \text{ και } c = 0d$$

ενώ αν $a \neq 0$ τότε

$$b = \frac{b}{a}a \text{ και } 0 = \frac{b}{a}0.$$

Άσκηση 9. α) Ισχύει ότι εάν $\mathbb{A}$ είναι μη-μηδενικός 2×2 πίνακας και $\det(\mathbb{A}) = 0$ τότε η μία στήλη είναι πολλαπλάσιο της άλλης?

$$0 = \det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow ad = cb$$

Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση που $a \neq 0$ και $c \neq 0$.

Από την $ad = cb \Rightarrow b = (\frac{d}{c})a$ και $d(\frac{b}{a})c = (\frac{d}{c})c$.

Επομένως εάν $\lambda = \frac{d}{c}$ τότε

$$b = \lambda a \quad \text{και} \quad d = \lambda c.$$

Στην περίπτωση που $c = 0$ πρέπει $ad = 0$ εφόσον $ab - cd = 0$.

Εάν $a = 0$ τότε $a = 0b$ και $c = 0d$.

Εάν $d = 0$ τότε $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Εάν $a = 0$ τότε

$$a = 0b \text{ και } c = 0d$$

ενώ αν $a \neq 0$ τότε

$$b = \frac{b}{a}a \text{ και } 0 = \frac{b}{a}0.$$

Όμοια βρίσκουμε ότι εάν $a = 0$ τότε η μια στήλη είναι πολλαπλάσιο της άλλης.

B) Εάν $\det(\mathbb{A}) = 2$ και $\det(\mathbb{B}) = 3$ τότε $\det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 5$.

Αυτή η ισότητα είναι δεν ισχύει. Για παράδειγμα εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 10 + 4 = 14 \neq 5.$$

B) Εάν $\det(\mathbb{A}) = 2$ και $\det(\mathbb{B}) = 3$ τότε $\det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 5$.

Αυτή η ισότητα είναι δεν ισχύει. Για παράδειγμα εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 10 + 4 = 14 \neq 5.$$

c) Εάν $\mathbb{A}^3 = \mathbb{O}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 0$.

B) Εάν $\det(\mathbb{A}) = 2$ και $\det(\mathbb{B}) = 3$ τότε $\det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 5$.

Αυτή η ισότητα είναι δεν ισχύει. Για παράδειγμα εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = 10 + 4 = 14 \neq 5.$$

c) Εάν $\mathbb{A}^3 = \mathbb{O}$ τότε $\det(\mathbb{A}) = 0$.

Αυτή η ισότητα ισχύει διότι

$$\det(\mathbb{A}^3) = \det(\mathbb{O}) = 0 \Rightarrow 0 = \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{A}^2) = \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{A})$$

και άρα $\det(\mathbb{A}) = 0$.