

Να υπολογισθεί το γινόμενο

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθεί το γινόμενο

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο είναι απροσδιόριστο γιατί ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει δύο στήλες ενώ το διάνυσμα $\mathbb{x}$ έχει τρεις γραμμές.

Εάν το $\mathbb{x}$ είναι το $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ τότε στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{x}$ έχουμε ότι

Το πρώτο στοιχείο είναι το

$$(1\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [-4 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4) \cdot 3 + 2(-2) = -16$$

Να υπολογισθεί το γινόμενο

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο είναι απροσδιόριστο γιατί ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει δύο στήλες ενώ το διάνυσμα $\mathbb{x}$ έχει τρεις γραμμές.

Εάν το $\mathbb{x}$ είναι το $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ τότε στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{x}$ έχουμε ότι

Το πρώτο στοιχείο είναι το

$$(1\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [-4 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4) \cdot 3 + 2(-2) = -16$$

το δεύτερο στοιχείο είναι το

$$(2\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \ 6] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 6(-2) = -9$$

Να υπολογισθεί το γινόμενο

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο είναι απροσδιόριστο γιατί ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει δύο στήλες ενώ το διάνυσμα $\mathbb{x}$ έχει τρεις γραμμές.

Εάν το $\mathbb{x}$ είναι το $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ τότε στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{x}$ έχουμε ότι

Το πρώτο στοιχείο είναι το

$$(1\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [-4 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4) \cdot 3 + 2(-2) = -16$$

το δεύτερο στοιχείο είναι το

$$(2\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \ 6] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 6(-2) = -9$$

και το τρίτο στοιχείο είναι το

$$(3\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot 3 + 1(-2) = -2$$

Να υπολογισθεί το γινόμενο

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο είναι απροσδιόριστο γιατί ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει δύο στήλες ενώ το διάνυσμα $\mathbb{x}$ έχει τρεις γραμμές.

Εάν το $\mathbb{x}$ είναι το $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ τότε στο γινόμενο $\mathbb{A}\mathbb{x}$ έχουμε ότι

Το πρώτο στοιχείο είναι το

$$(1\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [-4 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4) \cdot 3 + 2(-2) = -16$$

το δεύτερο στοιχείο είναι το

$$(2\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [1 \ 6] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 6(-2) = -9$$

και το τρίτο στοιχείο είναι το

$$(3\text{η γραμμή } \mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot 3 + 1(-2) = -2$$

$$\text{Επομένως } \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ίδια άσκηση για

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Έστω $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ δεν έχει λύση για όλα τα πιθανά $\mathbb{b}$ και περιγράψτε το σύνολο των $\mathbb{b}$ για τα οποία η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Έστω $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ δεν έχει λύση για όλα τα πιθανά $\mathbb{b}$ και περιγράψτε το σύνολο των $\mathbb{b}$ για τα οποία η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι η $\mathbb{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{array} \right]$.

Έστω $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ δεν έχει λύση για όλα τα πιθανά $\mathbb{b}$ και περιγράψτε το σύνολο των $\mathbb{b}$ για τα οποία η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι η $\mathbb{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{array} \right]$.

Επειδή δεν έχουμε οδηγό σε κάθε γραμμή το σύστημα δεν έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^2$. Εάν $b_2 + 3b_1 \neq 0$ το σύστημα δεν έχει λύση. Το σύστημα έχει λύση όταν $b_2 + 3b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = -3b_1$.

Έστω $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ δεν έχει λύση για όλα τα πιθανά $\mathbb{b}$ και περιγράψτε το σύνολο των $\mathbb{b}$ για τα οποία η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι η $\mathbb{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{array} \right]$.

Επειδή δεν έχουμε οδηγό σε κάθε γραμμή το σύστημα δεν έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^2$. Εάν $b_2 + 3b_1 \neq 0$ το σύστημα δεν έχει λύση. Το σύστημα έχει λύση όταν $b_2 + 3b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = -3b_1$.

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τα $\mathbb{b}$ για τα οποία έχουμε λύση είναι να παρατηρήσουμε ότι η πρώτη στήλη του $\mathbb{A}$ είναι πολλαπλάσιο της δεύτερης στήλης του. Τότε

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -3\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = (-3\lambda_1 + \lambda_2) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Επομένως το $\mathbb{b}$ για το οποίο έχει λύση είναι τα $\lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ 3\lambda \end{bmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έστω } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ δεν έχει λύση για όλα τα πιθανά $\mathbb{b}$ και περιγράψτε το σύνολο των $\mathbb{b}$ για τα οποία η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ έχει λύση.

Έστω $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. Χρησιμοποιείστε αυτή τη σχέση και όχι πράξεις στις γραμμές για να βρείτε αριθμούς c_1, c_2, c_3 για τα οποία ισχύει

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Έστω $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. Χρησιμοποιείστε αυτή τη σχέση και όχι πράξεις στις γραμμές για να βρείτε αριθμούς c_1, c_2, c_3 για τα οποία ισχύει

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δει ότι $\mathbb{A}x = x_1 \Sigma_1 + x_2 \Sigma_2 + \cdots + x_n \Sigma_n$ όπου Σ_i είναι το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του $\mathbb{A}$.

Έστω $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. Χρησιμοποιείστε αυτή τη σχέση και όχι πράξεις στις γραμμές για να βρείτε αριθμούς c_1, c_2, c_3 για τα οποία ισχύει

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δει ότι $Ax = x_1 \Sigma_1 + x_2 \Sigma_2 + \cdots + x_n \Sigma_n$ όπου Σ_i είναι το διάνυσμα που είναι η i -στήλη του A .

Έτσι στο ερώτημα έχουμε

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Εάν $\mathbb{A}$ ένας 3×2 πίνακας εξηγήστε γιατί η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν μπορεί να είναι συμβατή για όλα τα $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

a) τρόπος Ο πίνακας $\mathbb{A}$ έχει δύο στήλες, που είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

Εάν A ένας 3×2 πίνακας εξηγήστε γιατί η εξίσωση $Ax = b$ δεν μπορεί να είναι συμβατή για όλα τα $b \in \mathbb{R}^3$.

a) τρόπος Ο πίνακας A έχει δύο στήλες, που είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Επειδή δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ παράγουν επίπεδο και όχι όλο τον $\mathbb{R}^3$ έχουμε ότι για κάθε διάνυσμα b που δεν ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα δύο διανύσματα στήλες, το σύστημα $Ax = b$ δεν έχει λύση.

Εάν A ένας 3×2 πίνακας εξηγήστε γιατί η εξίσωση $Ax = b$ δεν μπορεί να είναι συμβατή για όλα τα $b \in \mathbb{R}^3$.

α) τρόπος Ο πίνακας A έχει δύο στήλες, που είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Επειδή δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ παράγουν επίπεδο και όχι όλο τον $\mathbb{R}^3$ έχουμε ότι για κάθε διάνυσμα b που δεν ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα δύο διανύσματα στήλες, το σύστημα $Ax = b$ δεν έχει λύση.

β) τρόπος Ο πίνακας A έχει τρεις γραμμές και δύο στήλες. Επειδή έχει δύο στήλες έχει το πολύ δύο οδηγούς στήλες και άρα ο A μπορεί να έχει το πολύ δυο θέσεις οδηγούς, που δεν είναι αρκετές για να έχει οδηγό σε κάθε γραμμή.

Εάν A ένας 3×2 πίνακας εξηγήστε γιατί η εξίσωση $Ax = b$ δεν μπορεί να είναι συμβατή για όλα τα $b \in \mathbb{R}^3$.

α) τρόπος Ο πίνακας A έχει δύο στήλες, που είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Επειδή δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ παράγουν επίπεδο και όχι όλο τον $\mathbb{R}^3$ έχουμε ότι για κάθε διάνυσμα b που δεν ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα δύο διανύσματα στήλες, το σύστημα $Ax = b$ δεν έχει λύση.

β) τρόπος Ο πίνακας A έχει τρεις γραμμές και δύο στήλες. Επειδή έχει δύο στήλες έχει το πολύ δύο οδηγούς στήλες και άρα ο A μπορεί να έχει το πολύ δυο θέσεις οδηγούς, που δεν είναι αρκετές για να έχει οδηγό σε κάθε γραμμή.

Γενικότερα εάν A είναι $m \times n$ πίνακας και $m > n$ τότε ο A μπορεί να έχει το πολύ n οδηγούς στήλες και άρα το πολύ n -θέσεις οδηγού, που δεν είναι αρκετές ώστε να έχουμε θέση οδηγού σε κάθε γραμμή.

Έστω A ένας 5×3 πίνακας y ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ και z ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^5$ ώστε $Ay = z$.

Τι σας επιτρέπει να συμπεράνετε ότι το σύστημα $Ax = 5z$ έχει λύση.

Έστω A ένας 5×3 πίνακας y ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ και z ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^5$ ώστε $Ay = z$.

Τι σας επιτρέπει να συμπεράνετε ότι το σύστημα $Ax = 5z$ έχει λύση.

Ας θυμηθούμε ότι $A(\lambda x) = \lambda Ax$ δηλαδή το γινόμενο $A(\lambda x)$ είναι ίσο με το διάνυσμα Ax πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό λ .

Έστω A ένας 5×3 πίνακας y ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ και z ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^5$ ώστε $Ay = z$.

Τι σας επιτρέπει να συμπεράνετε ότι το σύστημα $Ax = 5z$ έχει λύση.

Ας θυμηθούμε ότι $A(\lambda x) = \lambda Ax$ δηλαδή το γινόμενο $A(\lambda x)$ είναι ίσο με το διάνυσμα Ax πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό λ .

Έτσι $A(5y) = 5(Ay) = 5z$ και επομένως το σύστημα $Ax = 5z$ είναι συμβατό.

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο οδηγούς στις στήλες 1 και 2, τους 2, -3 αντίστοιχα. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \color{red}{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & \color{red}{-3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο οδηγούς στις στήλες 1 και 2, τους 2, −3 αντίστοιχα. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\mathbb{A}$ μας δίνει στο σύστημα

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}2x_1 + 2x_2 &= -4x_3 \\ x_2 &= -x_3\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}x_1 &= -2x_3 - x_2 \\ x_2 &= -x_3\end{aligned}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \color{red}{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & \color{red}{-3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο οδηγούς στις στήλες 1 και 2, τους 2, -3 αντίστοιχα. Επομένως η τρίτη μεταβλητή είναι ελεύθερη.

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\mathbb{A}$ μας δίνει στο σύστημα

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}2x_1 + 2x_2 &= -4x_3 \\ x_2 &= -x_3\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}x_1 &= -2x_3 - x_2 \\ x_2 &= -x_3\end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\-x_1 + x_2 &= 0\end{aligned}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{Λύση } x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= -16 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= -16 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{2} & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & \color{red}{-3} & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= -16 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{2} & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & \color{red}{-3} & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= -16 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{2} & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & \color{red}{-3} & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\mathbb{A}$ μας δίνει στο σύστημα

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}x_1 + x_2 &= 4 - 2x_3 \\ x_2 &= -4 - x_3\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}x_1 &= 4 - 2x_3 - x_2 \\ x_2 &= -4 - x_3\end{aligned}$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= -16 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned}$$

Θα φέρουμε τον πίνακα του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{2} & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & \color{red}{-3} & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\mathbb{A}$ μας δίνει στο σύστημα

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}x_1 + x_2 &= 4 - 2x_3 \\ x_2 &= -4 - x_3\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}x_1 &= 4 - 2x_3 - x_2 \\ x_2 &= -4 - x_3\end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - x_3 \\ -4 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του  ομογενούς συστήματος

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13$$

$$-x_1 + x_2 = -8$$

Βρείτε σε παραμετρική μορφή τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13$$

$$-x_1 + x_2 = -8$$

$$\text{Λύση} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εάν A είναι ένας 2×5 πίνακας με δύο οδηγούς θέσεις, έχει το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ λύση?

Εάν A είναι ένας 2×5 πίνακας με δύο οδηγούς θέσεις, έχει το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ λύση?
Έχει το σύστημα $Ax = b$ λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^5$?

Εάν A είναι ένας 2×5 πίνακας με δύο οδηγούς θέσεις, έχει το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ λύση?

Έχει το σύστημα $Ax = b$ λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^5$?

α) Ο πίνακας A είναι 2×5 και έχει δύο οδηγούς στήλες.

Εάν A είναι ένας 2×5 πίνακας με δύο οδηγούς θέσεις, έχει το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ λύση?

Έχει το σύστημα $Ax = b$ λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^5$?

α) Ο πίνακας A είναι 2×5 και έχει δύο οδηγούς στήλες. Επομένως έχει τρεις ελεύθερες μεταβλητές και άρα έχει άπειρες λύσεις.

Εάν A είναι ένας 2×5 πίνακας με δύο οδηγούς θέσεις, έχει το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ λύση?

Έχει το σύστημα $Ax = b$ λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^5$?

α) Ο πίνακας A είναι 2×5 και έχει δύο οδηγούς στήλες. Επομένως έχει τρεις ελεύθερες μεταβλητές και άρα έχει άπειρες λύσεις.

β) Επειδή ο πίνακας έχει δύο οδηγούς θέσεις και έχει δύο γραμμές έχει οδηγό σε κάθε θέση.

Εάν A είναι ένας 2×5 πίνακας με δύο οδηγούς θέσεις, έχει το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ λύση?

Έχει το σύστημα $Ax = b$ λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^5$?

α) Ο πίνακας A είναι 2×5 και έχει δύο οδηγούς στήλες. Επομένως έχει τρεις ελεύθερες μεταβλητές και άρα έχει άπειρες λύσεις.

β) Επειδή ο πίνακας έχει δύο οδηγούς θέσεις και έχει δύο γραμμές έχει οδηγό σε κάθε θέση.

Επομένως έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^5$.

Δίνετε ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$. Βρείτε μια τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μετά από έλεγχο.

Δίνετε ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$. Βρείτε μια τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μετά από έλεγχο.

Εάν x_1, x_2 λύση του ομογενούς θα πρέπει $x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 21 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Δίνετε ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$. Βρείτε μια τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μετά από έλεγχο.

Εάν x_1, x_2 λύση του ομογενούς θα πρέπει $x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 21 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 21 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-1) \\ 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Δίνετε ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$. Βρείτε μια τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μετά από έλεγχο.

Εάν x_1, x_2 λύση του ομογενούς θα πρέπει $x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 21 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι

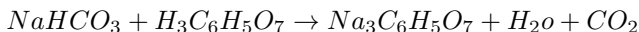
$$\begin{bmatrix} -3 \\ 21 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-1) \\ 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως για $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$ έχουμε μια μη-τετριμμένη λύση του ομογενούς.

Να λυθεί η άσκηση

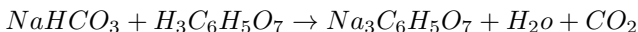
Δίνετε ο πίνακας $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$. Βρείτε μια τετριμμένη λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μετά από έλεγχο.

Έχουμε τη χημική αντίδραση



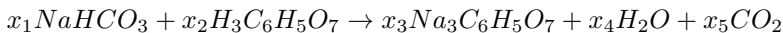
όπου διττανθρακικό νάτριο, $NaHCO_3$, και κιτρικό οξύ, $H_3C_6H_5O_7$, διαλύονται σε νερό και παράγονται κιτρικό νάτριο $Na_3C_6H_5O_7$ νερό και διοξείδιο του άνθρακα. Εξισορροπείστε τη χημική αντίδραση.

Έχουμε τη χημική αντίδραση



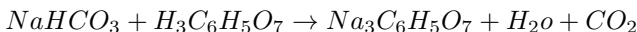
όπου διττανθρακικό νάτριο, $NaHCO_3$, και κιτρικό οξύ, $H_3C_6H_5O_7$, διαλύονται σε νερό και παράγονται κιτρικό νάτριο $Na_3C_6H_5O_7$ νερό και διοξείδιο του άνθρακα. Εξισορροπείστε τη χημική αντίδραση.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε συστατικό της αντίδρασης με μια άγνωστη μεταβλητή



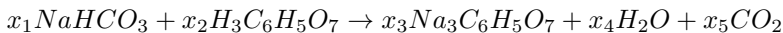
Για να είναι εξισορροπημένη η αντίδραση όσες μονάδες Na , H , C , O υπάρχει στο πρώτος μέρος της αντίδρασης τόσες μονάδες να υπάρχουν και στο δεύτερο μέρος.

Έχουμε τη χημική αντίδραση



όπου διττανθρακικό νάτριο, $NaHCO_3$, και κιτρικό οξύ, $H_3C_6H_5O_7$, διαλύονται σε νερό και παράγονται κιτρικό νάτριο $Na_3C_6H_5O_7$ νερό και διοξείδιο του άνθρακα. Εξισορροπείστε τη χημική αντίδραση.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε συστατικό της αντίδρασης με μια άγνωστη μεταβλητή



Για να είναι εξισορροπημένη η αντίδραση όσες μονάδες Na , H , C , O υπάρχει στο πρώτο μέρος της αντίδρασης τόσες μονάδες να υπάρχουν και στο δεύτερο μέρος. Αυτή η ισορροπία μας δίνει το σύστημα

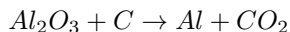
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 3x_3 & & x_1 - 3x_3 & = & 0 \\ x_1 + 8x_2 & = & 5x_3 + 2x_4 & & x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + 6x_2 & = & 6x_3 + x_5 & \Leftrightarrow & x_1 + 6x_2 - 6x_3 - x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + 7x_2 & = & 7x_3 + x_4 + 2x_5 & & 3x_1 + 7x_2 - 7x_3 - x_4 - 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Η γενική λύση είναι η x_5 ελεύθερη μεταβλητή,

$x_1 = x_5$, $x_2 = (1/3)x_5$, $x_3 = (1/3)x_5$, $x_4 = x_5$. Επιλέγοντας $x_5 = 3$ έχουμε την εξισορροπημένη αντίδραση



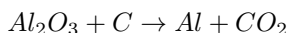
Να λυθεί η άσκηση. Έχουμε τη χημική αντίδραση



όπου οξείδιο του αλουμινίου, Al_2O_3 , και άνθρακας C , παράγουν αλουμίνιο και διοξείδιο του άνθρακα.

Εξισορροπήστε τη χημική αντίδραση.

Να λυθεί η άσκηση. Έχουμε τη χημική αντίδραση



όπου οξείδιο του αλουμινίου, Al_2O_3 , και άνθρακας C , παράγουν αλουμίνιο και διοξείδιο του άνθρακα.

Εξισορροπείστε τη χημική αντίδραση.

Γενική λύση $x_1 = (2/3)x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = (4/3)x_4$, και x_4 ελεύθερη μεταβλητή.