

Άσκηση 1. Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του A με την

Gauss-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Άσκηση 1. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Άσκηση 1. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Άσκηση 1. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Gauss-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την
Guass-Jordan μέθοδο.

Άσκηση 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Άσκηση 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Άσκηση 2. Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την

Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Από την τελευταία γραμμή παίρνουμε ότι ο $\mathbb{A}$ δεν είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον $\mathbb{I}_3$ και άρα ο $\mathbb{A}^{-1}$ δεν υπάρχει

Άσκηση 3. Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του $\mathbb{A}$ με την Guass-Jordan μέθοδο.

Άσκηση 3. Να λυθεί η άσκηση: Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε τον αντίστροφο του

$\mathbb{A}$ με την Guass-Jordan μέθοδο.

Λύση .

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε την τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε την τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ βρείτε την τρίτη στήλη του $\mathbb{A}^{-1}$ χωρίς να υπολογίσετε τον $\mathbb{A}^{-1}$

Λύση .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots$$

$$\text{Τρίτη στήλη του } \mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\text{?}} \\ \boxed{\text{?}} \\ \boxed{\text{?}} \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\mathbb{B}$ ένας $n \times p$ πίνακας δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$
α) έχει λύση τον πίνακα $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
β) η λύση αυτή είναι μοναδική.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\mathbb{B}$ ένας $n \times p$ πίνακας δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$
α) έχει λύση τον πίνακα $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
β) η λύση αυτή είναι μοναδική.

Λύση . Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι ο πίνακας είναι λύση.

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{B} = \mathbb{I}_n\mathbb{B} = \mathbb{B}.$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\mathbb{B}$ ένας $n \times p$ πίνακας δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$
α) έχει λύση τον πίνακα $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
β) η λύση αυτή είναι μοναδική.

Λύση . Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι ο πίνακας είναι λύση.

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{B} = \mathbb{I}_n\mathbb{B} = \mathbb{B}.$$

Θα δείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\mathbb{B}$ ένας $n \times p$ πίνακας δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$
α) έχει λύση τον πίνακα $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
β) η λύση αυτή είναι μοναδική.

Λύση . Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι ο πίνακας είναι λύση.

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{B} = \mathbb{I}_n\mathbb{B} = \mathbb{B}.$$

Θα δείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική.

Έστω $\mathbb{C}$ ένας πίνακας με $\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B}$. Τότε έχουμε

$$\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\mathbb{B}$ ένας $n \times p$ πίνακας δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$
α) έχει λύση τον πίνακα $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
β) η λύση αυτή είναι μοναδική.

Λύση . Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι ο πίνακας είναι λύση.

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{B} = \mathbb{I}_n\mathbb{B} = \mathbb{B}.$$

Θα δείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική.

Έστω $\mathbb{C}$ ένας πίνακας με $\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B}$. Τότε έχουμε

$$\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbb{C}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}$ είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\mathbb{B}$ ένας $n \times p$ πίνακας δείξτε ότι η εξίσωση $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$
α) έχει λύση τον πίνακα $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
β) η λύση αυτή είναι μοναδική.

Λύση . Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι ο πίνακας είναι λύση.

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\mathbb{B} = \mathbb{I}_n\mathbb{B} = \mathbb{B}.$$

Θα δείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική.

Έστω $\mathbb{C}$ ένας πίνακας με $\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{B} &\Rightarrow \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\mathbb{C}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \Rightarrow \\ (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{C} &= \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{I}_n\mathbb{C} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B},\end{aligned}$$

και άρα $\mathbb{C} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.
Εάν $CA = I_n$ τότε

$$CA = I_n \Rightarrow (CA)B = I_n B$$

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.
Εάν $CA = I_n$ τότε

$$\begin{aligned} CA = I_n &\Rightarrow (CA)B = I_n B \\ &\Rightarrow C(AB) = B \end{aligned}$$

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.
Εάν $CA = I_n$ τότε

$$\begin{aligned} CA = I_n &\Rightarrow (CA)B = I_n B \\ &\Rightarrow C(AB) = B \\ &\Rightarrow C(AB)(AB)^{-1} = B(AB)^{-1} \end{aligned}$$

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.
Εάν $CA = I_n$ τότε

$$\begin{aligned} CA = I_n &\Rightarrow (CA)B = I_n B \\ &\Rightarrow C(AB) = B \\ &\Rightarrow C(AB)(AB)^{-1} = B(AB)^{-1} \\ &\Rightarrow C = B(AB)^{-1}. \end{aligned}$$

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.
Εάν $CA = I_n$ τότε

$$\begin{aligned} CA = I_n &\Rightarrow (CA)B = I_n B \\ &\Rightarrow C(AB) = B \\ &\Rightarrow C(AB)(AB)^{-1} = B(AB)^{-1} \\ &\Rightarrow C = B(AB)^{-1}. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$AC = A(B(AB)^{-1}) = (AB)(AB)^{-1} = I_n$$

Άσκηση . Έστω A, B $n \times n$ πίνακες ώστε οι πίνακες B, AB είναι αντιστρέψιμοι. Δείξτε ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Λύση . Ψάχνουμε να βρούμε πίνακα C ώστε $AC = I_n = CA$.
Εάν $CA = I_n$ τότε

$$\begin{aligned} CA = I_n &\Rightarrow (CA)B = I_n B \\ &\Rightarrow C(AB) = B \\ &\Rightarrow C(AB)(AB)^{-1} = B(AB)^{-1} \\ &\Rightarrow C = B(AB)^{-1}. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$AC = A(B(AB)^{-1}) = (AB)(AB)^{-1} = I_n$$

και άρα $A^{-1} = B(AB)^{-1}$.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες εξετάστε εάν η εξίσωση

$$\mathbb{C}^{-1}(\mathbb{A} + \mathbb{X})\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{I}_n$$

έχει λύση. Εάν έχει βρείτε την.

Άσκηση . Εάν $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες εξετάστε εάν η εξίσωση

$$\mathbb{C}^{-1}(\mathbb{A} + \mathbb{X})\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{I}_n$$

έχει λύση. Εάν έχει βρείτε την.

Λύση .

$$\mathbb{C}^{-1}(\mathbb{A} + \mathbb{X})\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Άσκηση . Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες εξετάστε εάν η εξίσωση

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

έχει λύση. Εάν έχει βρείτε την.

Λύση .

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_n &\Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{I}_n \\ &\Rightarrow \mathbf{I}_n(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{I}_n = \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X}) = \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Άσκηση . Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες εξετάστε εάν η εξίσωση

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

έχει λύση. Εάν έχει βρείτε την.

Λύση .

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}_n &\Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{I}_n \\ &\Rightarrow \mathbf{I}_n(\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X})\mathbf{I}_n = \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{X}) = \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Επομένως εάν υπάρχει λύση θα είναι ο πίνακας $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Εξετάζουμε εάν ο πίνακας αυτός είναι λύση.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} + (\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}))\mathbf{B}^{-1} &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \\ &= (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C})(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{I}_n.\end{aligned}$$

Άσκηση . Βρείτε την LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{bmatrix}$

Άσκηση . Βρείτε την LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{bmatrix}$

Λύση . Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός -5 . Επίσης $\lambda_{2,1} = -2$, $\lambda_{3,1} = -2$.

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έπισης έχουμε } \mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & ? & 1. \end{bmatrix}$$

Ο δεύτερος οδηγός είναι ο αριθμός 2 και $\lambda_{3,2} = 5$.

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Επίσης έχουμε } \mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1. \end{bmatrix}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Άσκηση . Να λυθεί η άσκηση:

Βρείτε την LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Άσκηση . Να λυθεί η άσκηση:

Βρείτε την LU παραγοντοποίηση του $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Λύση .

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$