

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} =$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3\mathbb{I}_2)\mathbb{A} =$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3\mathbb{I}_2)\mathbb{A} = (3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}, (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3\mathbb{I}_2)\mathbb{A} = (3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 1.** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  υπολογίστε τους πίνακες  $3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}$ ,  $(3\mathbb{I}_2)\mathbb{A}$ .

**Λύση .**

$$3\mathbb{I}_2 - \mathbb{A} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (3\mathbb{I}_2)\mathbb{A} &= \left( 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot (-5) + 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 \\ 9 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Άσκηση .** Να λυθεί η άσκηση: Υπολογίστε τους πίνακες  $\mathbb{A} - 5\mathbb{I}_3$  και  $(5\mathbb{I}_3)\mathbb{A}$  εάν

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση .** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$  πόσο πρέπει να είναι το  $k$  ώστε  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ .

**Άσκηση .** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$  πόσο πρέπει να είναι το  $k$  ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

**Λύση .** Έχουμε ότι

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -7 & 18 + 3k \\ -4 & -9 + k \end{bmatrix}$$

**Άσκηση .** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$  πόσο πρέπει να είναι το  $k$  ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

**Λύση .** Έχουμε ότι

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -7 & 18 + 3k \\ -4 & -9 + k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -6 - k & -9 + k \end{bmatrix}$$

**Άσκηση .** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$  πόσο πρέπει να είναι το  $k$  ώστε  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ .

**Λύση .** Έχουμε ότι

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -7 & 18 + 3k \\ -4 & -9 + k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -6 - k & -9 + k \end{bmatrix}$$

Άρα θα πρέπει  $-4 = -6 - k$  και  $18 + 3k = 12$ .

**Άσκηση .** Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$  πόσο πρέπει να είναι το  $k$  ώστε

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

**Λύση .** Έχουμε ότι

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -7 & 18 + 3k \\ -4 & -9 + k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{B}\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -6 - k & -9 + k \end{bmatrix}$$

Άρα θα πρέπει  $-4 = -6 - k$  και  $18 + 3k = 12$ . Από αυτές τις ισότητες παίρνουμε ότι  $k = -2$ .

**Άσκηση .** Να λυθεί η άσκηση: Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  δείξτε ότι  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$  και ότι  $\mathbb{B} \neq \mathbb{C}$ .

**Άσκηση .** Να λυθεί η άσκηση: Έστω  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$   
υπολογίστε τα γινόμενα  $\mathbb{A}\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{D}\mathbb{A}$ . Βρείτε ένα πίνακα  $\mathbb{B}$  ώστε  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ .

**Άσκηση .** Να λυθεί η άσκηση: Εάν  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  και  $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$  να βρεθεί η 2η στήλη του πίνακα  $\mathbb{B}$ .

**Άσκηση .** Υποθέστε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  έχει μηδενικά στοιχεία ενώ ο πίνακας  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία. Τι μπορούμε να πούμε για τις στήλες του πίνακα  $\mathbb{A}$ ;

**Άσκηση .** Υποθέστε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  έχει μηδενικά στοιχεία ενώ ο πίνακας  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία. Τι μπορούμε να πούμε για τις στήλες του πίνακα  $\mathbb{A}$ ;

**Λύση .** Η τελευταία στήλη του  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  είναι ίση με  $\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B})$ .  
Επίσης

$$\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B}) =$$

**Άσκηση .** Υποθέστε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  έχει μηδενικά στοιχεία ενώ ο πίνακας  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία. Τι μπορούμε να πούμε για τις στήλες του πίνακα  $\mathbb{A}$ ;

**Λύση .** Η τελευταία στήλη του  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  είναι ίση με  $\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B})$ .  
Επίσης

$$\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B}) =$$

$$b_1 \cdot (1\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + b_2 \cdot (2\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + \cdots + b_n \cdot (n\text{-οστή στήλη του } \mathbb{A}).$$

**Άσκηση .** Υποθέστε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  έχει μηδενικά στοιχεία ενώ ο πίνακας  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία. Τι μπορούμε να πούμε για τις στήλες του πίνακα  $\mathbb{A}$ ;

**Λύση .** Η τελευταία στήλη του  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  είναι ίση με  $\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B})$ .  
Επίσης

$$\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B}) = \\ b_1 \cdot (1\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + b_2 \cdot (2\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + \cdots + b_n \cdot (n\text{-οστή στήλη του } \mathbb{A}).$$

Επειδή ο  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία, ένας από τους αριθμούς  $b_1, \dots, b_n$  είναι μη-μηδενικός.

**Άσκηση .** Υποθέστε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  έχει μηδενικά στοιχεία ενώ ο πίνακας  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία. Τι μπορούμε να πούμε για τις στήλες του πίνακα  $\mathbb{A}$ ;

**Λύση .** Η τελευταία στήλη του  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  είναι ίση με  $\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B})$ .  
Επίσης

$$\mathbb{A} \cdot (\text{τελευταία στήλη του } \mathbb{B}) = b_1 \cdot (1\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + b_2 \cdot (2\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + \cdots + b_n \cdot (n\text{-οστή στήλη του } \mathbb{A}).$$

Επειδή ο  $\mathbb{B}$  δεν έχει στήλη με μηδενικά στοιχεία, ένας από τους αριθμούς  $b_1, \dots, b_n$  είναι μη-μηδενικός.

Επειδή από την υπόθεση

$$b_1 \cdot (1\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + b_2 \cdot (2\text{η στήλη του } \mathbb{A}) + \cdots + b_n \cdot (n\text{-οστή στήλη του } \mathbb{A}) = \mathbf{0}$$

έχουμε ότι οι στήλες του  $\mathbb{A}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.

**Άσκηση .** Υποθέτουμε ότι  $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_m$  όπου  $\mathbb{I}_m$  ο μοναδιαίος  $m \times m$  πίνακας. Δείτε ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$  έχει λύση.

**Άσκηση .** Υποθέτουμε ότι  $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_m$  όπου  $\mathbb{I}_m$  ο μοναδιαίος  $m \times m$  πίνακας. Δείτε ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$  έχει λύση.

**Λύση .** Έστω  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ . Ψάχνουμε να βρούμε ένα διάνυσμα  $\mathbb{x}$  ώστε  $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ .

**Άσκηση .** Υποθέτουμε ότι  $A\mathbb{D} = \mathbb{I}_m$  όπου  $\mathbb{I}_m$  ο μοναδιαίος  $m \times m$  πίνακας. Δείτε ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$  έχει λύση.

**Λύση .** Έστω  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ . Ψάχνουμε να βρούμε ένα διάνυσμα  $\mathbb{x}$  ώστε  $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ . τι προτείνετε?

**Άσκηση .** Υποθέτουμε ότι  $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_m$  όπου  $\mathbb{I}_m$  ο μοναδιαίος  $m \times m$  πίνακας. Δείτε ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$  έχει λύση.

**Λύση .** Έστω  $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ . Ψάχνουμε να βρούμε ένα διάνυσμα  $\mathbb{x}$  ώστε  $\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ . τι προτείνετε?

Χρησιμοποιώντας ότι  $\mathbb{A}\mathbb{D} = \mathbb{I}_m \Rightarrow$

**Άσκηση .** Υποθέτουμε ότι  $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{I}_m$  όπου  $\mathbf{I}_m$  ο μοναδιαίος  $m \times m$  πίνακας. Δείτε ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  έχει λύση.

**Λύση .** Έστω  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Ψάχνουμε να βρούμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$  ώστε  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . τι προτείνετε?

Χρησιμοποιώντας ότι  $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{I}_m \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{D})\mathbf{b} = \mathbf{I}_m\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ .

**Άσκηση .** Υποθέτουμε ότι  $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{I}_m$  όπου  $\mathbf{I}_m$  ο μοναδιαίος  $m \times m$  πίνακας. Δείτε ότι για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  έχει λύση.

**Λύση .** Έστω  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Ψάχνουμε να βρούμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$  ώστε  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . τι προτείνετε?

Χρησιμοποιώντας ότι  $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{I}_m \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{D})\mathbf{b} = \mathbf{I}_m\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ . Επομένως για  $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{b}$  έχουμε ότι  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .