

Ορισμός 1. Στοιχειώδης πράξη γραμμών σ' ένα $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$ είναι μια από τις τρεις ακόλουθες πράξεις

- ❶ πολλαπλασιασμός της i -γραμμής $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ με τον αριθμό $\lambda \neq 0$ και αντικατάσταση αυτής με την $(\lambda a_{i,1}, \lambda a_{i,2}, \dots, \lambda a_{i,n})$,
- ❷ (αντικατάσταση) αντικατάσταση μιας γραμμής από τη διαφορά του εαυτού της και ενός ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής,
- ❸ εναλλαγή δύο γραμμών του πίνακα.

Ορισμός 1. Στοιχειώδης πράξη γραμμών σ' ένα $m \times n$ πίνακα $\mathbb{A}$ είναι μια από τις τρεις ακόλουθες πράξεις

- ❶ πολλαπλασιασμός της i -γραμμής $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ με τον αριθμό $\lambda \neq 0$ και αντικατάσταση αυτής με την $(\lambda a_{i,1}, \lambda a_{i,2}, \dots, \lambda a_{i,n})$,
- ❷ (αντικατάσταση) αντικατάσταση μιας γραμμής από τη διαφορά του εαυτού της και ενός ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης γραμμής,
- ❸ εναλλαγή δύο γραμμών του πίνακα.

Ας δούμε πιο αναλυτικά την πράξη της αντικατάστασης.

Εάν έχουμε την i -γραμμή $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ και την j -γραμμή $(a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n})$ όταν λέμε ότι θα αφαιρούμε από την i -γραμμή την j -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό λ , εννοούμε ότι θα αντικαθιστάμε την i -γραμμή με την γραμμή

$$(a_{i,1} - \lambda a_{j,1}, a_{i,2} - \lambda a_{j,2}, \dots, a_{i,n} - \lambda a_{j,n})$$

Η 2η στοιχειώδης πράξη έχει ισοδύναμη διατύπωση την εξής
Αντικατάσταση μιας γραμμής από το άθροισμα του εαυτού της με το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής.

Βρείτε τις στοιχειώδεις πράξεις που μετασχηματίζουν τον πίνακα $\mathbb{A}$ στον πίνακα $\mathbb{B}$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι οι δύο πρώτες γραμμές του $\mathbb{A}$ είναι ίδιες με τις δύο πρώτες γραμμές του $\mathbb{B}$.

Για να πάρουμε την τρίτη γραμμή του $\mathbb{B}$ αφαιρούμε από την τρίτη γραμμή τη

δεύτερη πολλαπλασιασμένη με 4

και όχι την πρώτη γραμμή πολλαπλασιασμένη με 2

Να λύσουν την ίδια άσκηση για

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος έχει μετασχηματιστεί με στοιχειώδεις πράξεις στον

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right]$$

Γράψτε το σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα A και εξετάστε αν είναι συμβατό. Εάν είναι βρείτε τη λύση του.

$$\begin{aligned} x_1 - \boxed{\frac{5}{4}}x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 4x_2 - 7x_3 &= 2 \\ 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι συμβατό εφόσον είναι άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στη διαγώνιο.

Λύση του είναι

$$x_3 = 0, \boxed{\frac{2}{5}} = 2 + 7x_3 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ και } x_1 = -6 - \boxed{\frac{5}{4}}x_2 = -8$$

Να λύσουν την άσκηση

Ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος έχει μετασχηματιστεί με στοιχειώδεις πράξεις στον

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right]$$

Γράψτε το σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα $\mathbb{A}$ και εξετάστε αν είναι συμβατό. Εάν είναι βρείτε τη λύση του.

Έχουμε το σύστημα

$$-m_1x_1 + x_2 = b_1$$

$$-m_2x_1 + x_2 = b_2$$

όπου m_1, m_2, b_1, b_2 σταθερές.

Δείξτε ότι

❶ το σύστημα έχει μοναδική λύση εάν $m_1 \neq m_2$

❷ εάν $m_1 = m_2$ το σύστημα θα είναι συμβατό μόνο εάν $b_1 = b_2$.

Έχουμε δει ότι ένα σύστημα 2×2 γεωμετρικά εξετάζει εάν δύο ευθείες τέμνονται.

Η ευθεία $m_1x + x_2 = b_1$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1, -m_1)$

ενώ η ευθεία $m_2x + x_2 = b_2$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1, -m_2)$.

Εάν $m_1 \neq m_2$ τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο.

Εάν $m_1 = m_2$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Εάν $b_1 \neq b_2$ δεν τέμνονται ενώ αν $b_1 = b_2$ ταυτίζονται.

Ορισμός 2. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.

Ορισμός 2. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.

Ορισμός 2. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.
- 3. σε μια γραμμή που δεν είναι όλα τα στοιχεία μηδέν, αν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι στη στήλη k , τότε τα στοιχεία της k -στήλης στις επόμενες γραμμές είναι μηδέν.

Ορισμός 2. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.
- 3. σε μια γραμμή που δεν είναι όλα τα στοιχεία μηδέν, αν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι στη στήλη k , τότε τα στοιχεία της k -στήλης στις επόμενες γραμμές είναι μηδέν.

Ορισμός 2. Λέμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν ισχύουν τα ακόλουθα

- 1. εάν μια γραμμή του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα στοιχεία της γραμμή είναι ίσα με μηδέν, τότε και όλες οι από κάτω γραμμές της είναι μηδέν. Ισοδύναμα στην περίπτωση που ο πίνακας έχει μηδενικές γραμμές αυτές είναι οι τελευταίες.
- 2. εάν έχουμε δύο διαδοχικές γραμμές $i, i + 1$ με μη-μηδενικά στοιχεία τότε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της $(i + 1)$ -γραμμής είναι σε επόμενη στήλη από αυτό της i -στήλης.
- 3. σε μια γραμμή που δεν είναι όλα τα στοιχεία μηδέν, αν το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι στη στήλη k , τότε τα στοιχεία της k -στήλης στις επόμενες γραμμές είναι μηδέν.

Εάν ο πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής που δεν είναι μηδενική, ονομάζεται *οδηγός* της γραμμής. Επίσης μια στήλη την ονομάζουμε *οδηγό στήλη* εάν περιέχει ένα στοιχείο που είναι οδηγός.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα
- 5) εάν μια στήλη περιέχει οδηγό ίσο με τη μονάδα, τότε ο οδηγός είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα
- 5) εάν μια στήλη περιέχει οδηγό ίσο με τη μονάδα, τότε ο οδηγός είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Ένας κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,l-1} & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,k} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{m,l} & \cdots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα οδηγοί είναι οι $a_{1,1}, a_{2,3}, a_{3,k}, \dots, a_{m,l}$.

Εάν ένας κλιμακωτός πίνακας ικανοποιεί επιπλέον τις ιδιότητες

- 4) κάθε οδηγός είναι ίσος με τη μονάδα
- 5) εάν μια στήλη περιέχει οδηγό ίσο με τη μονάδα, τότε ο οδηγός είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο της στήλης.

τότε λέμε ότι ο πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Οδηγός μετατροπής του (επαυξημένου) πίνακα συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.

Οδηγός μετατροπής του (επαυξημένου) πίνακα συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.
- 2ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, 3, \dots, m$. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} = \frac{\text{συντελεστής της 1-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{1 - \text{οδηγός}},$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

αφαιρούμε από την k -γραμμή την 1-γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,1}$

Οδηγός μετατροπής του (επαυξημένου) πίνακα συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.
- 2ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, 3, \dots, m$. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} = \frac{\text{συντελεστής της 1-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{1 - \text{οδηγός}},$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

αφαιρούμε από την k -γραμμή την 1-γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,1}$

Οδηγός μετατροπής του (επαυξημένου) πίνακα συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

Θα δούμε τα βήματα που κάνουμε για να μετατρέψουμε τον πίνακα ενός συστήματος σε κλιμακωτό.

Στο πρώτο βήμα

- 1ο Η πρώτη στήλη θα είναι στήλη οδηγός και βρίσκουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 1ης στήλης. Αυτό το στοιχείο θα είναι ο 1ος οδηγός. Εάν το στοιχείο αυτό εάν δεν βρίσκεται στην 1-γραμμή κάνουμε εναλλαγή της 1-γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην 1-γραμμή.
- 2ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, 3, \dots, m$. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} = \frac{\text{συντελεστής της 1-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{1 - \text{οδηγός}},$$

$$k = 2, 3, \dots, m,$$

αφαιρούμε από την k -γραμμή την 1-γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,1}$

Έτσι παράγουμε ένα καινούργιο πίνακα $\mathbb{A}_1$ που είναι γραμμικά ισοδύναμος με τον αρχικό πίνακα $\mathbb{A}$.

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i + 1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i + 1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i + 1)$ -οδηγός στήλη.

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.
- 3ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της j_{i+1} -στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,i+1} = \frac{a_{k,j_{i+1}}}{a_{i+1,j_{i+1}}} = \frac{\text{συντελεστής της } j_{i+1}\text{-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{(i+1)\text{-οδηγός}},$$

$k = i+2, i+3, \dots, m$, αφαιρούμε από την k -γραμμή την $(i+1)$ -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,i+1}$

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.
- 3ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της j_{i+1} -στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,i+1} = \frac{a_{k,j_{i+1}}}{a_{i+1,j_{i+1}}} = \frac{\text{συντελεστής της } j_{i+1}\text{-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{(i+1)\text{-οδηγός}},$$

$k = i+2, i+3, \dots, m$, αφαιρούμε από την k -γραμμή την $(i+1)$ -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,i+1}$

Γενικό βήμα: Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα οδηγό στοιχείο και μια οδηγό στήλη κάνουμε μετατροπή του πίνακα. Εάν έχουμε βρει τους i -πρώτους οδηγούς που ο καθένας βρίσκεται στην j_i -στήλη, έχουμε παράγει τους πίνακες

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{A}_i$$

Για να βρούμε την $(i+1)$ -στήλη οδηγό και τον $(i+1)$ -οδηγό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε στο πρώτο βήμα “ξεχνώντας” στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ τις πρώτες i -γραμμές και j_i -στήλες. Πιο συγκεκριμένα

- 1ο Στον πίνακα $\mathbb{A}_i$ βρίσκουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη που είναι μετά την j_i -στήλη. Αυτή είναι $(i+1)$ -οδηγός στήλη.
- 2ο Παίρνουμε το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της οδηγού στήλης ως οδηγό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο είναι ο $(i+1)$ -οδηγός. Εάν δεν βρίσκεται στην $(i+1)$ -γραμμή κάνουμε εναλλαγή της $(i+1)$ -γραμμής με μία από τις επόμενες γραμμές ώστε να φέρουμε τον οδηγό στην $(i+1)$ -γραμμή.
- 3ο Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε μηδενικά όλα τα στοιχεία της j_{i+1} -στήλης που είναι κάτω από τον οδηγό. Πιο συγκεκριμένα εάν πάρουμε τους αριθμούς

$$\lambda_{k,i+1} = \frac{a_{k,j_{i+1}}}{a_{i+1,j_{i+1}}} = \frac{\text{συντελεστής της } j_{i+1}\text{-μεταβλητής στην } k\text{-γραμμή}}{(i+1)\text{-οδηγός}},$$

$k = i+2, i+3, \dots, m$, αφαιρούμε από την k -γραμμή την $(i+1)$ -γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό $\lambda_{k,i+1}$

Συνεχίζουμε έως ότου δεν υπάρχουν μη-μηδενικές γραμμές για τροποποίηση.

Μετασχηματίστε τον πίνακα $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ σε κλιμακωτή μορφή και

γράψτε τους οδηγούς και οδηγούς στήλες

Ο πρώτος οδηγός είναι ο αριθμός 1 που είναι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της πρώτης στήλης. Επίσης η πρώτη στήλη είναι η πρώτη οδηγός στήλη. Έχουμε

$$\lambda_{2,1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$2\text{η γραμμή} - 2 \cdot 1\text{η γραμμή} = (2 - 2 \cdot 1, 4 - 2 \cdot 2, 6 - 2 \cdot 4, 8 - 2 \cdot 8) = (0, 0, -2, -8).$$

$$\text{Έχουμε } \lambda_{3,1} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$3\text{η γραμμή} - 3 \cdot 1\text{η γραμμή} = (3 - 3 \cdot 1, 6 - 3 \cdot 2, 9 - 3 \cdot 4, 12 - 3 \cdot 8) = (0, 0, -3, -12)$$

Έτσι ο πίνακας $\mathbb{A}$ μετατρέπεται στον

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τον 2ο οδηγό και 2η οδηγό στήλη ξεχνάμε την πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη του πίνακα $\mathbb{A}_1$.

1	2	4	8
0	0	-2	-8
0	0	-3	-12

Ψάχνουμε την πρώτη μη-μηδενική στήλη μετά την πρώτη στήλη.

Αυτή είναι η τρίτη στήλη. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της τρίτης στήλης στις γραμμές 2,3 είναι το -2 στη δεύτερη γραμμή. Άρα ο 2ος οδηγός είναι ο αριθμός -2 και η δεύτερη στήλη οδηγός είναι η τρίτη.

Έχουμε $\lambda_{3,2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} 3\text{η γραμμή} - \frac{3}{2} \cdot 2\text{η γραμμή} &= (0 - \frac{3}{2} \cdot 0, 0 - \frac{3}{2} \cdot 0, -3 - \frac{3}{2} \cdot (-2), -12 - \frac{3}{2} \cdot (-8)) \\ &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Έτσι παίρνουμε

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Να λύσουν την ίδια άσκηση για $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$