

Ασκήσεις και λύσεις για το φροντιστήριο του 9-ο μαθήματος (9ης Εβδομάδας)

Διανυσματικός χώρος, βάση διανυσματικού χώρου, Ρανκ και μηδενοχώρος (Απο το βιβλίο)

Έστω V είναι σύνολο αντικειμένων στο οποίο έχουν οριστεί δυο πράξεις, πρόσθεση και βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Αν u, v και w είναι αντικείμενα του V και k, m είναι βαθμωτά, τότε V ονομάζουμε διανυσματικό χώρο αν ικανοποιούνται τις παρακάτω απαιτήσεις,

- 1) $u, v \in V, u + v \in V,$
- 2) $u + v = v + u$
- 3) $u + (v + w) = (u + v) + w$
- 4) Υπάρχει ένα αντικείμενο στο V , το 0 οποίο ονομάζεται μηδενικά διανύσματα του V , τέτοιο ώστε $0 + u = u + 0 = u$ για κάθε u στο V .
- 5) Για κάθε u στο V , υπάρχει ένα αντικείμενο $-u$ στο V , το οποίο ονομάζεται αντίθετο του u , τέτοιο ώστε $u + (-u) = (-u) + u = 0$
- 6) Αν k είναι οποιοδήποτε βαθμωτό μέγεθος και u είναι οποιοδήποτε αντικείμενο του V , τότε το ku ανήκει στο V .
- 7) $k(u + v) = ku + kv$
- 8) $(k + m)u = ku + mu$
- 9) $k(mu) = (km)(u)$
- 10) $1u = u$

Παραδείγματα: Διανυσματικός χώρος πινάκων 2×2 , διανυσματικός χώρος πραγματικών συναρτήσεων.

Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται υπόχωρος του V αν το ίδιο το W είναι διανυσματικός χώρος ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίστηκαν.

Παραδείγματα: Μηδενικός υπόχωρος του V είναι $W = \{0\}$. Αν W είναι μια ευθεία διαμέσου της αρχής των αξόνων, είτε στο R^2 είτε στο R^3 τότε W είναι υπόχωρος του R^2 και του R^3 .

Αν $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ είναι ένα μη κενό σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V , τότε διανυσματική εξίσωση

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση, δηλαδή την $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$ την οποία ονομάζεται τετριμμένη λύση. Αν αυτή είναι η μοναδική λύση τότε λέμε ότι το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Αν υπάρχει και η άλλη λύση όταν κάποιο k_i δεν είναι μηδέν τότε το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο.

Αν $\mathbf{V}$ είναι ένας οποιοδήποτε διανυσματικός χώρος και $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathbf{V}$ τότε S ονομάζεται βάση του $\mathbf{V}$ αν ισχύουν οι παρακάτω δυο συνθήκες

- α) το S είναι γραμμικός ανεξάρτητο
- β) το S παράγει τον $\mathbf{V}$, ($\mathbf{V} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$)

Ο υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}$ που σχηματίζεται από όλους τους δυνατούς γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων ενός μη κενού συνόλου S ονομάζεται γραμμική θήκη του S και λέμε ότι τα διανύσματα του S παράγουν αυτόν τον διανυσματικό υπόχωρο. Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, τότε συμβολίζουμε τη θήκη του S με $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ή $\text{span}\{S\}$.

Ασκήσεις

- 1)** Θεωρήστε τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ και $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ του $\mathbf{R}^3$. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ είναι γραμμικός συνδυασμός του $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ενώ το διάνυσμα $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

Η λύση:

Για να είναι γραμμικός συνδυασμός του $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ πρέπει να υπάρχουν βαθμωτά k_1, k_2 τέτοια ώστε $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} k_1 + 6k_2 = 9 \\ 2k_1 + 4k_2 = 2 \\ -k_1 + 2k_2 = 7 \end{cases}$$

αν θα προσθέσουμε την δεύτερη εξίσωση με την τρίτη θα έχουμε

$$\begin{cases} k_1 + 6k_2 = 9 \\ k_1 + 6k_2 = 9 \\ -k_1 + 2k_2 = 7 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας απαλοιφή του Gauss έχουμε $k_1 = -3, k_2 = 2$. Οπότε

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}.$$

Για $\mathbf{w}'$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\begin{cases} k_1 + 6k_2 = 4 \\ 2k_1 + 4k_2 = -1 \\ -k_1 + 2k_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + 6k_2 = 4 \\ 2k_1 + 4k_2 = -1 \\ -k_1 + 2k_2 = 8 \end{cases}$$

Αν θα προσθέσουμε την δεύτερη εξίσωση με την τρίτη θα έχουμε

$$\begin{cases} k_1 + 6k_2 = 4 \\ k_1 + 6k_2 = 7 \\ -k_1 + 2k_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχουν τέτοια βαθμωτά k_1, k_2 για να γίνει $\mathbf{w}'$ γραμμικός συνδυασμός.

2) Ποια είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων του $\mathbf{R}^3$ γραμμικώς εξαρτημένα:

α) $(4, -1, 2), (4, 10, 2)$, β) $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$

Η λύση:

α)

$$k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως έχουμε το σύστημα,

$$\begin{cases} 4k_1 - 4k_2 = 0 \\ -k_1 + 10k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ -k_1 + 10k_2 = 0 \\ k_1 = -k_2 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0.$$

Δηλαδή, το σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

β)

$$k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{cases} -3k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \\ -k_2 + k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3k_1 + 6k_2 = 0 \\ 4k_1 + 5k_2 = 0 \\ k_3 = k_2 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -11k_2, k_3 = k_2.$$

Αν $k_2 = a, a \in \mathbf{R}$ τότε $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα, το σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

3) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 10, 2)$ και $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ σχηματίζουν μια βάση του $\mathbf{R}^3$.

Η λύση:

Θα πρέπει να δείξουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ότι παράγουν τον $\mathbf{R}^3$.

α) Πρέπει να θεωρήσουμε

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Και θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ στον $\mathbf{R}^3$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}.$$

Οι δυο εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν ως δυο γραμμικά συστήματα

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_3 = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = b_2 \\ c_1 + 4c_3 = b_3 \end{cases}$$

Το ομογενές σύστημα έχει μόνο τετριμμένη λύση, και το μη ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό για όλες τις τιμές των b_1, b_2 και b_3 . Τα δύο συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα $\det(A) = -1 \neq 0$. Επομένως, τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ γραμμικώς ανεξάρτητα και σχηματίζουν μια βάση για τον $\mathbf{R}^3$.

4) Έστω $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ το γραμμικό σύστημα,

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι $\mathbf{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του A εκφράζοντας το ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στήλη του A .

Η λύση:

Επιλύοντας το σύστημα με απαλοιφή Gauss έχουμε

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3,$$

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Άρα $\mathbf{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του A πίνακα.