

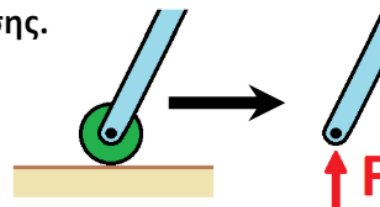


Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

Σε μία δισδιάστατη κατασκευή υπάρχουν τρία είδη στηρίξεων ή συνδέσεων:

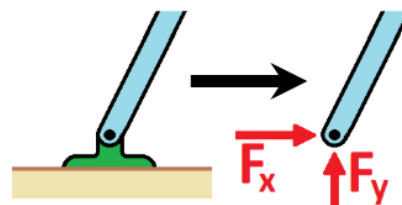
1. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη γνωστής διεύθυνσης.

- Κυλίσσεις, καλώδια, επιφάνειες χωρίς τριβή.
- Εμποδίζουν την κίνηση σε μία διεύθυνση.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν έναν άγνωστο.



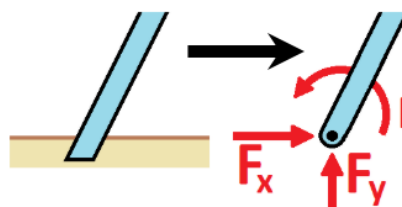
2. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους).

- Αρθρώσεις, επιφάνειες με τριβή.
- Εμποδίζουν την κίνηση αλλά όχι την περιστροφή.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν δύο αγνώστους.



3. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους) και μία ροπή.

- Πακτώσεις, πλήρης περιορισμός κινήσεων.
- Εμποδίζουν την κίνηση αλλά και την περιστροφή.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν τρεις αγνώστους.



Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

Στην περίπτωση δύο διαστάσεων, οι συνθήκες ισορροπίας απλοποιούνται αρκετά. Έτσι οι έξι **Στερεοστατικές Εξισώσεις Ισορροπίας** ανάγονται σε τρεις εξισώσεις.

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \quad \boxed{\Sigma F_y = 0} \quad \boxed{\Sigma M_A = 0}$$

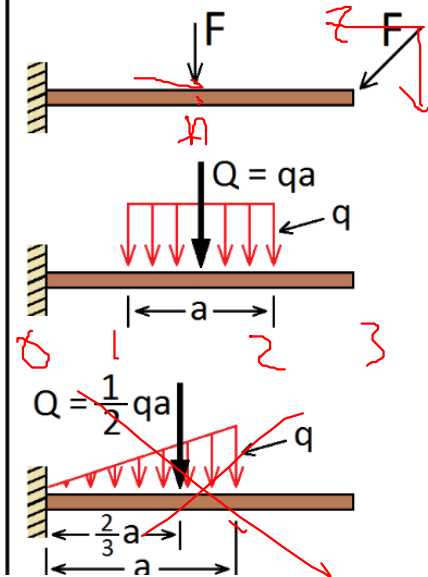
όπου το A είναι οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο της κατασκευής.

- Αυτές οι τρεις εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν για περισσότερο από τρεις αγνώστους.
- Οι άγνωστες δυνάμεις περιλαμβάνουν αντιδράσεις και ο αριθμός των αγνώστων εξαρτάται από το είδος της στήριξης ή της σύνδεσης που προκαλεί αυτή την αντίδραση.
- Οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας δεν μπορούν να αυξηθούν, αλλά μπορούν να αντικατασταθούν με άλλες για λόγους διευκόλυνσης. Για παράδειγμα:

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \quad \boxed{\Sigma M_A = 0} \quad \boxed{\Sigma M_B = 0}$$

Είδη Φορτίων

Τα φορτία που μπορεί να επιβληθούν στα διάφορα σώματα διακρίνονται στα **συγκεντρωμένα** και τα **κατανεμημένα** φορτία.



Συγκεντρωμένο ή σημειακό φορτίο: Το φορτίο εκείνο του οποίου η δράση περιορίζεται σε ένα μόνο σημείο.

Στην πραγματικότητα ασκείται σε πολύ μικρή επιφάνεια και δεχόμαστε την παραδοχή απόλυτα συγκεντρωμένης δύναμης.

Κατανεμημένο φορτίο: Το φορτίο εκείνο του οποίου η δράση εκτείνεται σε ολόκληρο το σώμα ή σε ορισμένο τμήμα του.

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης Q ενός κατανεμημένου φορτίου εκφράζεται από το **εμβαδόν** της επιφάνειας που εκφράζεται από τη γραφική του παράσταση.

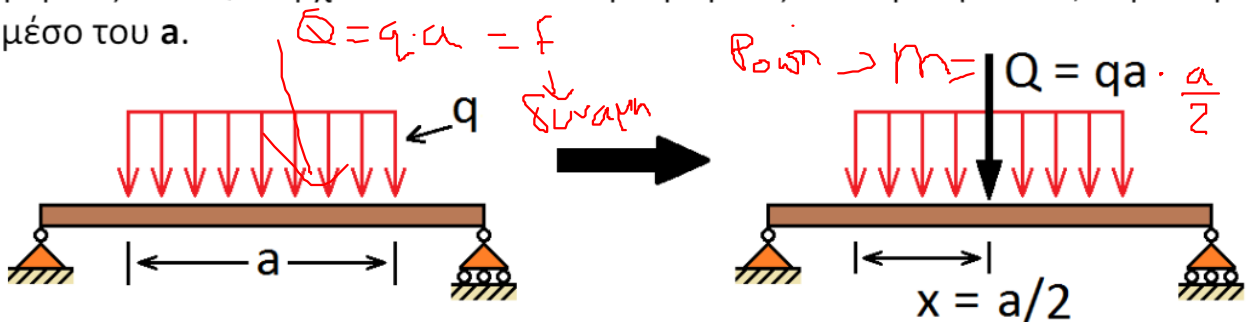
Το σημείο εφαρμογής της Q συμπίπτει με το **κέντρο βάρους** της επιφάνειας.

Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

ι. Ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση (ορθογωνική)

Έχει σταθερή τιμή q , η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη με τη ράβδο, και ορίζεται σαν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ύψους q και μήκους a . Ονομάζεται ομοιόμορφο ή σταθερό κατανεμημένο φορτίο και είναι το πιο συχνό. Η αντικατάσταση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q γίνεται με ένα σημειακό φορτίο (δύναμη) Q του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου $Q = q \cdot a$.

Ο φορέας του Q διέρχεται από το κέντρο βάρους του ορθογωνίου, δηλαδή από το μέσο του a .

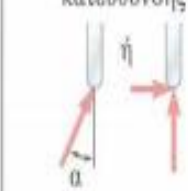




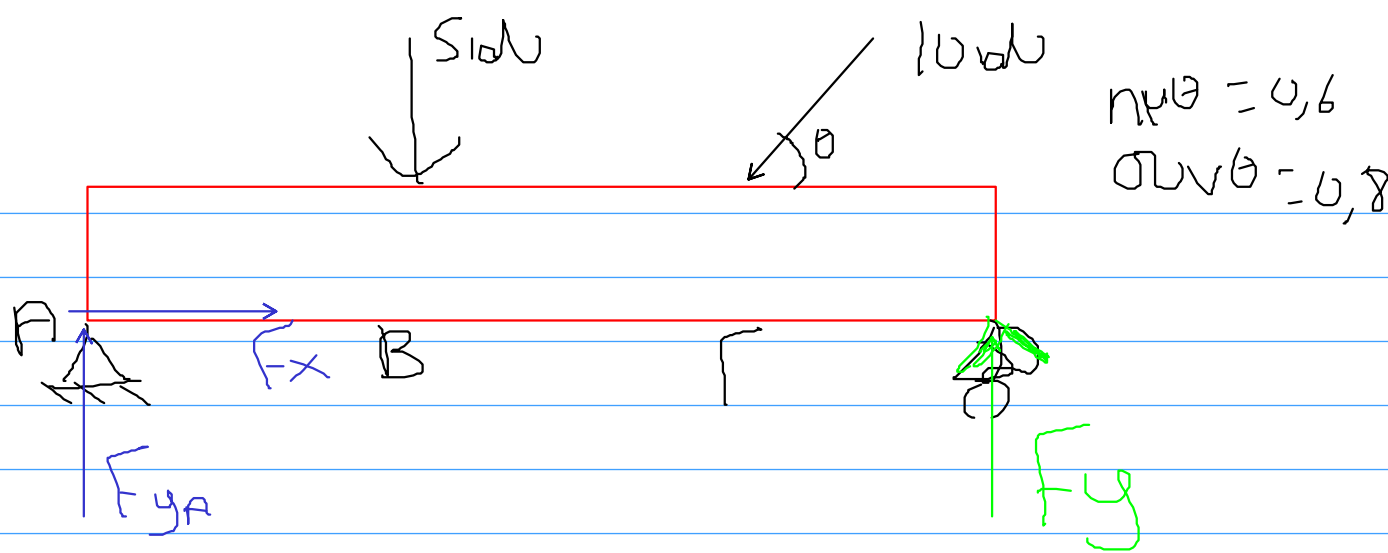
Στήριγμα ή Σύνδεση		Αντιδράσεις	Αριθμός Αγνώστων	
Κυλίσεις	Άνευ τριβής επιφάνεια	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1	Στηρίζεις ισοδύναμες με μια δύναμη με γνωστή γραμμή επενέργειας : κυλίσεις, επιφάνειες χωρίς τριβή. Εμποδίζουν την κίνηση του σώματος σε μια μόνο κατεύθυνση. 1 Άγνωστος: Το μέτρο της δύναμης 
Κοντό καλώδιο	Βραχύς σύνδεσμος	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1	
Κολάρο πάνω σε μια άνευ τριβής ράβδο	Άνευ τριβής πείρος σε εγκοπή	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1	
Άρθρωση	Επιφάνεια με τριβή	Δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης	2	Στηρίζεις ισοδύναμες με μια δύναμη άγνωστη κατά μέτρο και κατεύθυνση : αρθρώσεις, επιφάνειες με τριβή. Εμποδίζουν την κίνηση του σώματος προς όλες τις κατευθύνσεις – επιτρέπουν περιστροφή. 2 Άγνωστοι : Μέτρο και κατεύθυνση
Πάκτωση		Δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης και ροπή	3	

Εικόνα 1: Αντιδράσεις στηρίξεων και συνδέσεων σε δύο διαστάσεις

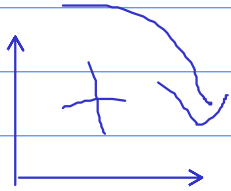


Στήριγμα ή Σύνδεση	Αντιδράσεις	Αριθμός Αγνώστων	
Κυλίσεις 	Ανευ τριβής επιφάνεια 	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1
Κοντό καλώδιο 	Βραχύς σύνδεσμος 	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1
Κολάρο πάνω σε μια άνευ τριβής ράβδο 	Ανευ τριβής πείρος σε εγκοπή 	Δύναμη με γνωστή γραμμή ενέργειας	1
Άρθρωση 	Επιφάνεια με τριβή 	Δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης 	2
Πάκτωση 	Δύναμη άγνωστης κατεύθυνσης και ροπή 		3

Εικόνα 1: Αντιδράσεις στηρίξεων και συνδέσεων σε δύο διαστάσεις

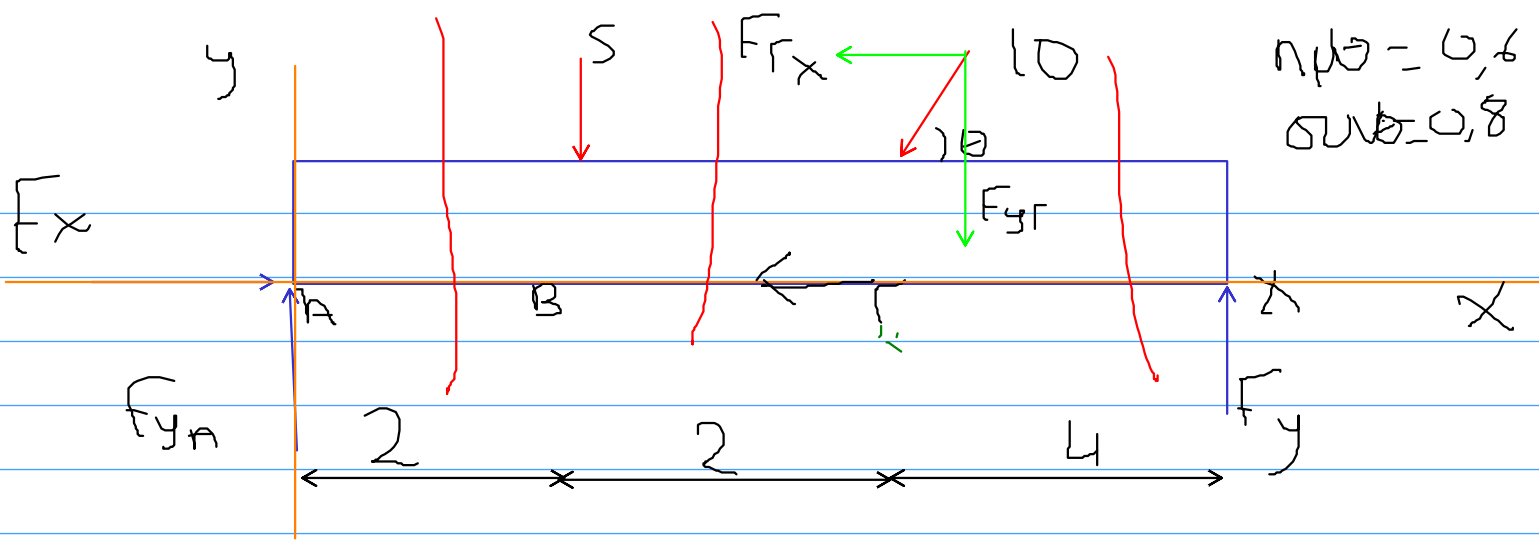


Βήμα 1^ο Βαζω σαν είναι τα
 δέτηα που



Βήμα 2^ο Σχεδιάζω τις αντι-
 δράσεις των στήριξεων

Βήμα 3^ο Υπολογίζω τις αντι-
 δράσεις των στήριξεων



$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_x - F_{rx} \cdot \sin \theta = 0$$

$$F_x - 10 \cdot 0.8 = 0$$

$$F_x = 8 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_y - F_{ry} \cdot \cos \theta + F_{yA} = 0$$

$$F_y - 10 \cdot 0.6 + F_{yA} = 0$$

$$F_y + F_{yA} = 6$$

$$4.25 + F_{yA} = 6$$

$$F_{yA} = 1.75 \text{ kN}$$

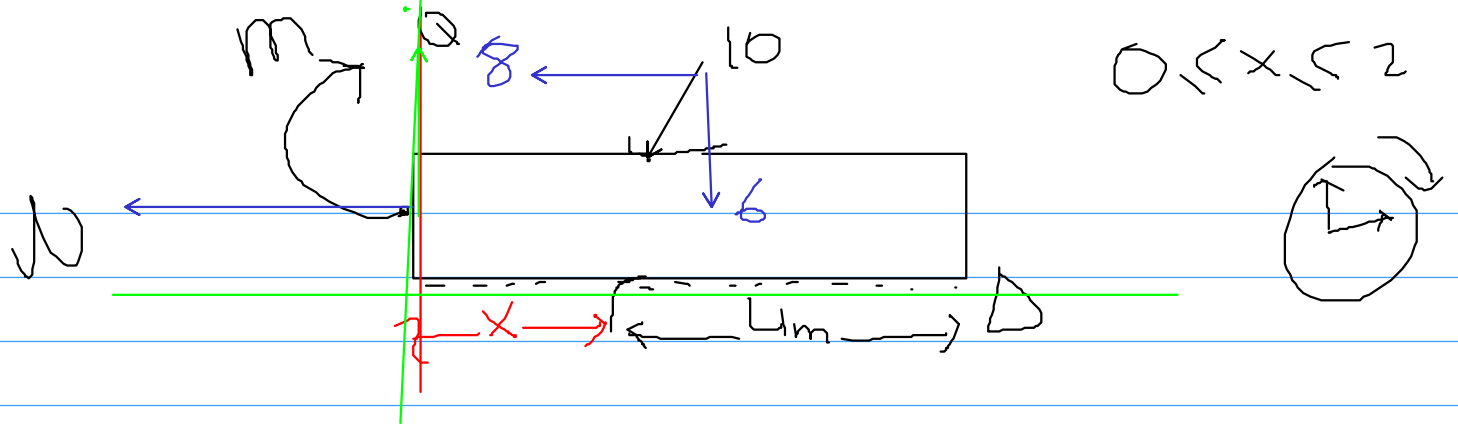
$$\sum M_A = 0$$

$$+ S \cdot 2 + F_{ry} \cdot 4 - F_y \cdot 8 = 0$$

$$10 + 6 \cdot 4 - F_y \cdot 8 = 0$$

$$10 + 24 - F_y \cdot 8 = 0$$

$$F_y = \frac{34}{8} = 4.25 \text{ kN}$$



$$\uparrow \downarrow \Leftrightarrow \sum \mathcal{F}_x = 0$$

$$-N - 8 = 0$$

$$N = -8 \text{ kN}$$

$$\Leftrightarrow \sum \mathcal{F}_y = 0$$

$$Q - 6 = 0$$

$$Q = 6 \text{ kN}$$

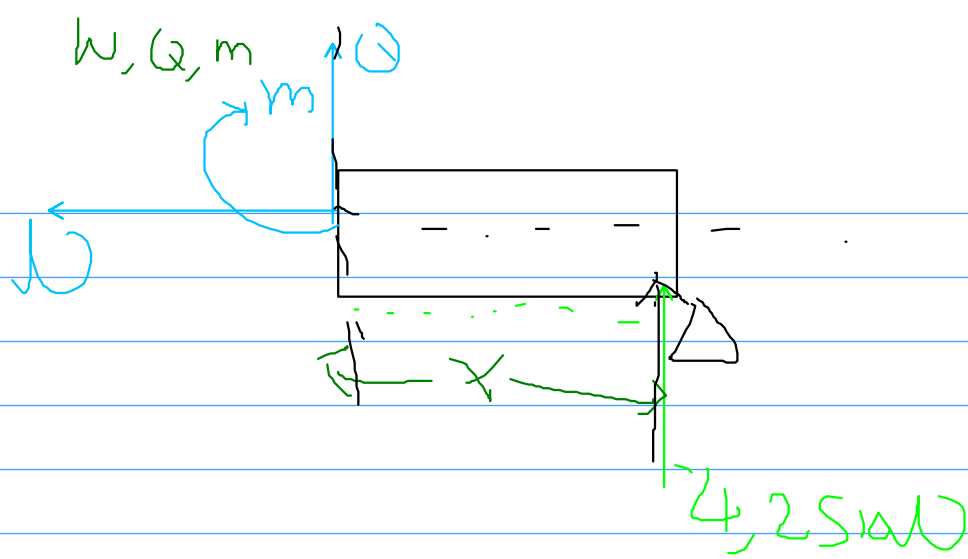
$$\Leftrightarrow \sum \mathcal{M} = 0$$

$$+6 \cdot x + m = 0$$

$$m = -6x$$

$$m(0) = 0 \text{ kNm}$$

$$m(2) = -12 \text{ kNm}$$



$$0,5x, 54$$

$$\sum \mathcal{M}_x = 0$$

$$-W = 0$$

$$W = 0$$

$$\sum \mathcal{M}_y = 0$$

$$Q + 4,25 = 0$$

$$Q = -4,25$$

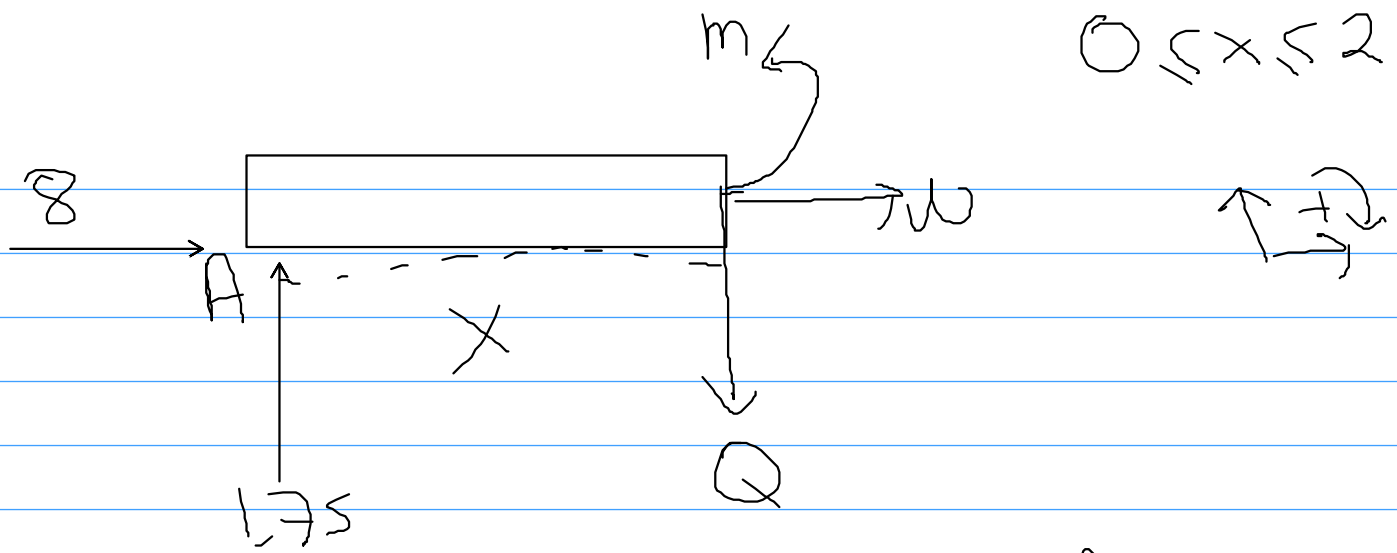
$$(+\uparrow) \sum \mathcal{M} = 0$$

$$m - 4,25 \cdot x = 0$$

$$m = 4,25x$$

$$m_{(0)} = 0 \text{ kNm}$$

$$m_{(4)} = 17 \text{ kNm}$$



$$\sum F_x = 0$$

$$+8 + W = 0$$

$$W = -8 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$+1.75 - Q = 0$$

$$Q = 1.75 \text{ kN}$$

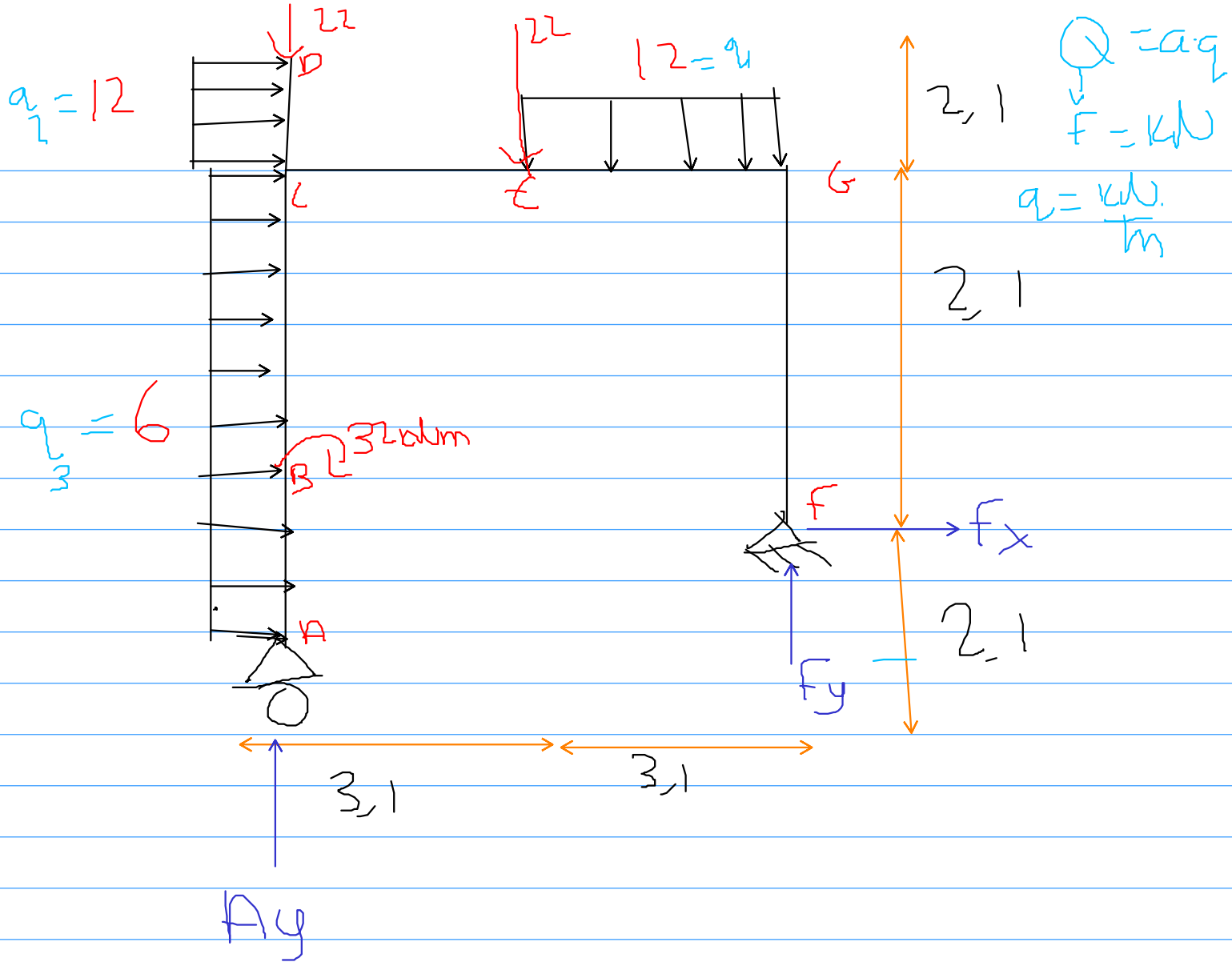
$$(\curvearrowright) \sum M = 0$$

$$-m + 1.75 \cdot x = 0$$

$$m = 1.75x$$

$$m(0) = 0$$

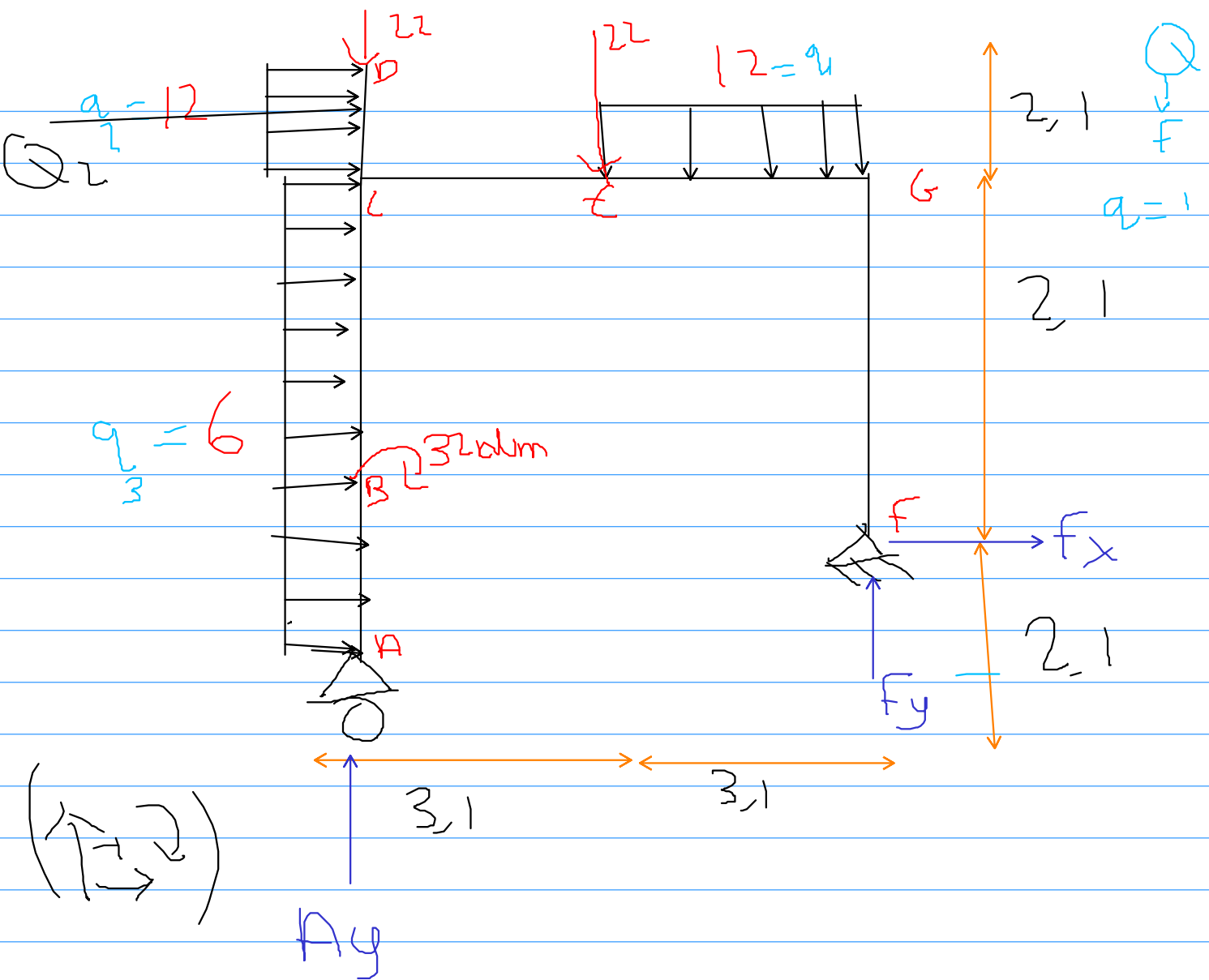
$$m(2) = 3.5$$



$$Q_1 = 12 \cdot 3,1 = 37,2 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 12 \cdot 2,1 = 25,2 \text{ kN}$$

$$Q_3 = 6 \cdot 4,2 = 25,2 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0$$

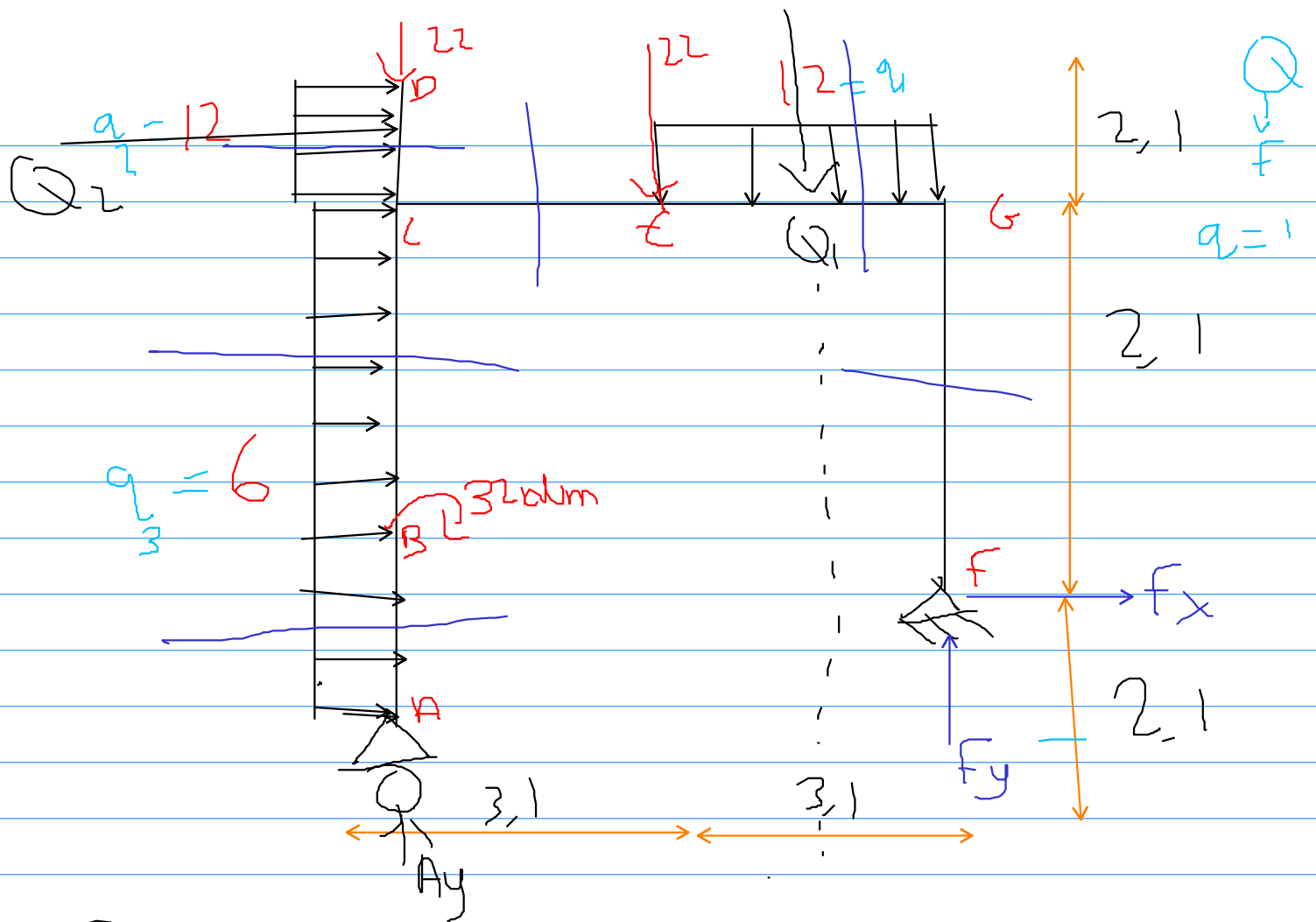
$$F_x + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$F_x = -50,4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_y - 3 \cdot 2 - 22 - 22 + A_y = 0$$

$$F_y + A_y = +81,2 \Rightarrow F_y = 14,19 \text{ kN}$$



$$\sum M_F = 0$$

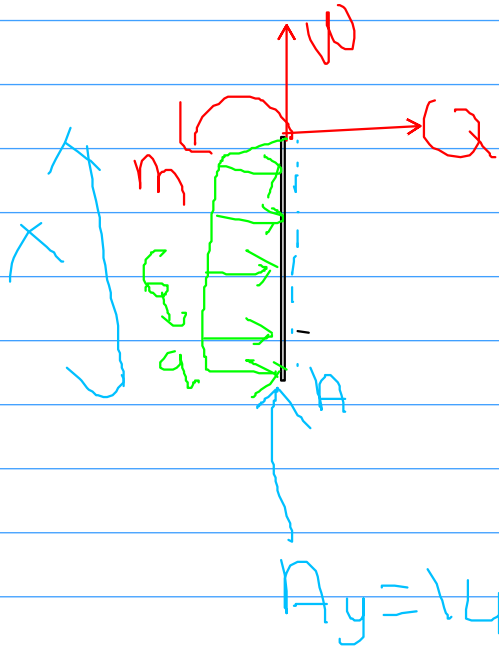
$$- 12 \cdot 1,55 - 22 \cdot 3,1 - 22 \cdot 6,2 + 25,2 \cdot 3,15 + 25,2 \cdot 1,05 - 25,2 \cdot 1,05 + A_y \cdot 6,2 + 32 = 0$$

$$A_y = 67,61 \text{ kN}$$

Torques



A-B ($0 \leq x \leq 2,1$)



$$\sum \mathcal{F}_x = 0$$

$$Q + 6 \cdot x = 0 \Rightarrow Q = -6x$$

$$Q(0) = 0$$

$$Q(2,1) = -12,6$$

$$\sum \mathcal{F}_y = 0$$

$$A_y + W = 0$$

$$W = -14,19 \text{ kN}$$

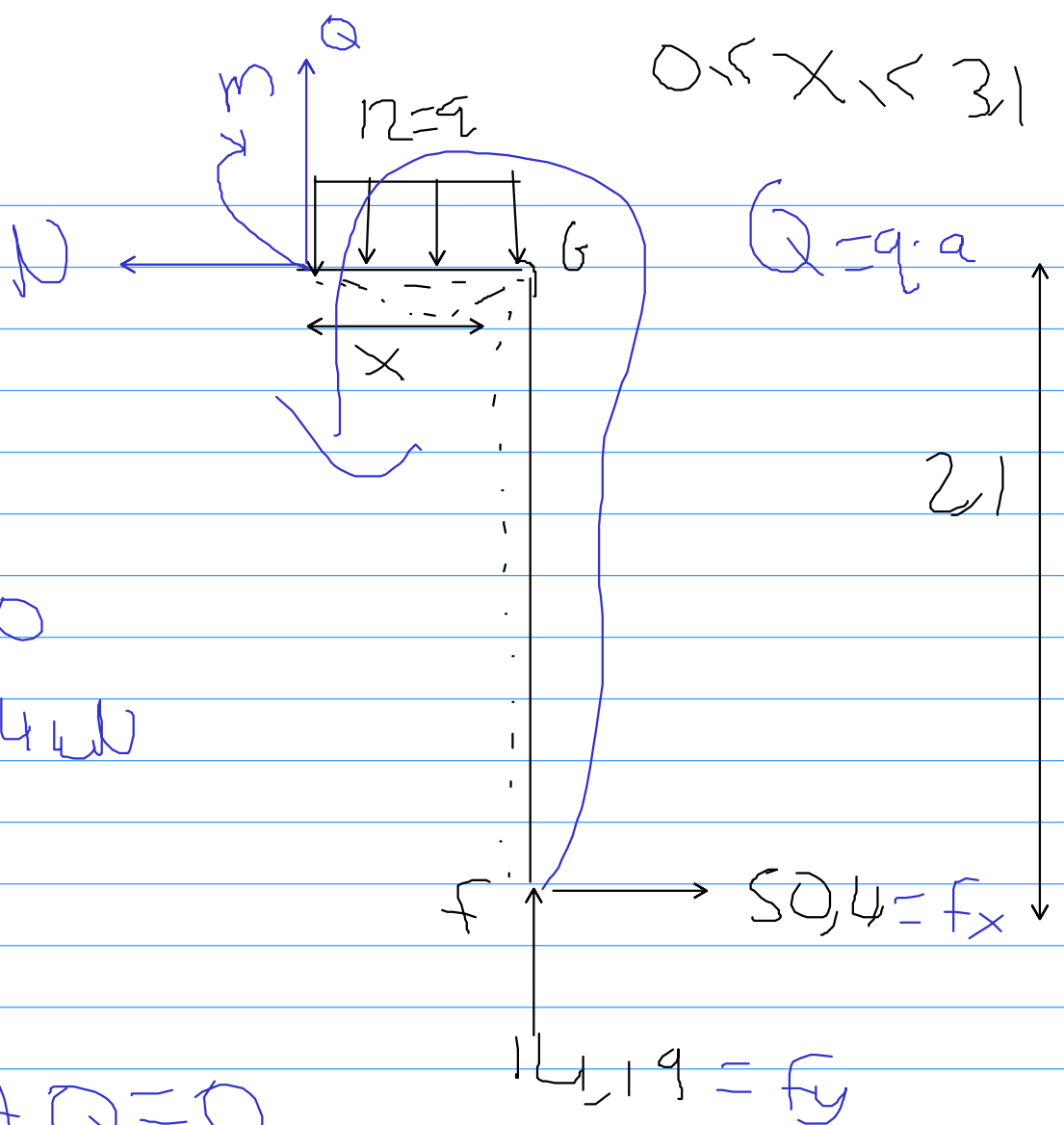
$$\sum m_3 = 0$$

$$-m - 6x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$m = -3x^2$$

$$m(0) = 0 \text{ kNm}$$

$$m(2,1) = -13,23 \text{ kNm}$$



$$\sum f_x = 0$$

$$-N + f_x = 0$$

$$N = 50.4 \text{ kN}$$

$$\sum f_y = 0$$

$$-q \cdot x + f_y + Q = 0$$

$$-12x + 14.19 = 0$$

$$Q = 12x - 14.19$$

$$Q(0) = -14.19 \text{ kN}$$

$$Q(2.1) = 23.01 \text{ kN}$$

$$\sum m = 0$$

$$m + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 14.19 \cdot x$$

$$- 50.4 \cdot 2.1 = 0$$

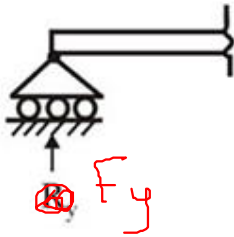
$$m = -6x^2 + 14.19x + 105.84$$

$$m(0) = -105.84 \text{ kNm}$$

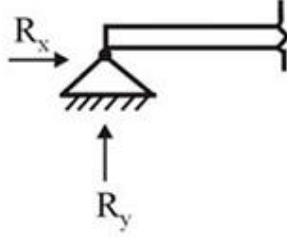
$$m(2.1) = -119.56 \text{ kNm}$$

Πως συμβολίζονται στο χαρτί η κάθε στήριξη και οι άγνωστες δυνάμεις τους.

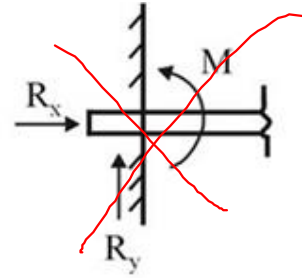
δ ή



(a) Roller Support



(b) Pinned Support



(c) Fixed Support

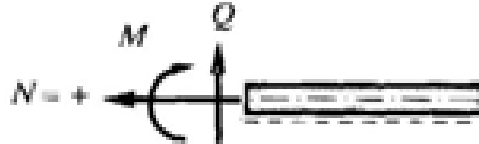
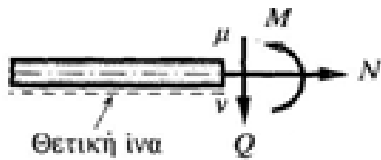
Τομές

Ποτέ κάνω τομές;

Για να κάνω τομή πρέπει να ισχύει μια από τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- A. Όταν αλλάζει το υλικό στη κατασκευή μας
- B. Όταν αλλάζει η γεωμετρία
- C. Όταν έχω αλλαγή δυνάμεις

Πώς είναι η φορά των δυνάμεων και των ροπών στις τομές;



Όπου:

Q= Τέμνουσα δύναμη (Είναι εκείνες που δρουν κάθετα στον άξονα των δοκών, προκαλώντας διάτμηση).

M= Καμπτική Ροπή (Είναι οι ροπές, που η διεύθυνσή τους είναι κάθετη στο επίπεδο του φορέα, προκαλώντας έτσι κάμψη στη δοκό επί της οποίας ενεργούν).

N= Αξονική ή Κάθετη ή Ορθή δύναμη (είναι οι δυνάμεις, που ενεργούν πάνω στον άξονα κάθε δοκού και προκαλούν εφελκυσμό ή θλίψη).

