

Ισορροπία ενός υλίκου σφαιρίου στο επίπεδο ή και στο χώρο

Υλικό σφαίριο: Σφαιρικό υλικό με μηδενικούς διαστάσεις που κατέχει συγκεκριμένη θέση στο χώρο.

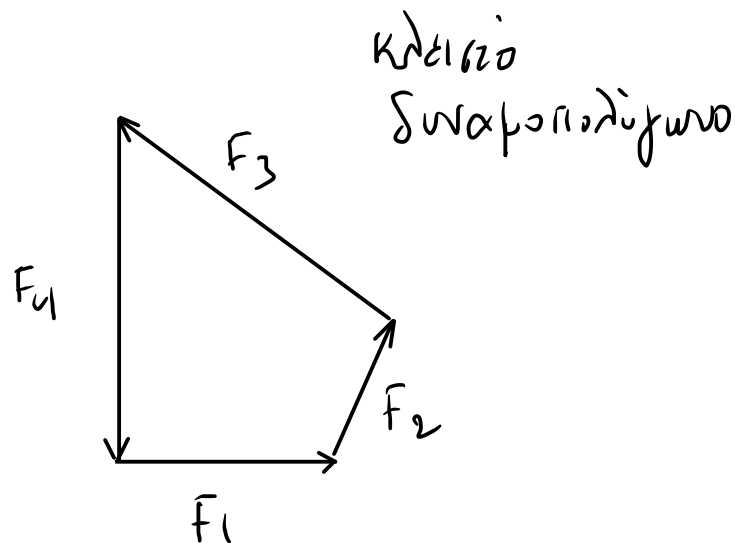
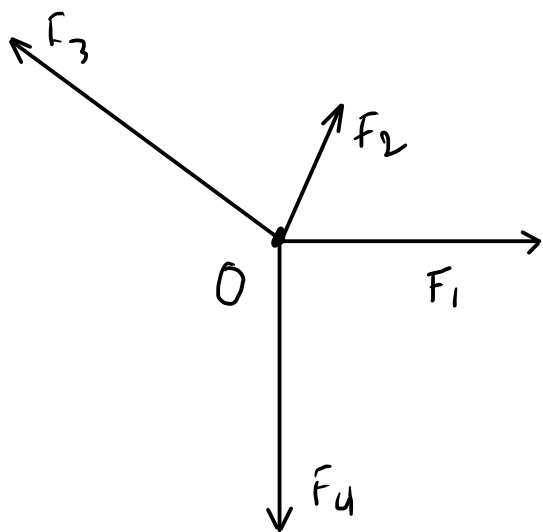
2ος Νόμος Νεύτωνα:

Η κεντροβαρική κατεύθυνση ενός υλ. σφαιρίου δεν αλλάζει αν δει εστ. γινώκει πάνω του μια δύναμη με μηδενική.

Ισορροπία $\Leftrightarrow$ μηδενική συνισταμένη δυνάμεων.

$$\left(\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{το υλ. σφαίριο} \\ \text{ισορροπεί} \end{array}$$

Δυναμική
εξίσωση ισορροπίας

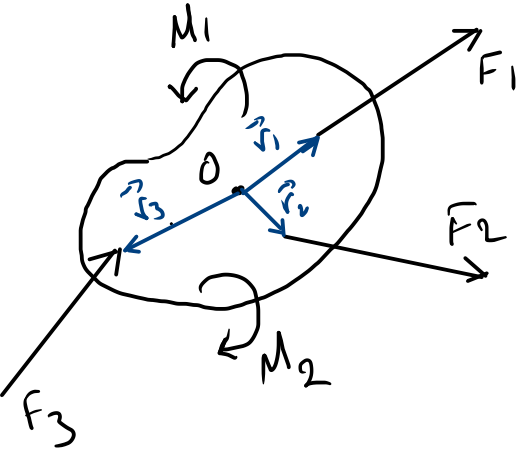


Αλγεβρικές εξισώσεις ισορροπίας ολ. κηρείου στο χώρο

$$\left(\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{2ο σφ. κηρείο} \\ \text{ισορροπεί} \end{array} \right)$$

3 εξισώσεις $\rightarrow$ 3 αγνώστους (π.χ. οι συνιστώσες μιας δύναμης έτσι ώστε το ολ. κηρείο να ισορροπεί)

Ισορροπία επιπέδων κ. στερεών σωμάτων:



Απαραρρόφωτο σώμα: ως άθροισμα απείρων
ολ. σημείων.

Διασυνδεδεμένες εξισώσεις ισορροπίας:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^K \vec{M}_j = \vec{0}$$

κ: αριθμ. συγκεντρωμένων δυνάμεων

Κ: αριθμός συγκεντρωμένων ροπών

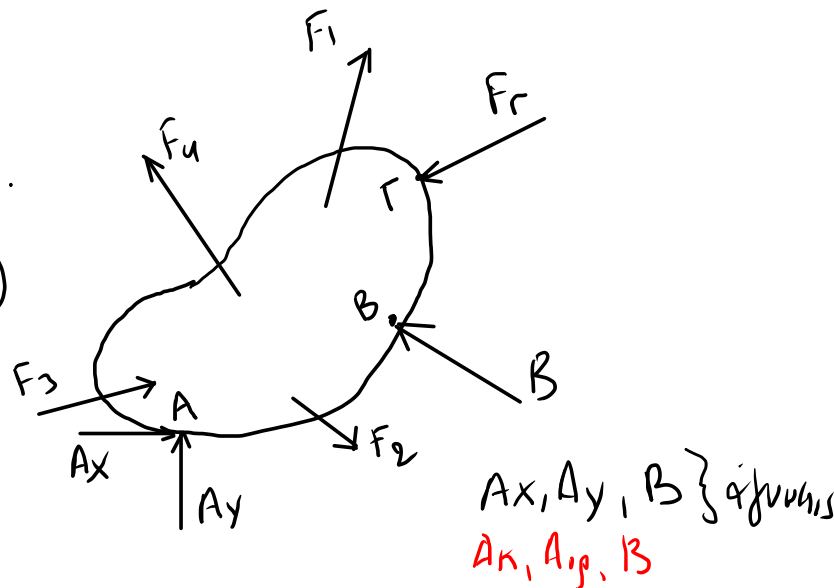
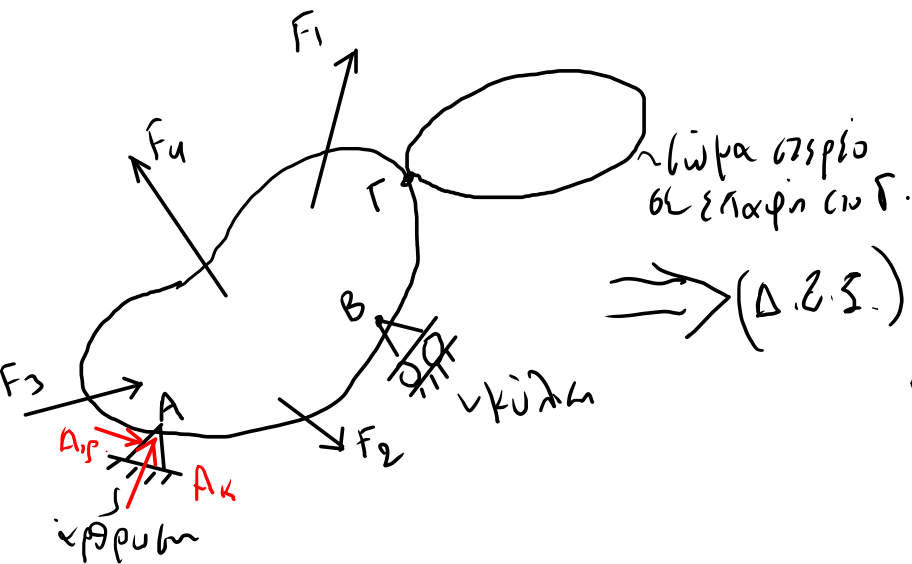
Στερεοστάτικες εξ. ισορροπίας:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum F_{iz} = 0 \\ \sum M_{ix} = 0, \sum M_{iy} = 0, \sum M_{iz} = 0 \end{array} \right\} 6 \text{ εξισώσεις ισορροπίας} \rightarrow 6 \text{ άγνωστοι μπορούν να προσδιοριστούν}$$

Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος (Δ.Ε.Σ.)

Απομονώνουμε το όζερο σώμα από τις επιρροές του με το "έδαφος" και τις συνδέσεις του με άλλα σώματα και απεικονίζουμε όλες τις δυνάμεις και τις ροπές που δρουν πάνω σε αυτό - γνωστές και άγνωστες

$$(Δ.Ε.Σ.) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{επιβεβαιωμένες εξωτερικές φορτίσεις} \\ + \text{ίδιο βάρος} \\ + \text{δυνάμεις επαφής/ακτιδρώσεις} \end{array} \right)$$



Ισορροπία διδύαζαζα φορτία

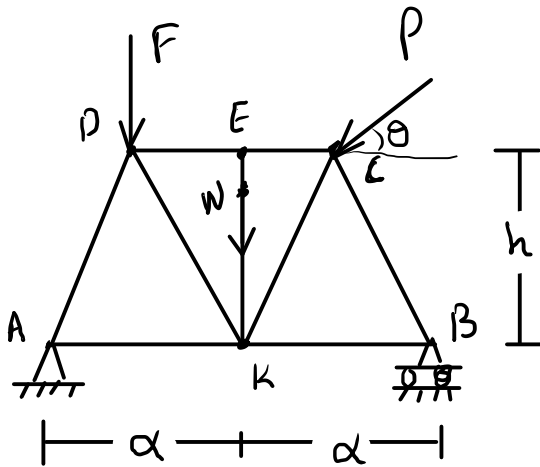
3 εζ. ισορ.

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_A = 0$$

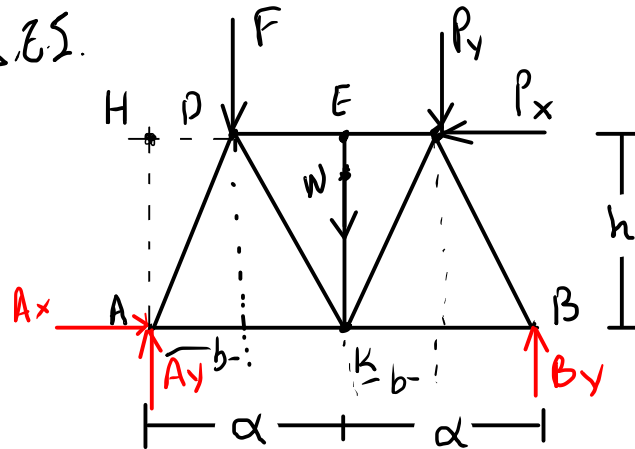
A: ζυχαίο ενρείο
Πάωω ζζζ ζζζζ
ή κελ εκζζζ.

Επίπεδο δικτύωμα:

Ενα σύνολο ράβδων που ενώνονται με εσωτερικές αρθρώσεις:



Δ.Ε.Σ.



$$P_x = P \cos \theta$$

$$P_y = P \sin \theta$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - P_x = 0 \Rightarrow A_x = P_x \quad (1)$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F - P_y - W = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 2\alpha - P_y \cdot (\alpha + b) - W \cdot \alpha - F \cdot b + P_x \cdot h = 0 \quad (3)$$

A_x, A_y, B_y

2ος τρόπος :

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0$$

3ος τρόπος :

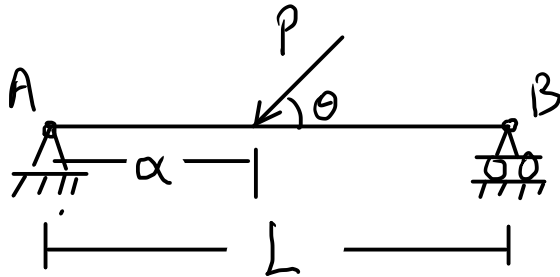
$$\Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0, \Sigma M_C = 0$$

Προσοχή θα πρέπει η ευθεία AB να μην είναι παράλληλη στον άξονα Y. Τότε έχω 3 ανεξάρτητες εξισώσεις.

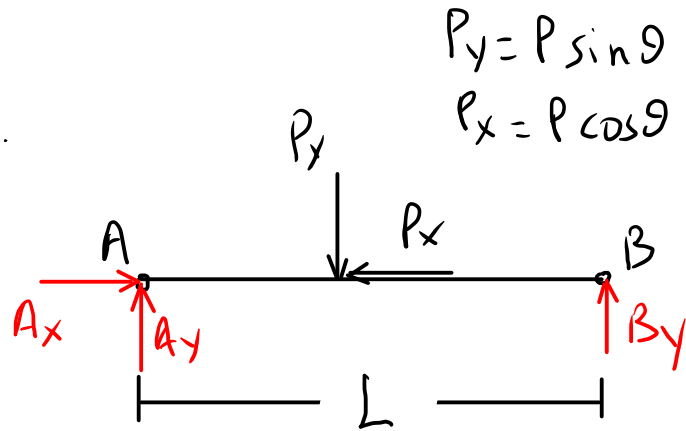
Προσοχή: τα σημεία A, B, C να μην είναι συνευθειακά

Δοκοί:

αφίερεται δοκός



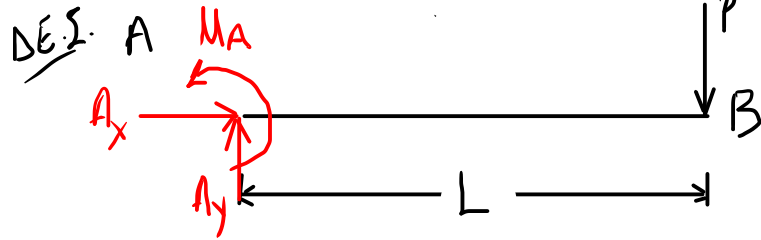
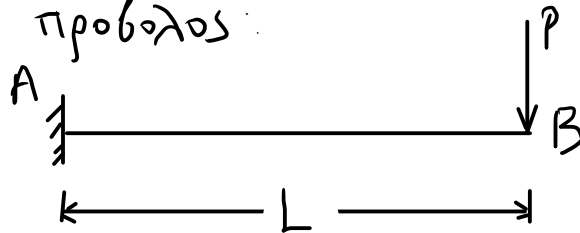
Δ.Ε.Σ.



$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0, \uparrow \sum F_y = 0, \curvearrowright \sum M_A = 0$$

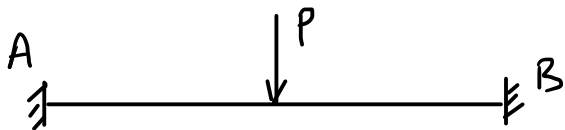
16062 αλυσική δοκός: 3 εξισ. ισορ. $\rightarrow$ 3 αγνώστους

πρόβολος:

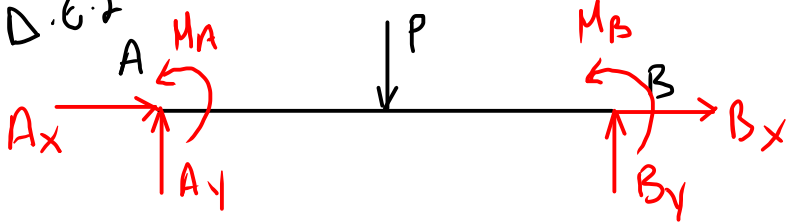


$$\begin{aligned} (+)\rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x = 0 \\ (+)\uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y - P = 0 \\ \curvearrowright \sum M_A = 0 &\Rightarrow -P \cdot L + M_A = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} A_x = 0 \\ A_y = P \\ M_A = P \cdot L \end{array} \right\}$$

αφίπακτη δοκός - Υπερστατική δοκός

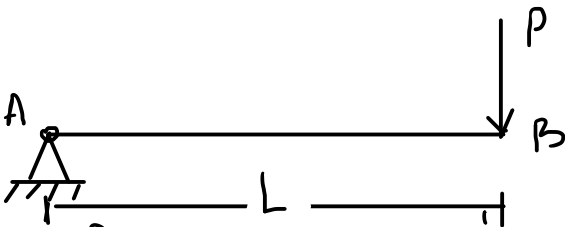


Δ.Ε.Σ.

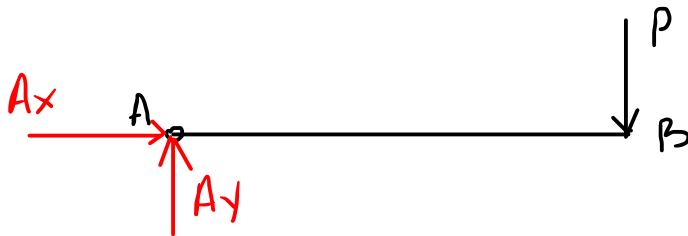


3 εξ. ισορ. $\rightarrow$ 6 άγνωστες αντιδράσεις
 Στατικά αόριστο πρόβλημα
 βαθμός στατικής αοριστίας $6 - 3 = 3$

Υποστατική δοκός



ελεύθερη περιστροφή
 γύρω από το μήκιο A
 Εάν $P \neq 0$



$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad (1)$$

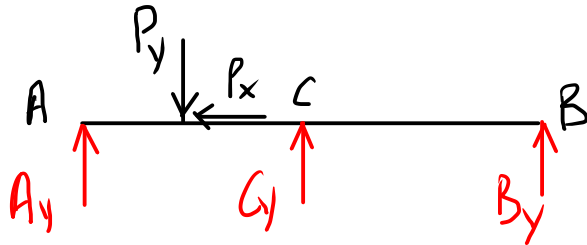
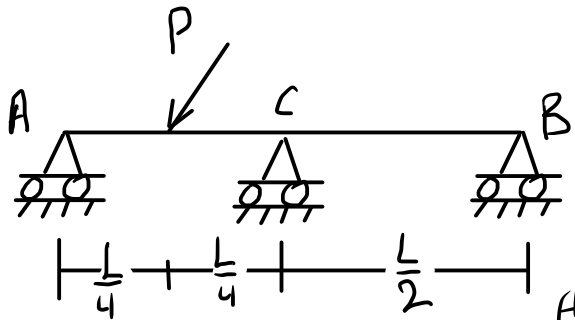
$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P = 0 \quad (2)$$

$$(+)\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \cdot L = 0 \quad (3) \Rightarrow P = 0$$

για $P \neq 0$ δεν ισχύει η (3)

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Το γεγονός ότι οι αντιδράσεις ενός επίπεδου φορέα ερπλέκουν ακριβώς 3 και μόνο αχλῶζους δεν αποζητεί ικανή συνθήκη επάρκειας ισορροπίας

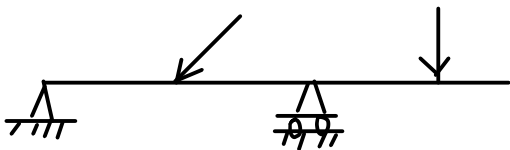


$$A) \sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0 \quad (1)$$

$$B) \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y + B_y - P_y = 0 \quad (2)$$

$$C) \sum M_A = 0 \Rightarrow -P_y \frac{L}{4} + C_y \frac{L}{2} + B_y L = 0 \quad (3)$$

2 εξισώσεις και 3 άγνωστες αντιδράσεις

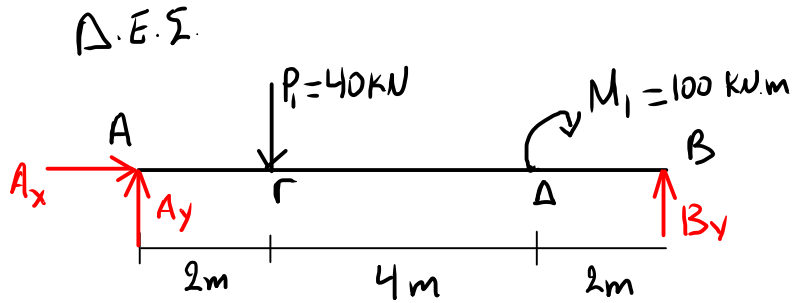
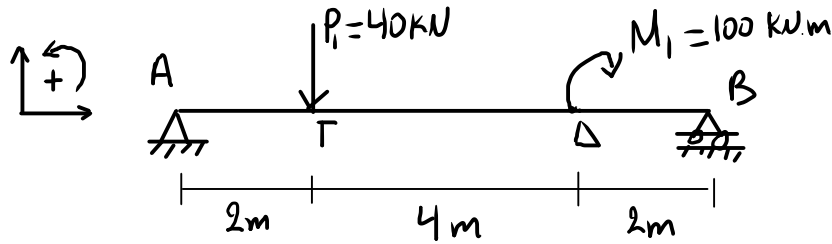


μονοπρόσχωα δοκός

αμφιπρόσχωα δοκός

ισοστατικοί δοκοί

Παράδειγμα 20



$$\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x = 0 & (1) \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y - P_1 + B_y = 0 & (2) \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -P_1 \cdot 2 + B_y \cdot 8 - M_1 = 0 & (3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} A_x = 0 \\ A_y + B_y = 40 \\ B_y \cdot 8 = 2P_1 + M_1 \end{array} \right\} \quad B_y = \frac{2P_1 + M_1}{8}$$

$$(3) \Rightarrow B_y = \frac{2 \cdot 40 + 100}{8} = \frac{180}{8} = 22,5 \text{ kN} \Rightarrow \underline{B_y = 22,5 \text{ kN}}$$

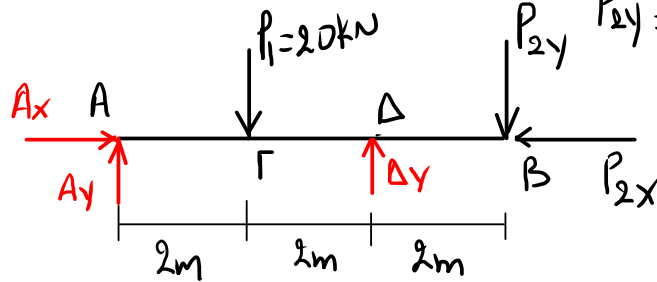
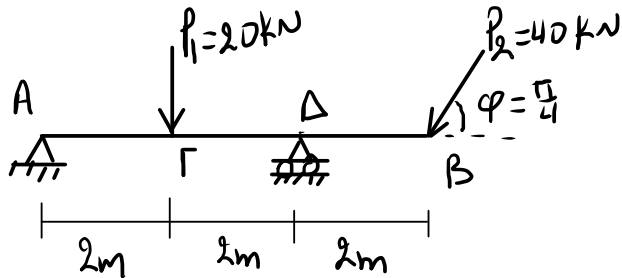
$$(2) \xrightarrow{(3)} A_y = 40 - B_y = 40 - 22,5 \Rightarrow \underline{A_y = 17,5 \text{ kN}}$$

Παράδειγμα 2.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P_{2x} = P_2 \cos \varphi = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ kN}$$

$$P_{2y} = P_2 \sin \varphi = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ kN}$$



$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - P_{2x} = 0 \Rightarrow A_x = P_{2x} \Rightarrow \underline{A_x = 20\sqrt{2} \text{ kN}} \quad (1)$$

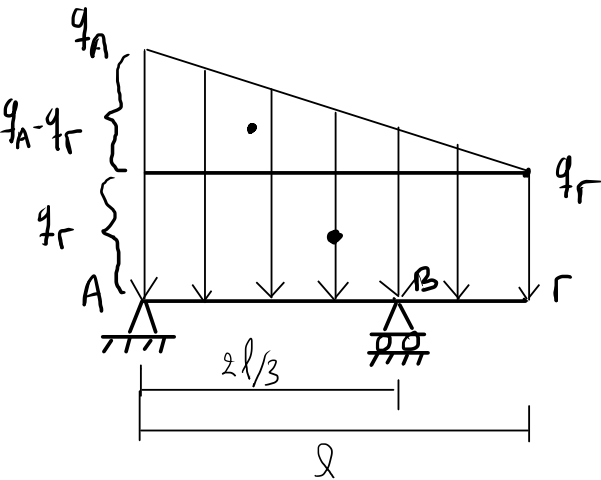
$$\begin{aligned} (+)\uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow \underline{A_y} - P_1 + \underline{\Delta y} - P_{2y} = 0 \Rightarrow A_y + \Delta y = P_1 + P_{2y} = 20 + 20\sqrt{2} \\ &\Rightarrow \underline{A_y + \Delta y = 20(1 + \sqrt{2})} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow -2P_1 + 4\underline{\Delta y} - 6P_{2y} = 0 \Rightarrow \underline{\Delta y = \frac{2P_1 + 6P_{2y}}{4}}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta y = \frac{2 \cdot 20 + 6 \cdot 20\sqrt{2}}{4} = 2 \cdot 5 + 6 \cdot 5\sqrt{2} = 10 + 30\sqrt{2} = 10(1 + 3\sqrt{2}) \text{ kN}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (2) \xrightarrow{(3)} A_y &= 20(1 + \sqrt{2}) - \Delta y = 20(1 + \sqrt{2}) - 10(1 + 3\sqrt{2}) = 10 - 10\sqrt{2} \\ &= 10(1 - \sqrt{2}) \text{ kN} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

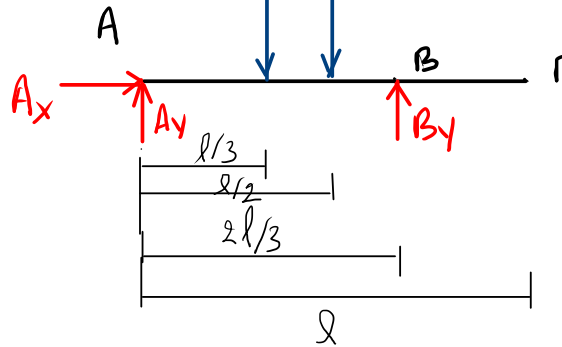


$$h = q_A - q_r$$

Δ.Ε.Σ.

$$Q_1 = \frac{1}{2} h l$$

$$Q_2 = l \cdot q_r$$



$$(\rightarrow) \sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{A_x} = 0 \quad (1)$$

$$(\uparrow) \sum F_y = 0 \Rightarrow \underline{A_y} - Q_1 - Q_2 + B_y = 0 \quad (2)$$

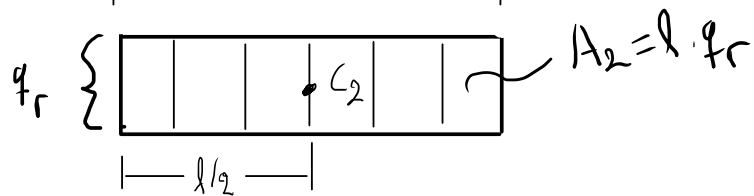
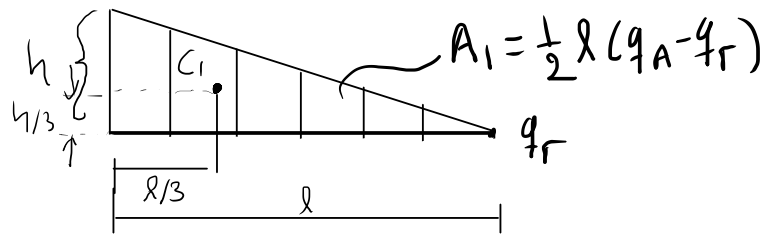
$$\curvearrowright \sum M_A = 0$$

$$-Q_1 \cdot \frac{l}{3} - Q_2 \cdot \frac{l}{2} + \underline{B_y} \cdot \frac{2l}{3} = 0 \quad (3)$$

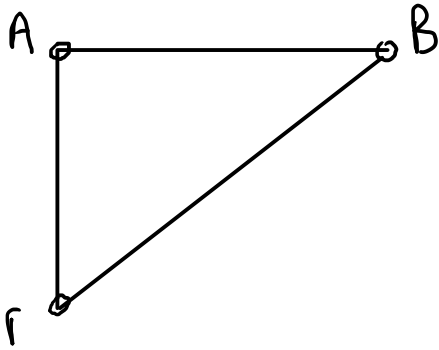
$$q_A = 40 \text{ kN/m}$$

$$q_r = 10 \text{ kN/m}$$

$$l = 1 \text{ m}$$



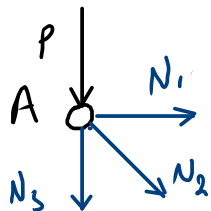
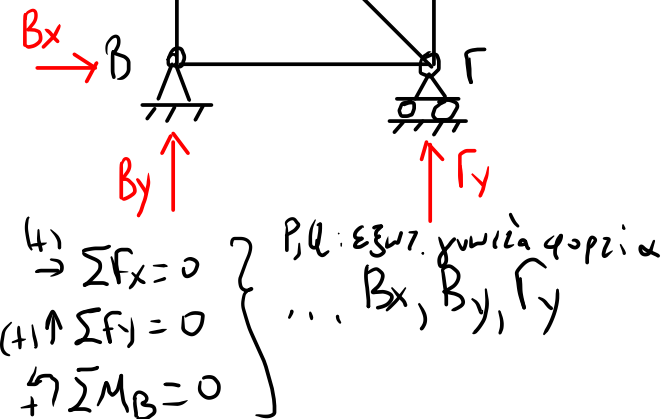
ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ:



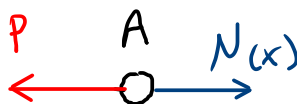
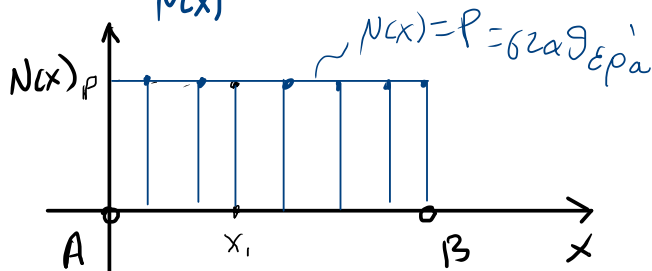
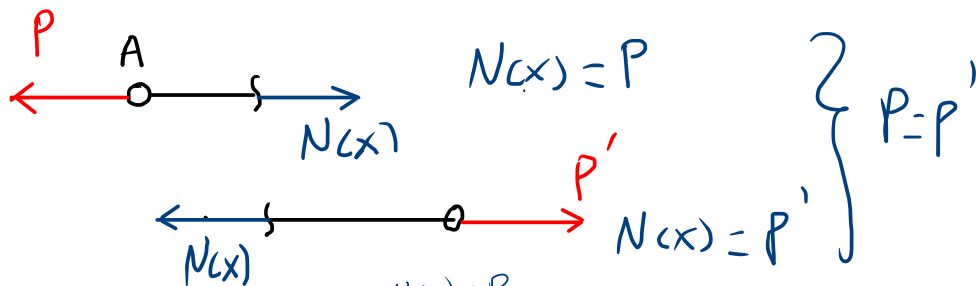
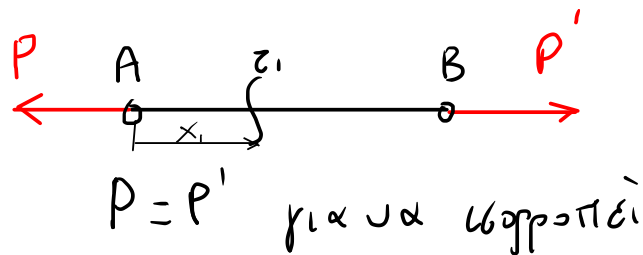
αρθρωτό τρίγωνο (2ο απλοϊκότερο δικτύωμα)
ή τριγωνικός δίσκος
ή βασικό δίκτυωμα.

Παραδοχές:

- 1) Οι ράβδοι είναι αβερείς με ευθύγραμμους άξονες
- 2) Τα εξωτερικά φορτία αποκοινώνται στον κόμβο
- 3) Οι ράβδοι είναι πάντα ευδιάφερα (εγκάρσιως) αψόρρευτες
- 4) Το δίκτυωμα στηρίζεται στο έδαφος μόνο με αρθρώσεις και κυλινδούς
- 5) Λέχεται μόνο συγκεντρωμένα φορτία
- 6) Αρθρώσεις με μηδενικές ρομές



$$\left. \begin{array}{l} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \text{Komplex A} \\ \text{ws stat. Inf. 10}$$

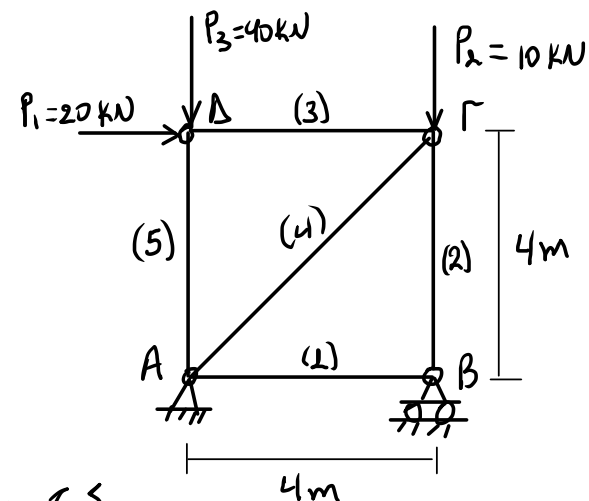


Μέθοδος των κόμβων:

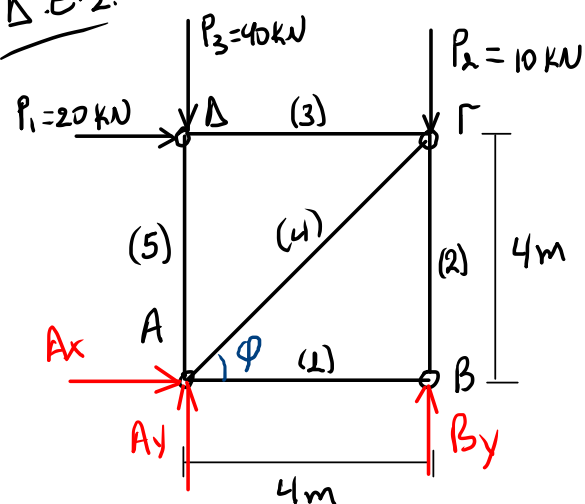
Διευκρίνιση σε λοβόροπια. Να υπολογι-
στούν: α) οι αντιδράσεις στις βελόνες

β) οι εσωτερικές δυνάμεις

* Οι κόμβοι πρέπει να συνδέουν τουλάχιστον 2 μέλη.



Δ.Ε.Σ.



α) Σχεματογραφικός εξ. λοβόροπιας στο Δ.Ε.Σ.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_1 = 0 \Rightarrow A_x = -P_1 \Rightarrow \underline{A_x = -20 \text{ kN}} \quad (1)$$

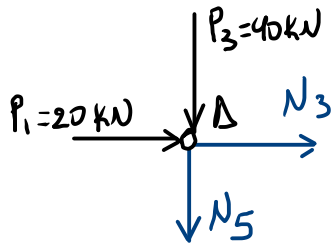
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y - P_2 - P_3 = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P_2 + P_3 \\ &\Rightarrow A_y + B_y = 10 + 40 \Rightarrow \underline{A_y + B_y = 50} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4B_y - 4P_2 - 4P_1 = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow B_y = P_1 + P_2 = 20 + 10 \Rightarrow \underline{B_y = 30 \text{ kN}}$$

$$2 \xrightarrow{(3)} A_y + 30 = 50 \Rightarrow \underline{A_y = 20 \text{ kN}}$$

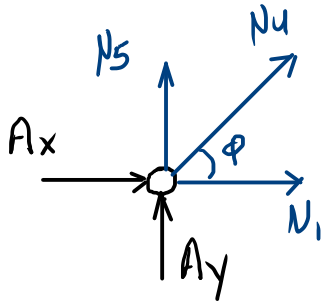
Körper Δ:



$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = -P_1 \Rightarrow \underline{N_3 = -20 \text{ kN}}$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -P_3 - N_5 = 0 \Rightarrow N_5 = -P_3 \Rightarrow \underline{N_5 = -40 \text{ kN}}$$

Körper A:



$$\tan \varphi = \frac{BF}{AB} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \varphi = \arctan(1) = 45^\circ$$

$$\varphi = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow A_x + N_1 + N_4 \cos \varphi = 0$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + N_5 + N_4 \sin \varphi = 0$$



$$r=1$$

$$2\pi$$

$$\cos(2\pi) = 1$$

$$2\pi = \alpha \cos(1)$$

$$\sin(45) = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

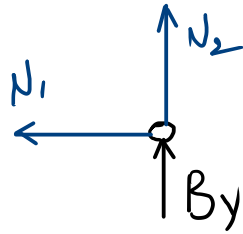
$$(1): N_1 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -A_x \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \end{array} \right.$$

$$(2): N_5 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -A_y \quad \left\{ \begin{array}{l} -40 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -20 \end{array} \right.$$

$$(1) - (2) \Rightarrow N_1 + 40 = 40 \Rightarrow \underline{N_1 = 0} \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(3)} 0 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \Rightarrow N_4 = \frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{40 \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{40 \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N_4 = 20 \sqrt{2} \text{ kN}}$$

Κόμβος Β:



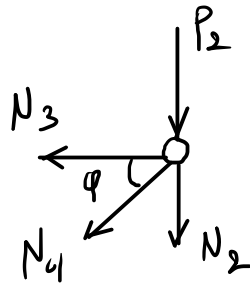
$$B_y = 30 \text{ kN}$$

$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -N_1 = 0 \Rightarrow \underline{N_1 = 0}$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = -B_y \Rightarrow \underline{N_2 = -30 \text{ kN}}$$

Κόμβος Γ:



Για επιβεβαίωση θα πρέπει

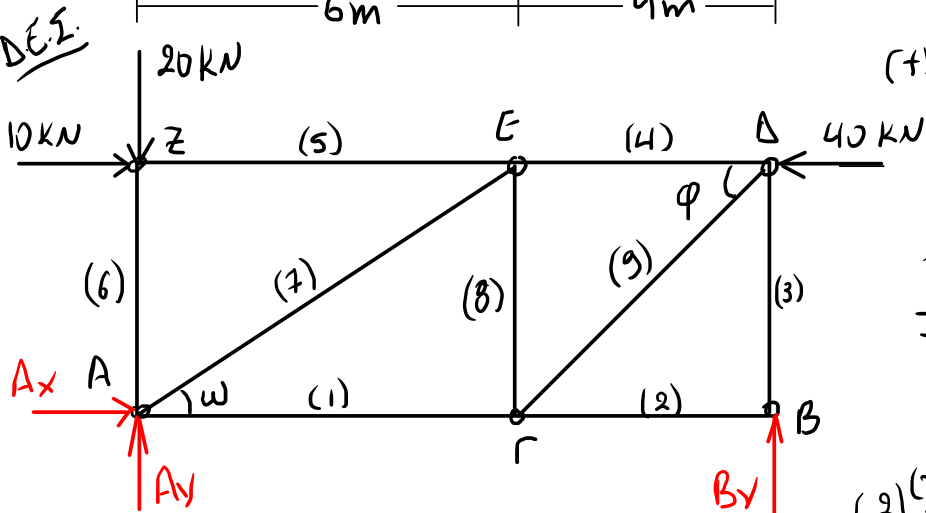
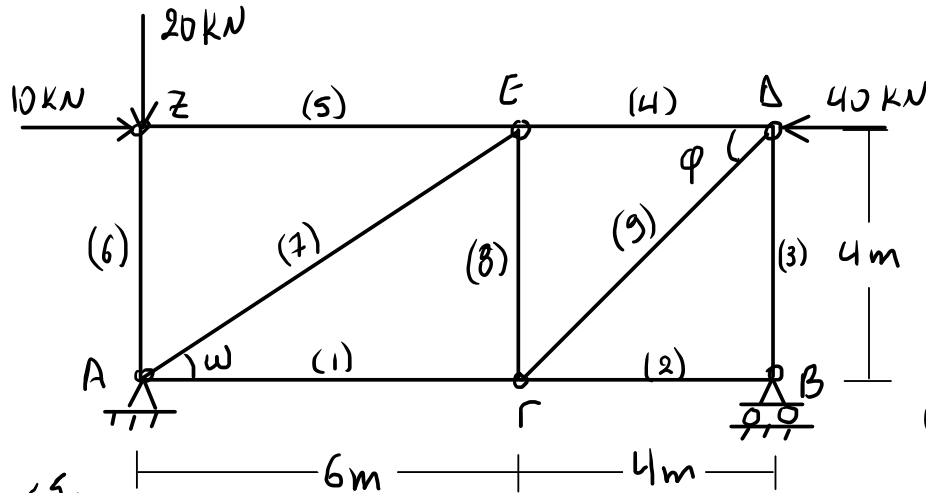
$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad -N_3 - N_4 \cos \varphi = 0$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad -P_2 - N_2 - N_4 \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \quad \text{OK!}$$

Διευκόλυνση - Μέθοδος των κόμβων - (Συνέχεια)

Να βρεθούν: α) οι δυνάμεις αντίδρασης
β) οι εσωτερικές δυνάμεις των μέσων.



$$(+\rightarrow) \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 40 + 10 = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 30 \text{ kN}} \quad (1)$$

$$(+\uparrow) \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 20 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underline{A_y + B_y = 20} \quad (2)$$

$$(+\circlearrowleft) \sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \cdot B_y + 4 \cdot 40 - 4 \cdot 10 = 0$$

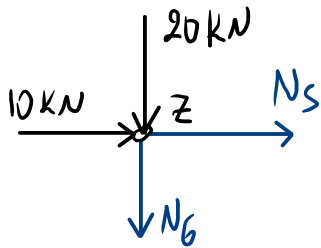
$$\Rightarrow B_y = \frac{4 \cdot 10 - 4 \cdot 40}{10} = 4 - 4 \cdot 4 = 4 - 16$$

$$\Rightarrow \underline{B_y = -12 \text{ kN}} \quad (3)$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} A_y = 20 - B_y = 20 + 12 \Rightarrow \underline{A_y = 32 \text{ kN}}$$

* Πρόβλημα: για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των κόμβων θα πρέπει να δώσω έναν τουλάχιστον κόμβο όπου θα καταρτίθουν 2 ράβδους με άγνωστες τις εσωτερικές τους δυνάμεις.

Κόμβος Z:



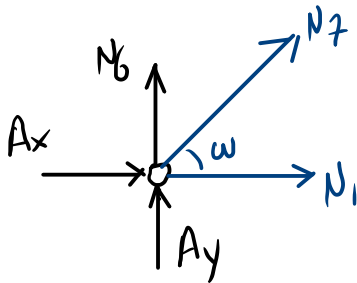
$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N_5 = 0 \Rightarrow \underline{N_5 = -10 \text{ kN}}$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -20 - N_6 = 0 \Rightarrow \underline{N_6 = -20 \text{ kN}}$$

$$\tan \omega = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \omega \approx 33,69^\circ$$

$$\cos \omega = 0,8, \sin \omega = 0,55$$

Κόμβος A:



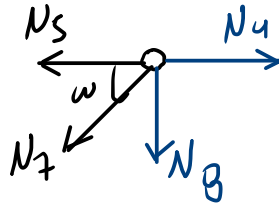
$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + N_1 + N_7 \cdot \cos \omega = 0 \quad (1)$$

$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + N_6 + N_7 \sin \omega = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 30 + N_1 + 0,8 N_7 &= 0 \\ 32 - 20 + 0,55 N_7 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (3) \Rightarrow \underline{N_1 = -12,54 \text{ kN}} \\ \Rightarrow \underline{N_7 = -21,82 \text{ kN}} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= 30 \text{ kN} \\ A_y &= 32 \text{ kN} \end{aligned}$$

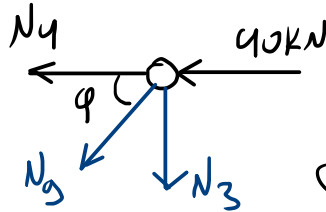
Knoten E:



$$\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_S - N_7 \cos \omega + \underline{N_4} = 0 & (1) \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_7 \sin \omega - \underline{N_B} = 0 & (2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots N_4, N_B$$

Knoten D:

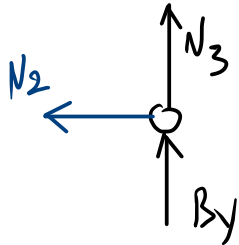


$$\tan \varphi = \frac{EF}{ED} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \varphi = \arctan(1) = 45^\circ$$

$$\cos \varphi = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_4 - N_9 \cos \varphi - 40 = 0 \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_9 \sin \varphi - N_3 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 \end{aligned}} \right\} \underline{N_3, N_9}$$

Knoten B:



$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -N_2 = 0 \Rightarrow \underline{N_2 = 0}$$

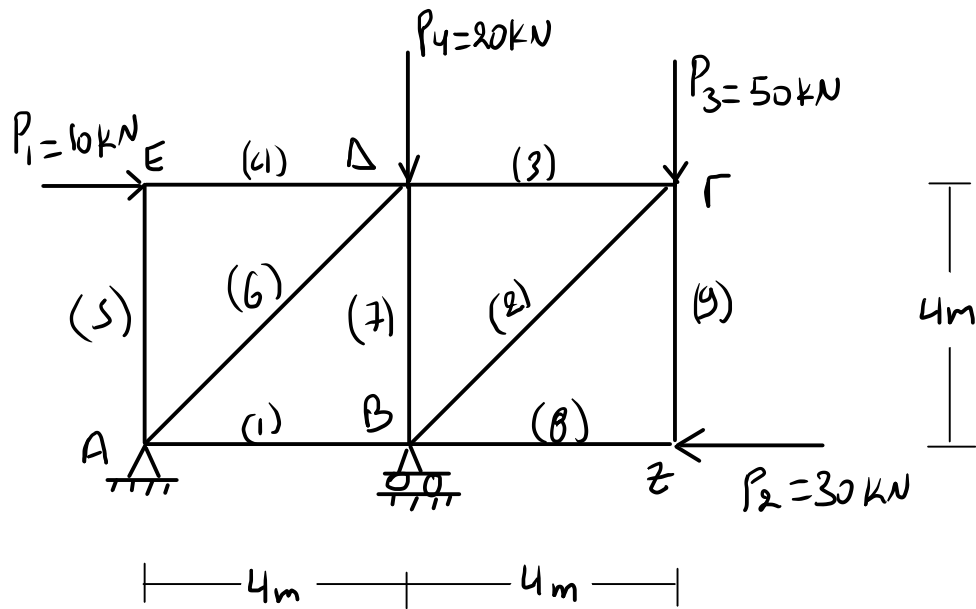
$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N_3 + B_y = 0 \Rightarrow N_3 = -B_y$$

$$\Rightarrow \underline{N_3 = 12 \text{ kN}}$$

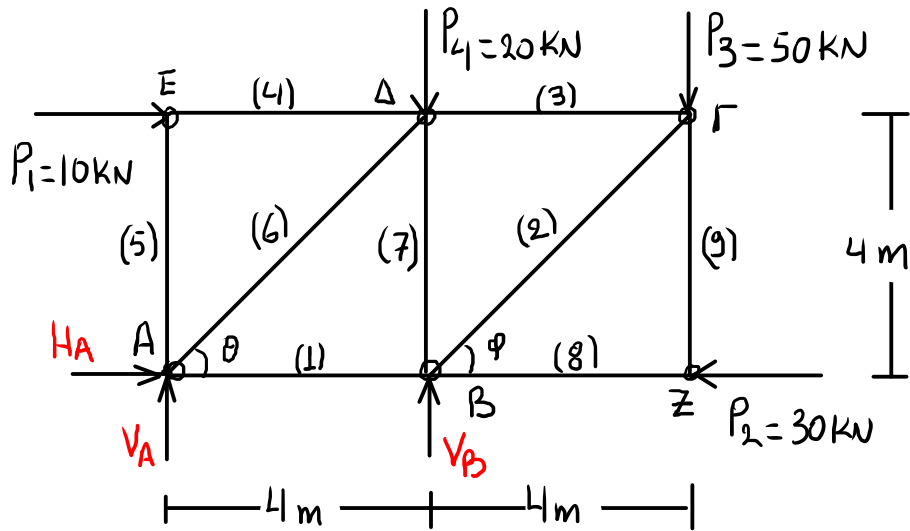
$$B_y = -12 \text{ kN}$$

Άσκηση:

Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στις ελαφριές και οι εσωτερικές δυνάμεις στις ράβδους του παρακάτω δικτυώματος,



Λύση:



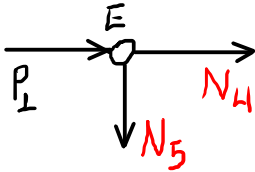
$$\begin{aligned} (+) \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A - P_2 + P_1 = 0 \Rightarrow H_A = P_2 - P_1 \\ &\Rightarrow H_A = 30 - 10 \Rightarrow \underline{H_A = 20 \text{ kN}} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + V_B - P_3 - P_4 = 0 \\ &\Rightarrow V_A + V_B = P_3 + P_4 \Rightarrow V_A + V_B = 70 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_A = 0 &\Rightarrow V_B \cdot 4 - P_3 \cdot 8 - P_4 \cdot 4 - P_1 \cdot 4 = 0 \\ &\Rightarrow V_B = P_3 \cdot 2 + P_4 + P_1 = 2 \cdot 50 + 20 + 10 \\ &\Rightarrow \underline{V_B = 130 \text{ kN}} \quad (3), (2) \xRightarrow{(3)} \underline{V_A = -60 \text{ kN}} \end{aligned}$$

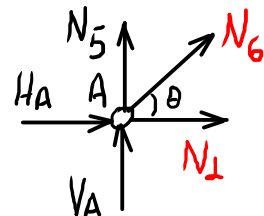
Μέθοδος των κόμβων:

Κόμβος E:



$$\begin{aligned} (+) \sum F_x = 0 &\Rightarrow P_1 + N_4 = 0 \Rightarrow N_4 = -P_1 \Rightarrow \underline{N_4 = -10 \text{ kN}} \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_5 = 0 \Rightarrow \underline{N_5 = 0} \end{aligned}$$

Κόμβος A:



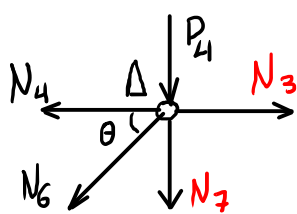
$$\tan \theta = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} (+) \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_A + N_1 + N_6 \cos \theta = 0 \quad (1) \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_A + N_5 + N_6 \sin \theta = 0 \Rightarrow N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = -V_A - N_5 \\ &\Rightarrow N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = -(-60) - 0 \Rightarrow N_6 = 2 \cdot \frac{60}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{N_6 = \sqrt{2} \cdot 60 \text{ kN}} \quad (2) \\ (1) \xRightarrow{(2)} N_1 &= -20 - \sqrt{2} \cdot 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N_1 = -80 \text{ kN}} \end{aligned}$$

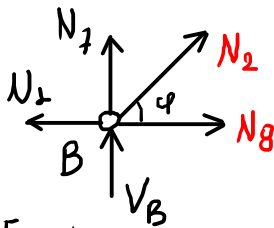
Κόμβος Δ:



$$\begin{aligned} (+) \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_4 - N_6 \cos \theta + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = N_4 + N_6 \cos \theta \\ &\Rightarrow N_3 = -10 + \sqrt{2} \cdot 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N_3 = 50 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -P_4 - N_6 \sin \theta - N_7 = 0 \Rightarrow N_7 = -P_4 - N_6 \sin \theta \\ &\Rightarrow N_7 = -20 - \sqrt{2} \cdot 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N_7 = -80 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Κόμβος Β:



$$\tan \varphi = \frac{z}{Bz} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

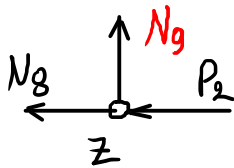
$$\cos \varphi = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(+)\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_1 + N_2 \cos \varphi + N_8 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_B + N_7 + N_2 \sin \varphi = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{-V_B - N_7}{\sin \varphi} \\ &\Rightarrow N_2 = \frac{-130 - (-80)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (-50) \Rightarrow \underline{N_2 = -50\sqrt{2} \quad (2)} \end{aligned}$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} N_8 = N_1 - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -80 + 50\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{N_8 = -30 \text{ kN}}$$

Κόμβος Ζ:

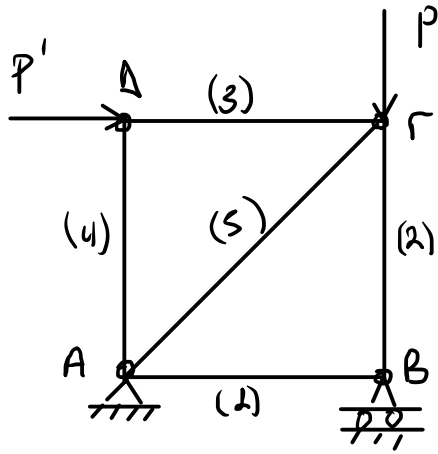


$$(+)\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_8 - P_2 = 0 \Rightarrow -(-30) - 30 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

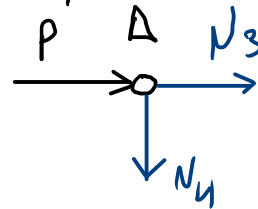
$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \underline{N_9 = 0}$$

OK

Ισοστατική - Σχεδίαση Δικτύων:

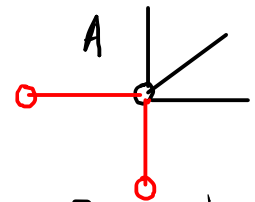
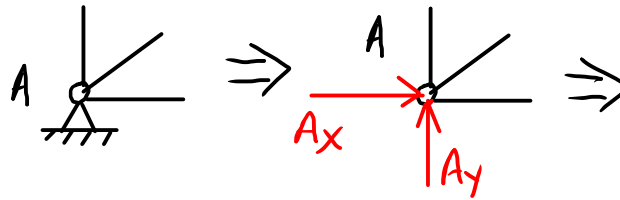


Κόμβος Δ:



$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ εξισώσεις} \\ \text{σε κάθε} \\ \text{κόμβο} \end{array}$$

Κόμβος Α:



2 δεικνύει
ράβδους που
παίζουν το ρόλο
των άρθρων
(εξωτερικές ράβδους)

$$\rho + \alpha = 2n_0$$

ρ : αριθμός εξωτερικών ράβδων δικτύων (ΡΕΓ)

α : αριθμός εξωτερικών ράβδων (ΡΕΞ)
(αντιδράσεις από τις βελίξεις)

n_0 (ή n): αριθμός των κόμβων

m : πλήθος των υπερελαστικών εξισώσεων υποστήριξης ($m=3$ για επίπεδο σκελετό)

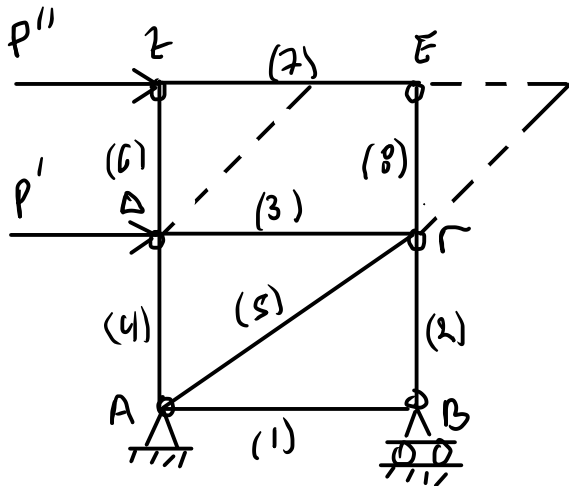
$$\rho + \alpha \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} 2n_0 \quad \begin{array}{l} \text{υπερστατικό} \\ \text{ισοστατικό} \\ \text{υποστατικό} \end{array}$$

Κριτήρια Ισοσταθικότητας:

- $p + \alpha = 2 \cdot n_0$ ολικά ισοσταθικό
- $p + \alpha > 2 \cdot n_0$ ολικά υπερσταθικό

Βαθμός υπερσταθικότητας = $(p + \alpha) - 2 \cdot n_0$
 Δείχνει πόσες εξισώσεις μας λείπουν

- $p + \alpha < 2 \cdot n_0$ ολικά υποσταθικό / μηχανισμό



$$\left. \begin{array}{l} p = 8 \\ \alpha = 3 \\ n_0 = 6 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} p + \alpha &= 8 + 3 = 11 \\ 2n_0 &= 2 \cdot 6 = 12 \end{aligned}$$

$$p + \alpha < 2n_0$$

$$11 < 12$$

υποσταθικό δίκτυο

$p + \alpha$: αριθμός των
 αγνώστων δυνάμεων

$2 \cdot n_0$: πλήθος εξισορροπίας
 στους κόμβους

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = m & \text{Εξωτερικά λογαζαζικό} \\ \alpha > m & \text{Εξωτερικά υπερλογαζικό} \\ \alpha < m & \text{Εξωτερικά υπολογαζικό} \end{array} \right\}$$

$$A_v \left\{ \begin{array}{l} p + \alpha = 2 \cdot n_0 \\ \alpha = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Εξωτερικά} \\ \text{λογαζαζικό} \end{array}$$

Κριτήρια γερύσεως:

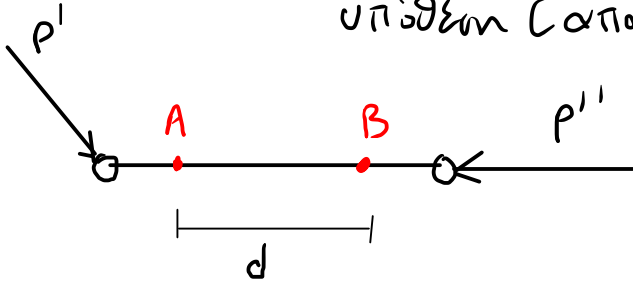
Έννοια απολύτως γερού βώματος:

Η δύναμη έχει σαν αποτέλεσμα πάνω σε ένα βώμα 3 πράγματα:

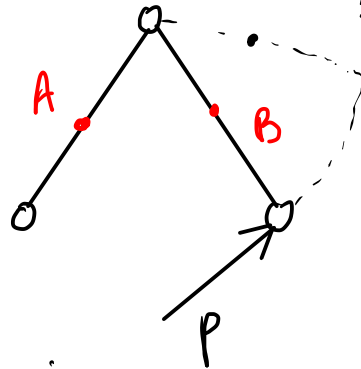
α) μετατόπιση, β) στρέψη, γ) ~~παραμόρφωση~~

— για την Μηχανική I-Στατική

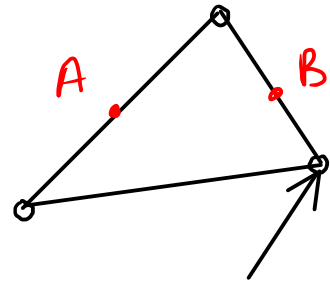
Το γερό βώμα για να είναι απολύτως γερό βώμα θα πρέπει δύο συνθήκες πάνω σε αυτό να ικανοποιούνται πάντα (και μετά την άσκηση του φορτίου)
υπόθεση (απαραμόρφωτο γερό βώμα)



απολύτως γερό



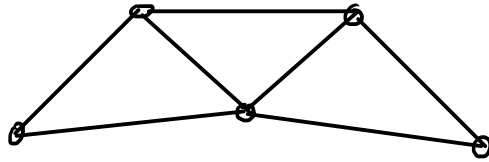
χαλαρό βώμα



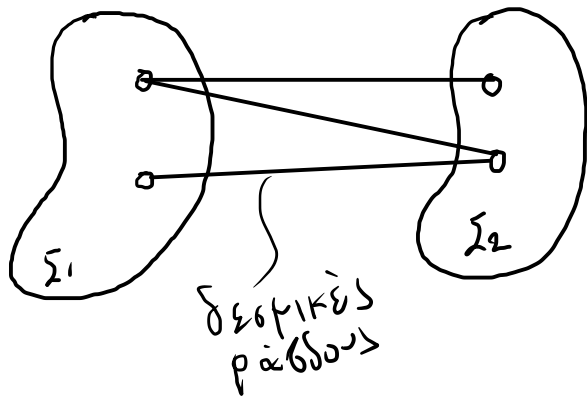
απολύτως γερό βώμα
(βασικό δίκτυο)

Κριτήρια Γερεότητας :

- 1) (Τριγωνικό ζόζο) : Εάν η κατασκευή αποτελείται από ράβδους που σχηματίζουν κατά παράθεση κλειστά τριγωνα τότε αποτελεί γερό σώμα.

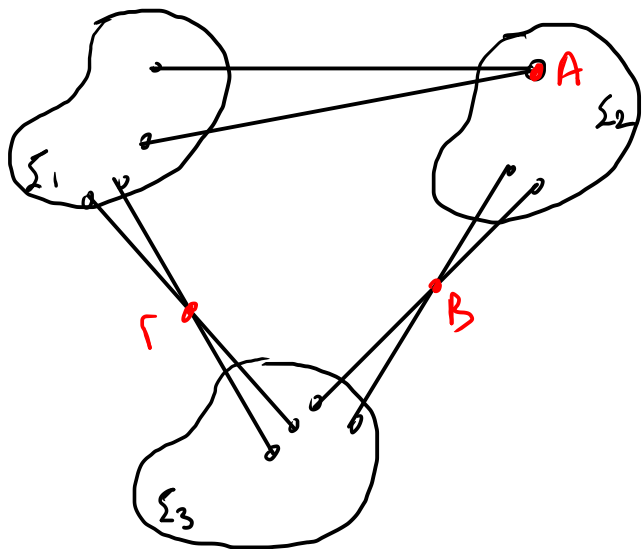


- 2) (Κριτήριο γερεότητας των δύο δικτύων)

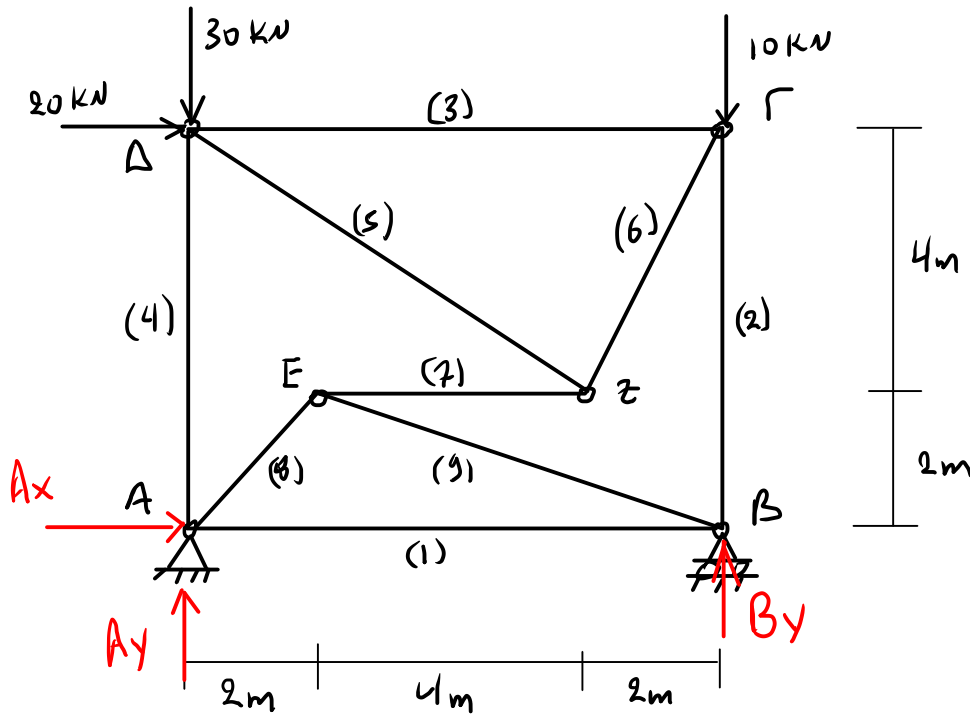


Πρέπει οι δύο δίκτυοι να συνδέονται με 3 ράβδους των οποίων οι διευθύνσεις δεν είναι συντρέχουσες και δεν είναι παράλληλες.

3) (Κριτήριο των κριών δικών) Για να είναι απολύτως σερλό σώμα πρέπει να συνδέονται ανά δύο από σειρά ράβδων έτσι ώστε τα κρία οφεία να μην είναι συνευθετικά.



Μέθοδος των κοπών ή Ritter:



$$\left. \begin{array}{l} p = 9 \\ \alpha = 3 \\ n_0 = 6 \end{array} \right\} p + \alpha = 2 \cdot n_0 \Rightarrow \text{ολική ισοστατική} \\
 \left. \begin{array}{l} \alpha = m \\ 3 = 3 \end{array} \right\} \text{εξωτερικά ισοστατική}$$

Εσωτερικά Ισοστατική

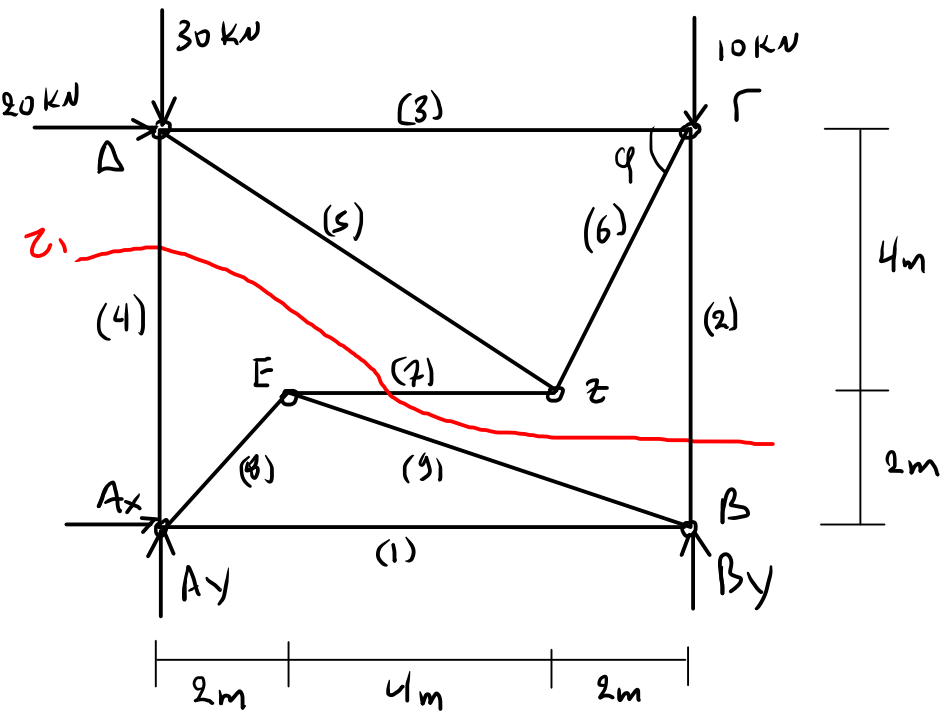
Σεξέρωση:

Βλέπουμε 2οι κλιμακίοι
 Σ_1 : ΓΔΖ δίκτυο
 Σ_2 : ΑΕΒ δίκτυο
 3 δίκτυοι: (2), (7), (4)

* Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των κόμβων για να υπολογίσουμε τις εσωτερικές αξονικές δυνάμεις στις ράβδους καθώς δεν υπάρχει κόμβος που να ενώνει δύο μόνο ράβδους.

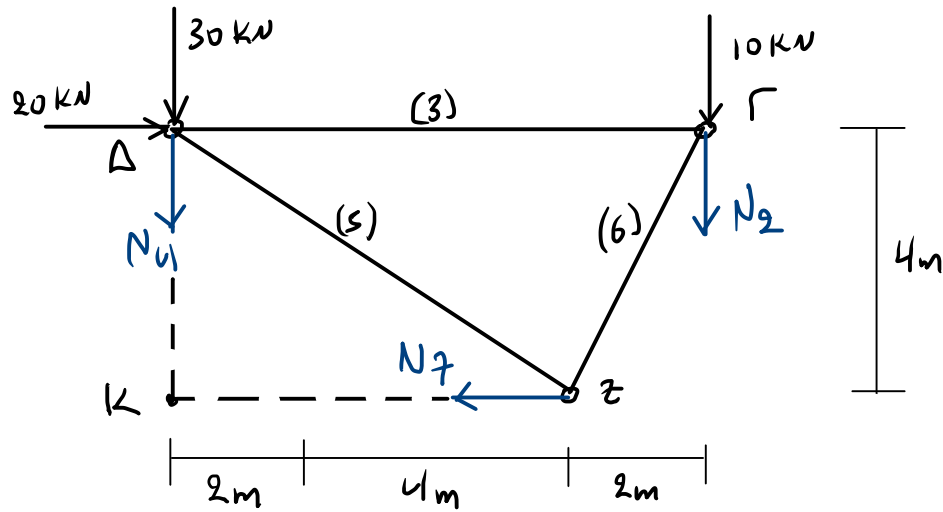
Μέθοδος των τριών ή Ritter

- 1) Κόβουμε το δίκτυωμα σε δύο ανεξάρτητα κομμάτια έχοντας κομεί κατά το δυνατόν τον ελάχιστο αριθμό ράβδων.
- 2) Σε κάθε ένα από τα κομμάτια που θα προκύψουν θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι.
- 3) Εάν το δίκτυωμα είναι γερμό βέλη του κριτηρίου γερεότητας των δύο δικτύων και των τριών ράβδων τότε η τριή που θα κόβουμε θα πρέπει υποχρεωτικά να κόβει τις 3 δευτερεύουσες ράβδους.



* Το δικτύωμα είναι κερκό βάρη
 του κρυσταλλίου 2 δυνάμεις
 (ΑΒΕ και ΓΒΕ) και των ζυγών
 δεξιάτων ράβδων (2), (7), (4)
 συνεπώς η ζοπή ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ
 θα κέρει αυτές τις ζυγές ράβδους.

$$\tan \varphi = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \varphi \approx 63,45^\circ$$



$$(+)\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow 20 - N_7 = 0 \Rightarrow \underline{N_7 = 20 \text{ kN}} \quad (1)$$

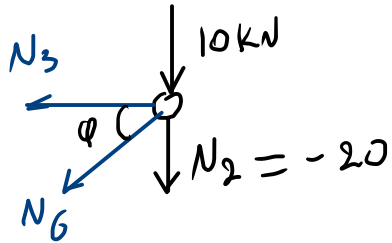
$$(+)\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -30 - N_4 - 10 - N_2 = 0 \Rightarrow N_2 + N_4 = -40 \quad (2)$$

$$\curvearrowright \sum M_K = 0 \Rightarrow -20 \cdot 4 - 10 \cdot 8 - N_2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{-80 - 80}{8} \Rightarrow \underline{N_2 = -20 \text{ kN}} \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} -20 + N_4 = -40 \Rightarrow \underline{N_4 = -20 \text{ kN}}$$

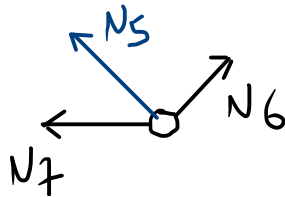
Αφού υπολογίσαμε από το προηγούμενο Δ.Ε.Σ. του πάνω καμβάκιού του βέλους
 γύρω από τις εσωτερικές δυνάμεις των ράβδων (2) και (4) (N_2, N_4 γνωστές)
 μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση με τη μέθοδο των κόμβων:

Κόμβος Γ:



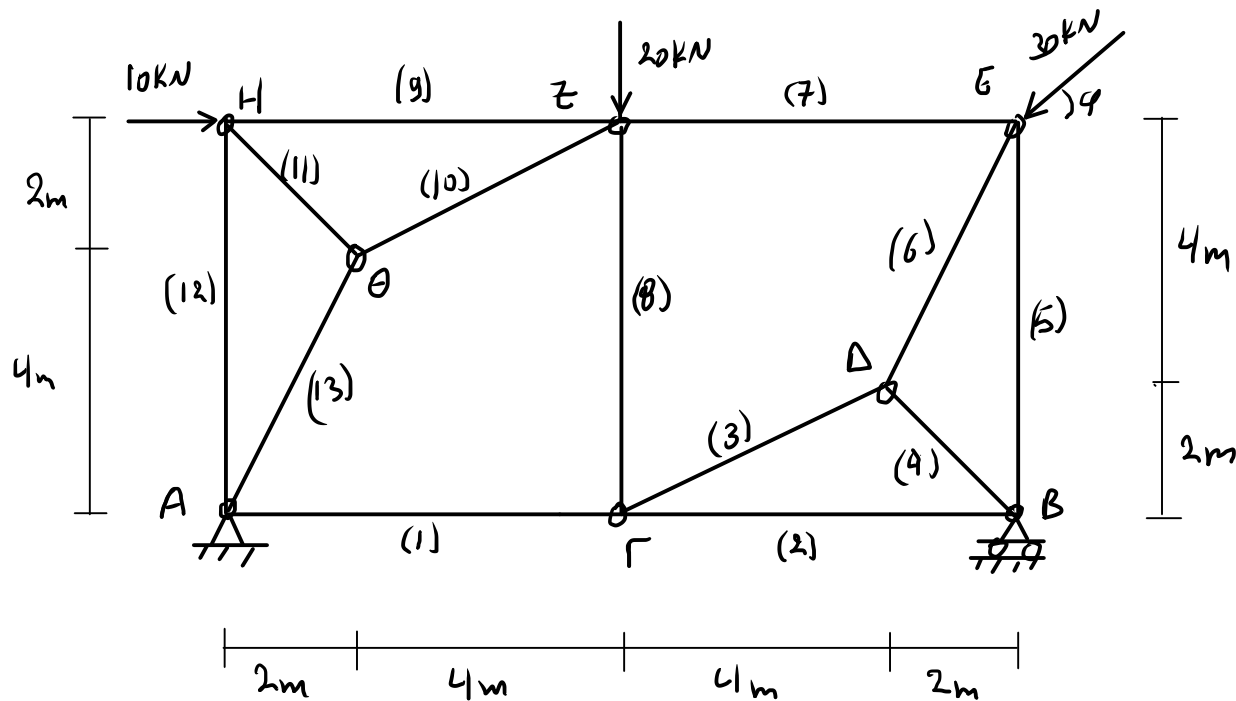
$$\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_3 - N_6 \cos \varphi = 0 \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow -10 - N_2 - N_6 \sin \varphi = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 \\ (+) \uparrow \sum F_y = 0 \end{aligned}} \right\} N_3, N_6$$

Κόμβος Z:



* Συνεχίζουμε με τη μέθοδο των κόμβων για να υπολογίσουμε
 όλες τις ζητούμενες εσωτερικές αξονικές δυνάμεις στις ράβδους.

Άσκηση

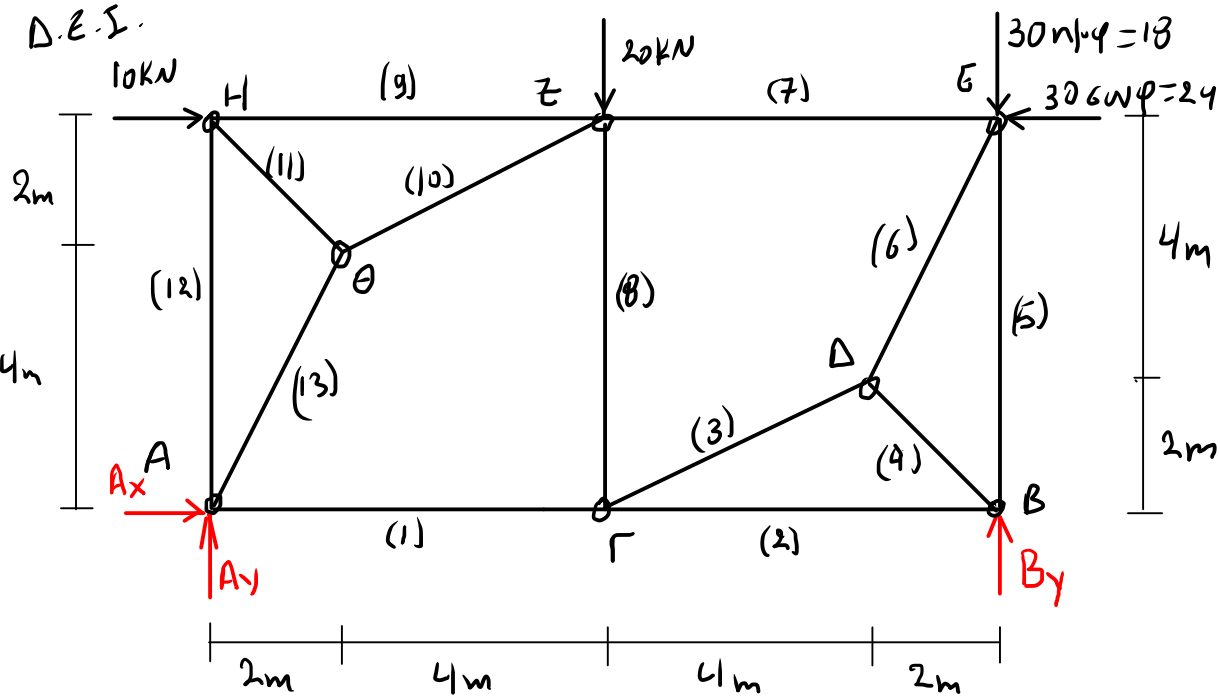


$$\eta\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\sigma\varphi = \frac{4}{5}$$

- Να γίνει έλεγχος ελαστικότητας και υπέρσφιξης των διακρωμάτων
- Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στιςστηρίξεις
- Να υπολογιστούν οι εσωτερικές δυνάμεις στις ράβδους

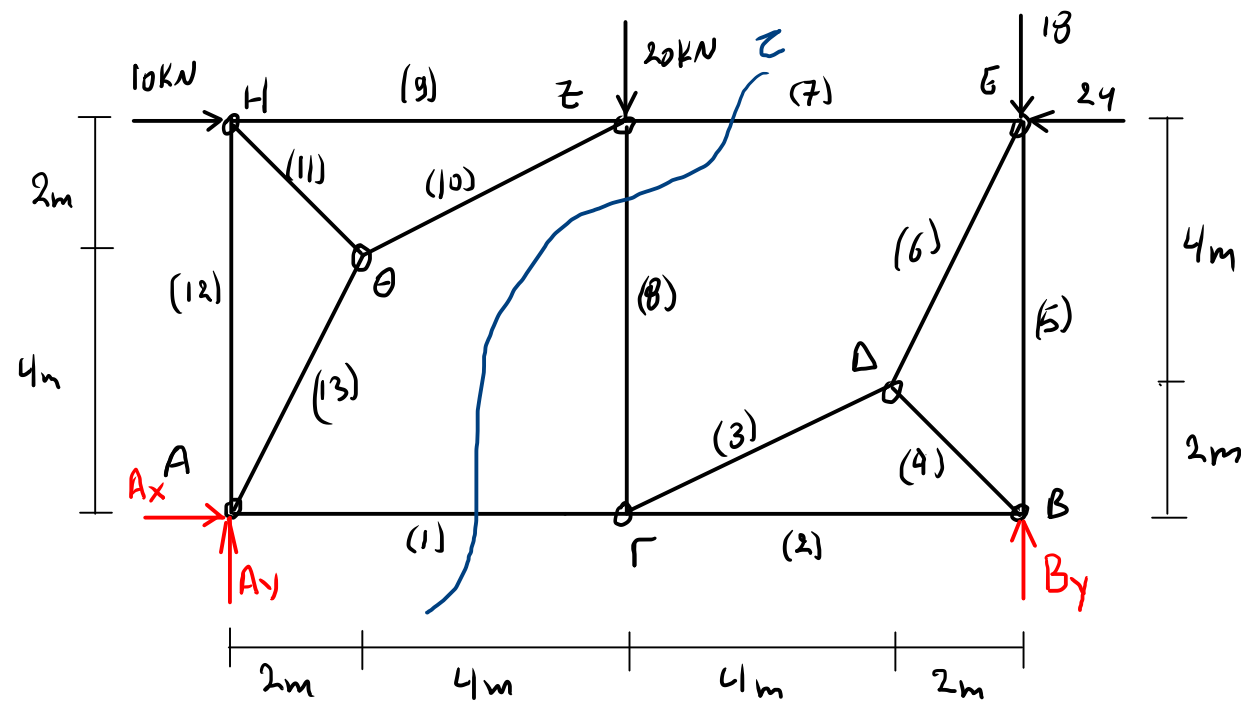
D.E.I.



$$30 \mu\mu = 30 \cdot \frac{3}{5} = 18$$
$$30 \text{ m}\mu = 30 \cdot \frac{4}{5} = 24$$

α) Έλεγχος λογιστικής και γενικής : $p = 13, \alpha = 3, n_0 = 8, m = 3$
 $p + \alpha = 13 + 3 = 16$ } $p + \alpha = 2 \cdot n_0$, ορθά λογιστικό } Εσωτερικά λογιστικό
 $2 \cdot n_0 = 2 \cdot 8 = 16$ } $\alpha = m$, εξωτερικά λογιστικό }

Το δικτυώμα είναι γερασμένο σύμφωνα με το κριτήριο των δύο γερασμένων διακων που ενώνονται με 3 δευτερεύουσες ραβδούς
(ΑΒΕΗ), (ΓΒΕΔ) : γερασμένα ως παραθεσινιζμένα
(Γ), (Β), (Α) : 3 δευτερεύουσες ραβδοί

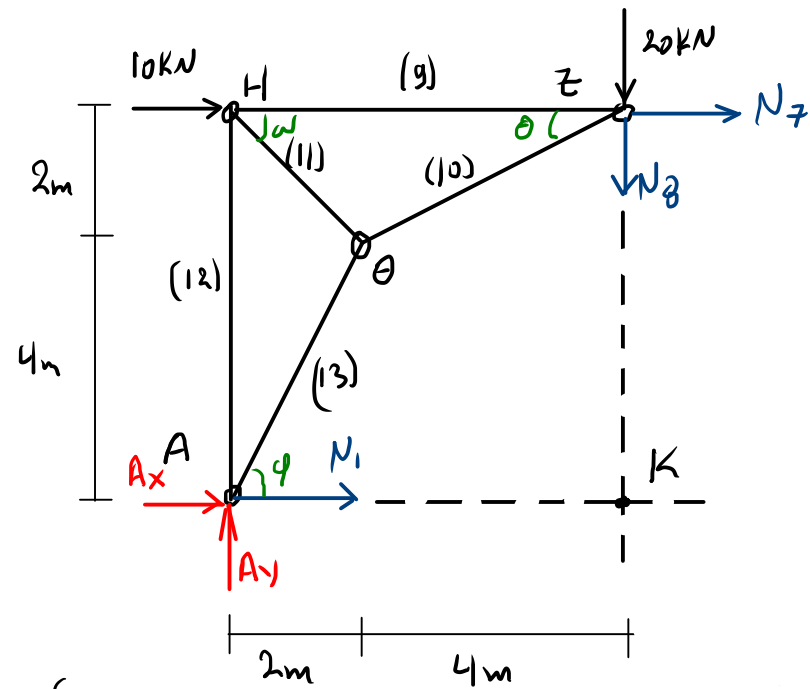


$$b) \stackrel{(4)}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 24 + 10 = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 14 \text{ kN}} \quad (1)$$

$$(\uparrow) \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 18 - 20 = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 38 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_A = 0 &\Rightarrow B_y \cdot 12 + 24 \cdot 6 - 18 \cdot 12 - 20 \cdot 6 - 10 \cdot 6 = 0 \Rightarrow B_y + 12 - 18 - 10 - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \underline{B_y = 21 \text{ kN}} \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} A_y + 21 = 38 \Rightarrow \underline{A_y = 17 \text{ kN}}$$



$$A_x = 14 \text{ kN}, A_y = 17 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \varphi \approx 63,43^\circ$$

$$G_{\omega\varphi} = \frac{2}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$n_{\varphi\varphi} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\varepsilon_{\varphi\omega} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \omega = 45^\circ, G_{\omega\omega} = n_{\varphi\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \approx 26,57^\circ, G_{\omega\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$n_{\varphi\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} (+) \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x + N_1 + N_7 + 10 = 0 \Rightarrow N_1 + N_7 = -24 \quad (1) \end{aligned}$$

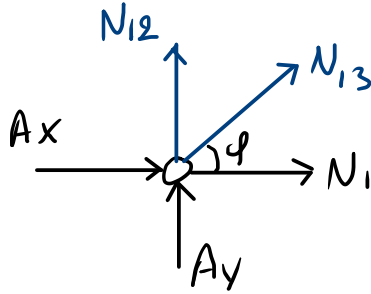
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 20 - N_8 = 0 \Rightarrow \underline{N_8 = -3 \text{ kN}} \quad (2)$$

$$\curvearrowright \sum M_K = 0 \Rightarrow -A_y \cdot 6 - 10 \cdot 6 - N_7 \cdot 6 = 0 \Rightarrow -17 \cdot 6 - 10 \cdot 6 - N_7 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \underline{N_7 = -27 \text{ kN}} \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} N_1 - 27 = -24 \Rightarrow \underline{N_1 = 3 \text{ kN}}$$

* Συνεχίζω με μέθοδο των κόμβων για να βρω τις ζητούμενες Εσωτερικές αξονικές δυνάμεις των ράβδων.

Κόμβος Α:

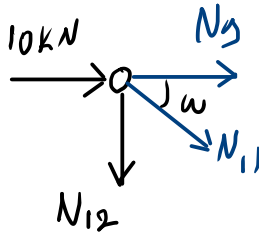


$$\begin{aligned}
 (+) \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x + N_1 + N_{13} \cos \varphi = 0 \\
 &\Rightarrow 14 + 3 + N_{13} \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\
 &\Rightarrow \underline{N_{13} = -17\sqrt{5} \text{ kN}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (+) \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + N_{12} + N_{13} \cdot \sin \varphi = 0 \\
 &\Rightarrow 17 + N_{12} + N_{13} \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 17 + N_{12} - 17\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \underline{N_{12} = 17 \text{ kN}}$$

Κόμβος Η:



$$(+) \sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N_9 + N_{11} \cos \omega = 0 \quad (1)$$

$$(+) \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{12} - N_{11} \sin \omega = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow -17 - N_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_{11} = -17\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} N_9 = 7 \text{ kN}$$