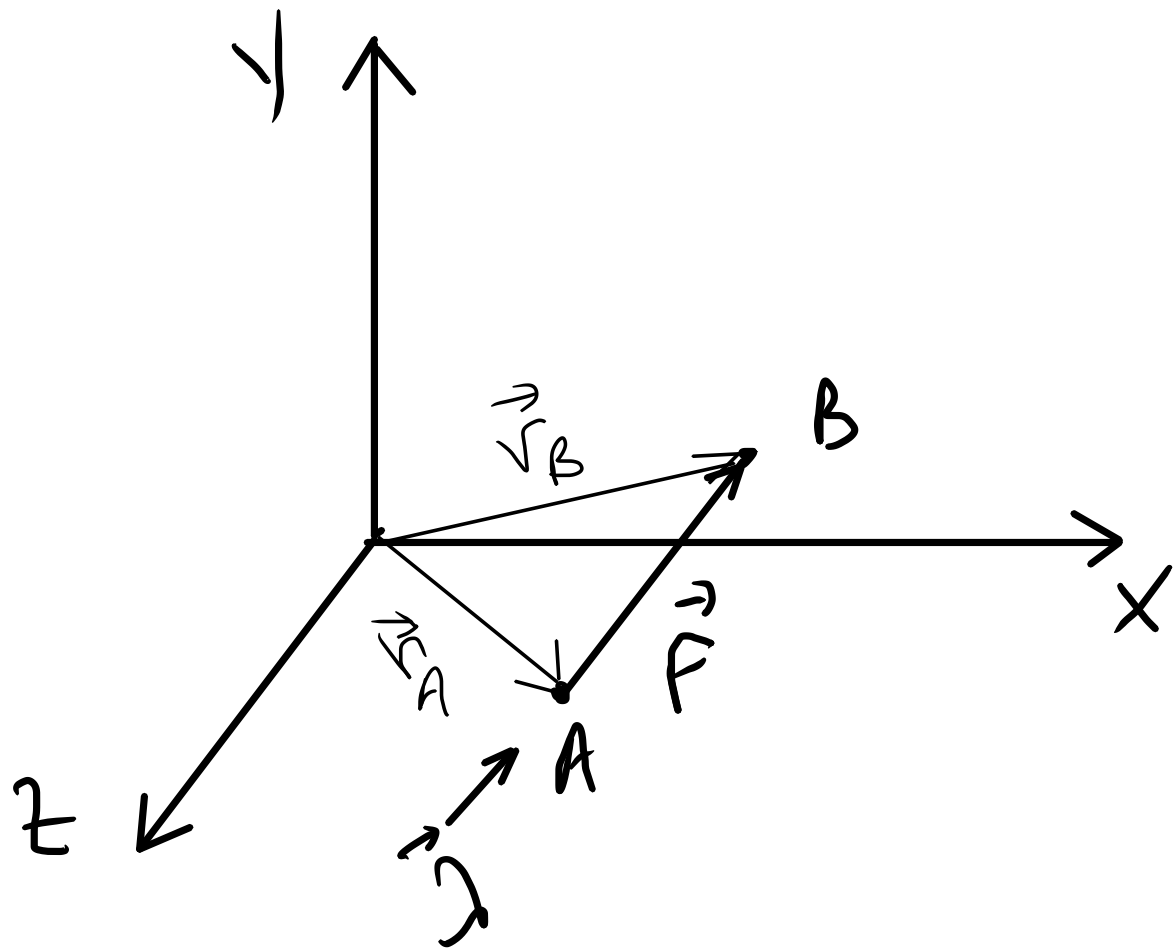


Διαυφασική Σελική:

Δυνάμεις: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ ή $\vec{F} = F \vec{\lambda}$, $|\vec{\lambda}| = 1$

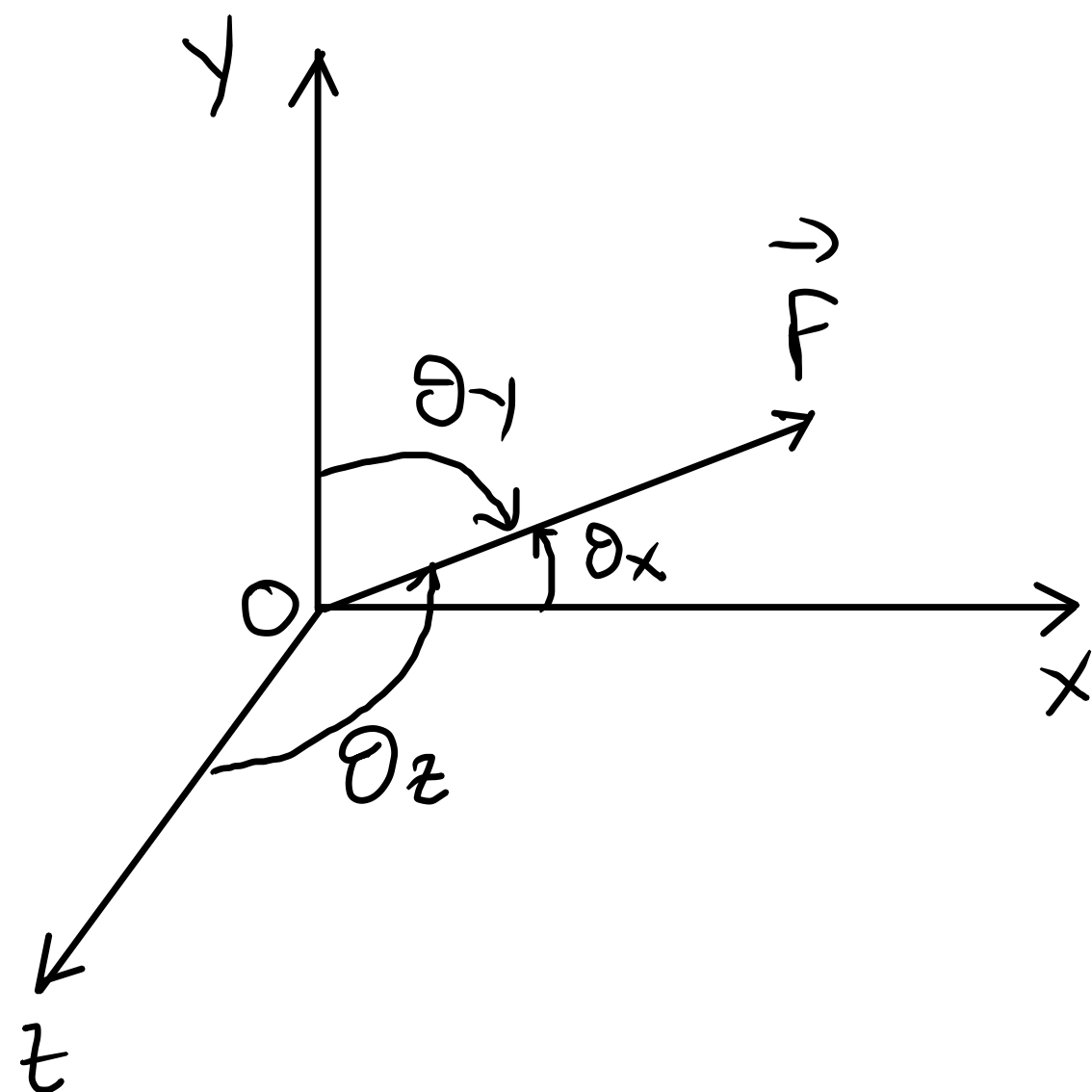
1) Μέτρο της $\vec{F}$, $|\vec{F}|$ ή F σε Newton (N), $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$

2) Κατεύθυνση (Διεύθυνση και φορά), καθορίζονται από το $\vec{\lambda}$



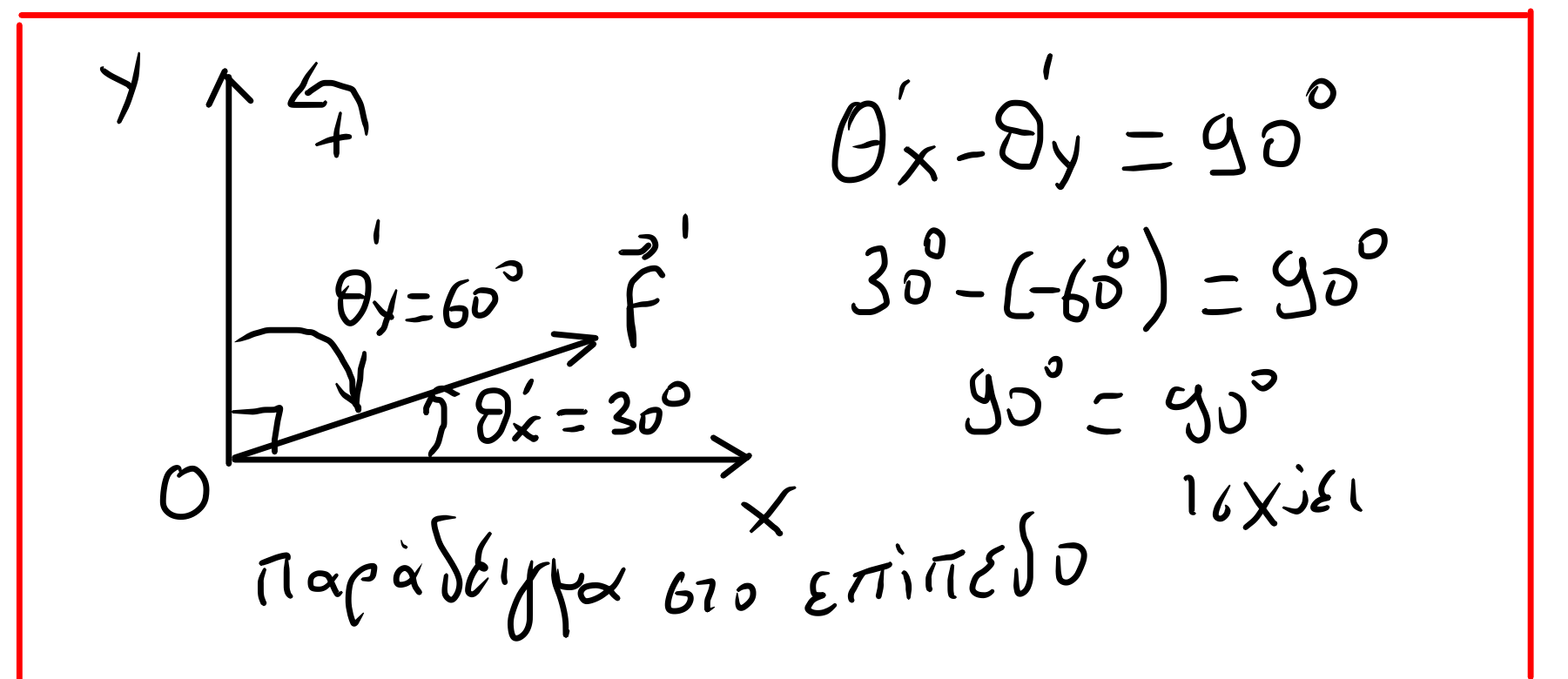
$$\vec{AB} = \vec{F} = \vec{r}_B - \vec{r}_A, \quad \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$



$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\vartheta_x - \vartheta_y = 90^\circ, \quad \vartheta_y - \vartheta_z = 90^\circ, \quad \vartheta_z - \vartheta_x = 90^\circ$$



$$\vec{F} = F \vec{\lambda}, \quad \vec{\lambda} : \langle \cos \vartheta_x, \cos \vartheta_y, \cos \vartheta_z \rangle = \cos \vartheta_x \vec{i} + \cos \vartheta_y \vec{j} + \cos \vartheta_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F (\cos \vartheta_x \vec{i} + \cos \vartheta_y \vec{j} + \cos \vartheta_z \vec{k}) = F (\lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k})$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1^2 = 1 = \cos^2 \vartheta_x + \cos^2 \vartheta_y + \cos^2 \vartheta_z$$

$$\lambda_x = \cos \vartheta_x = \frac{F_x}{F}, \quad \lambda_y = \cos \vartheta_y = \frac{F_y}{F}, \quad \lambda_z = \cos \vartheta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\{\vec{F} \parallel \vec{P}\} \Leftrightarrow \left(\frac{F_x}{P_x} = \frac{F_y}{P_y} = \frac{F_z}{P_z} = c \right) \Rightarrow \vec{F} = c \cdot \vec{P}, c \in \mathbb{R}$$

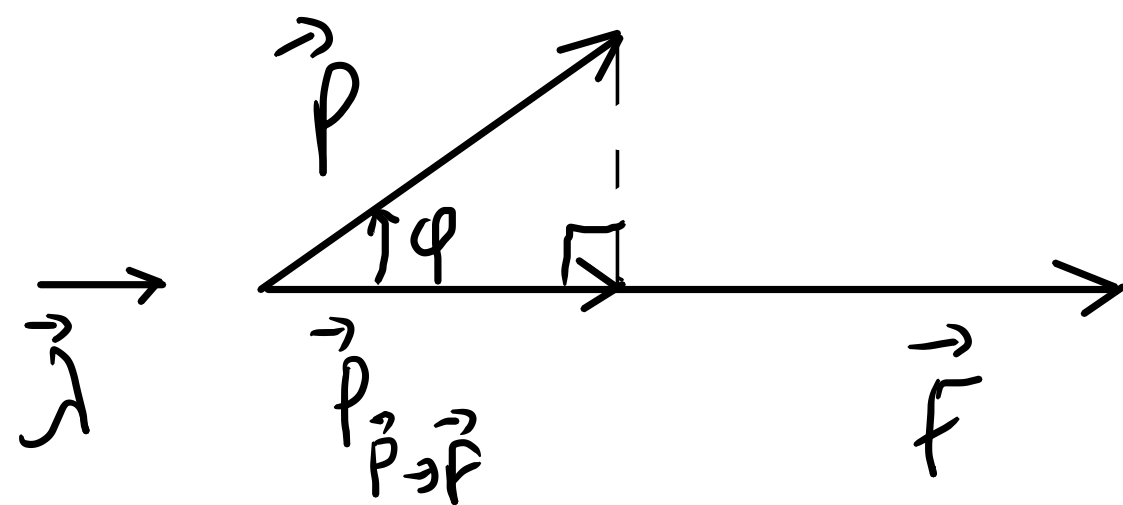
$$\cos \varphi = \frac{\vec{F} \cdot \vec{P}}{|\vec{F}| |\vec{P}|} \quad \text{γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων } \vec{F} \text{ και } \vec{P}$$

• Συνθήκη κάθετοτητας $\vec{F} \perp \vec{P} \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \vec{P} = F_x P_x + F_y P_y + F_z P_z = 0$
 $\vec{F} \neq \vec{0}, \vec{P} \neq \vec{0}$

• Συνθήκη παραλληλότητας $\vec{F} \parallel \vec{P}, \vec{F} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \vec{0}$

• Συνθήκη συνεπιπλοτητας τριών διανυσμάτων $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}$ μικρό τριπλό γινόμενο $\vec{F} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 0$

Προβολές δυνάμεως $\vec{P}$ σε διεύθυνση ως δυνάμεως $\vec{F}$



$$\text{Proj}_{\vec{F}} \vec{P} = \vec{P}_{\vec{P} \rightarrow \vec{F}} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{F}}{|\vec{F}|} \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{|\vec{P}| |\vec{F}| \cos \varphi}{|\vec{F}|} \cdot \vec{\lambda} = |\vec{P}| \cos \varphi \cdot \vec{\lambda}$$

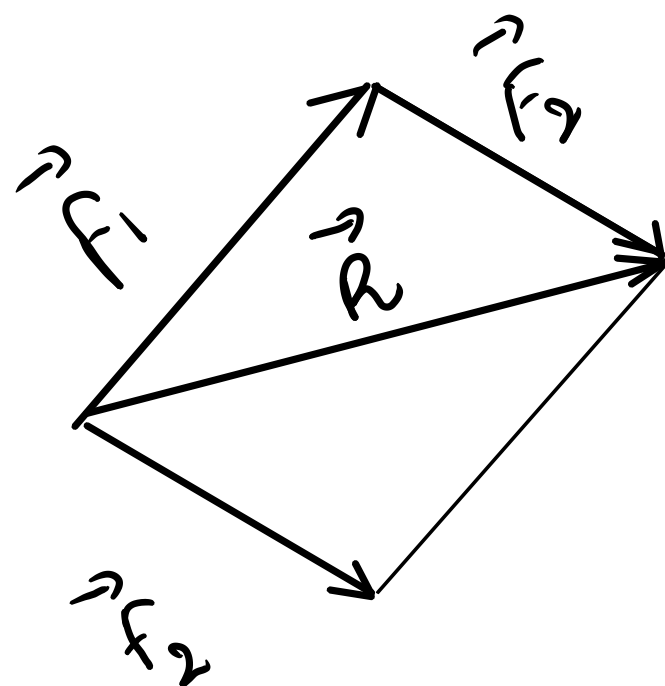
Συνεχόμενες δυνάμεις:

έχω $Oxyz$ άξονες

$$\vec{F}_1 < F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} >$$

$$\vec{F}_2 < F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} >$$

$$\vec{R} < R_x, R_y, R_z >$$



Η $\vec{R}$ μπορεί να αναλυθεί σε
συνεχόμενες κατά τους άξονες
 x, y, z

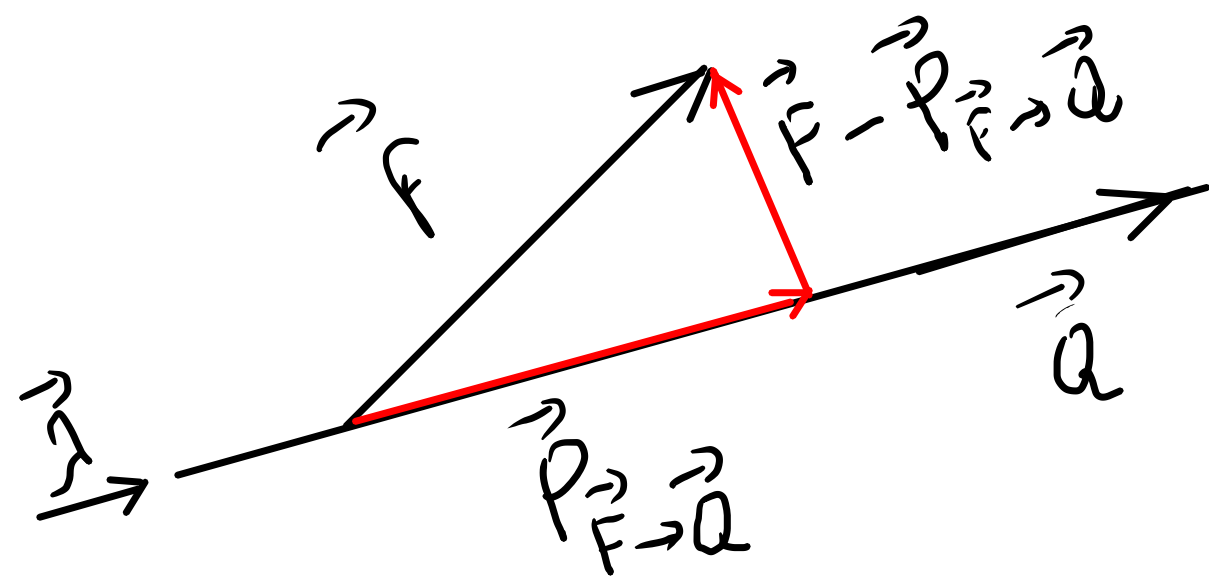
$$\vec{R} = \sum_{n=1}^2 \vec{F}_n \quad \text{συνεχόμενες δυνάμεις στο χώρο}$$

$$R_x = \sum_{n=1}^2 F_{nx} = F_{1x} + F_{2x}$$

$$R_y = \sum F_{ny}$$

$$R_z = \sum F_{nz}$$

Ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες



$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|}$$

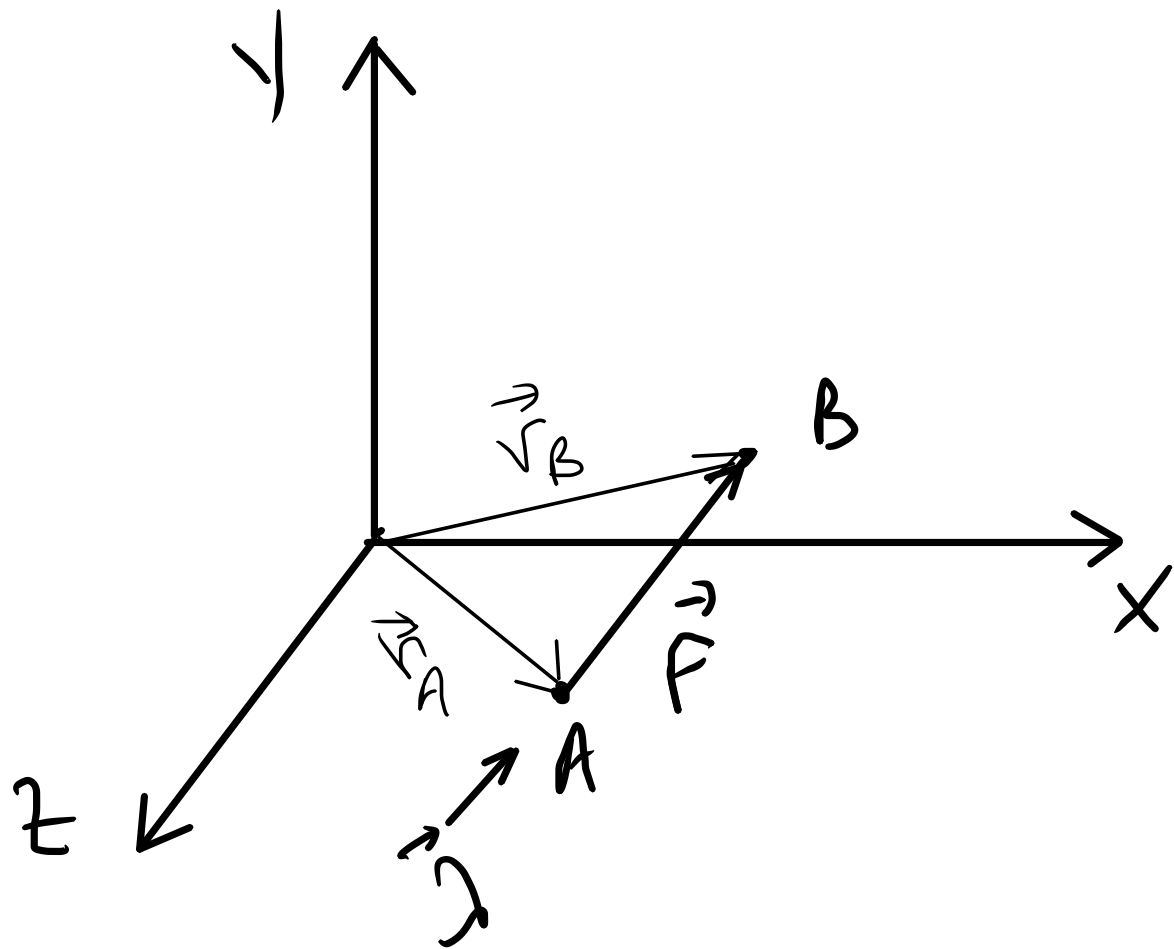
$$\vec{F} = \underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda}}_{\substack{\text{προβολή} \\ \vec{P}_{\vec{F} \rightarrow \vec{Q}}}} + \underbrace{\left[\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} \right]}_{\substack{\text{κάθετο διάνυσμα} \\ \vec{F} - \vec{P}_{\vec{F} \rightarrow \vec{Q}}}}$$

Διαυροαξική Σαξική:

Δυναμεις : $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ ή $\vec{F} = F \vec{\lambda}$, $|\vec{\lambda}| = 1$

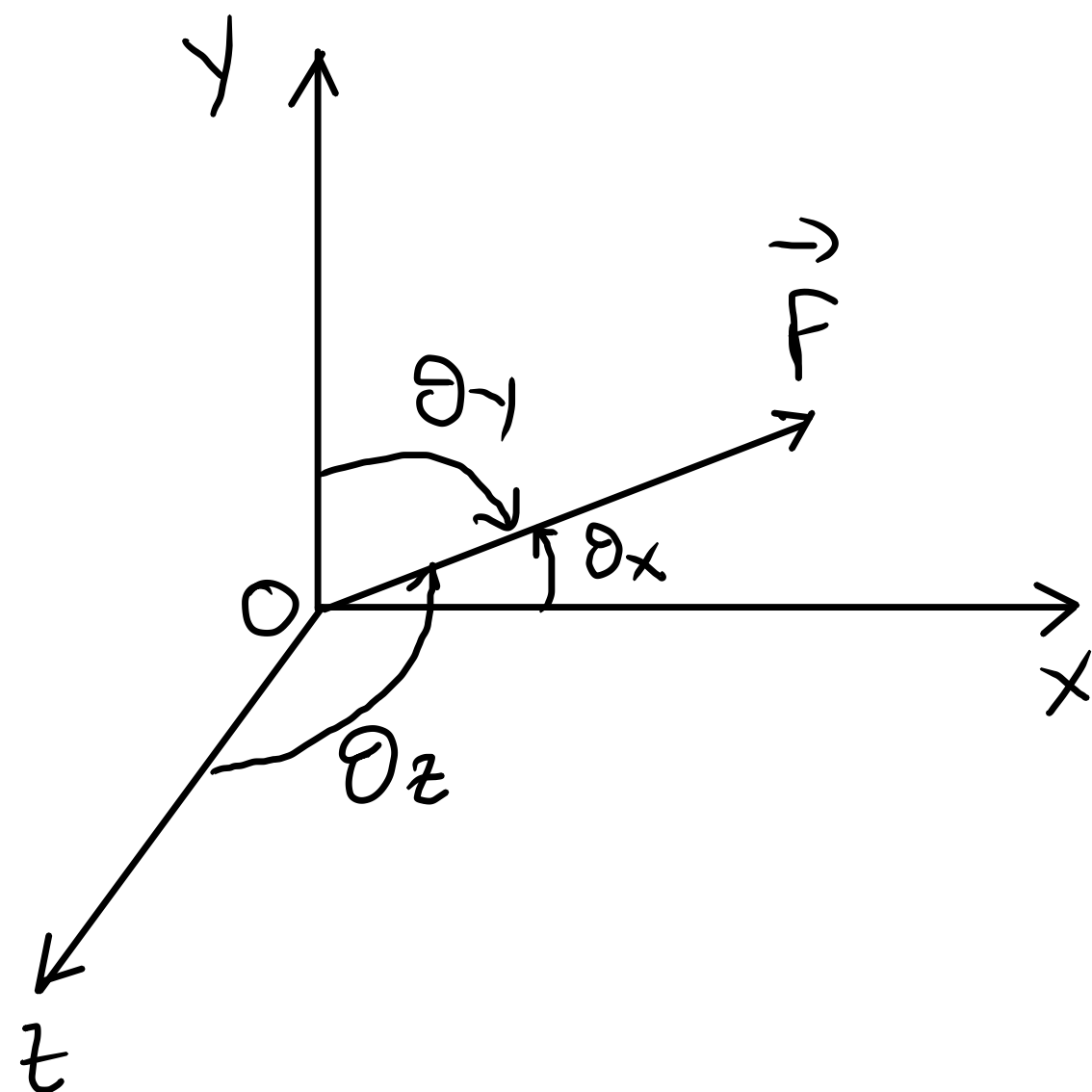
1) Μέτρο της $\vec{F}$, $|\vec{F}|$ ή F σε Newton (N), $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$

2) Κατεύθυνση (Διεύθυνση και φορά), καθορίζονται από το $\vec{\lambda}$



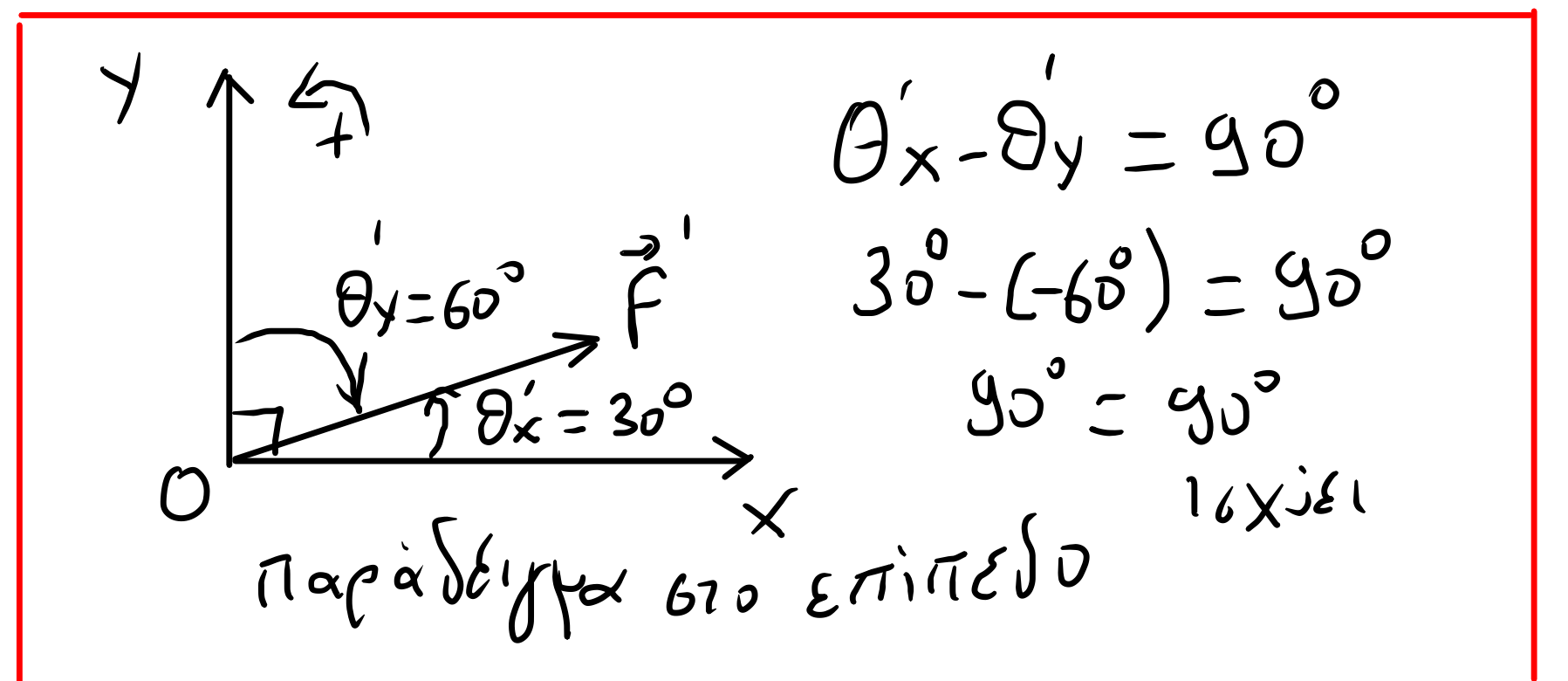
$$\vec{AB} = \vec{F} = \vec{r}_B - \vec{r}_A, \quad \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$



$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\theta_x - \theta_y = 90^\circ, \quad \theta_y - \theta_z = 90^\circ, \quad \theta_z - \theta_x = 90^\circ$$



$$\vec{F} = F \vec{\lambda}, \quad \vec{\lambda} : \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}) = F (\lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k})$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1^2 = 1 = \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z$$

$$\lambda_x = \cos \theta_x = \frac{F_x}{F}, \quad \lambda_y = \cos \theta_y = \frac{F_y}{F}, \quad \lambda_z = \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\{\vec{F} \parallel \vec{P}\} \Leftrightarrow \left(\frac{F_x}{P_x} = \frac{F_y}{P_y} = \frac{F_z}{P_z} = c \right) \Rightarrow \vec{F} = c \cdot \vec{P}, c \in \mathbb{R}$$

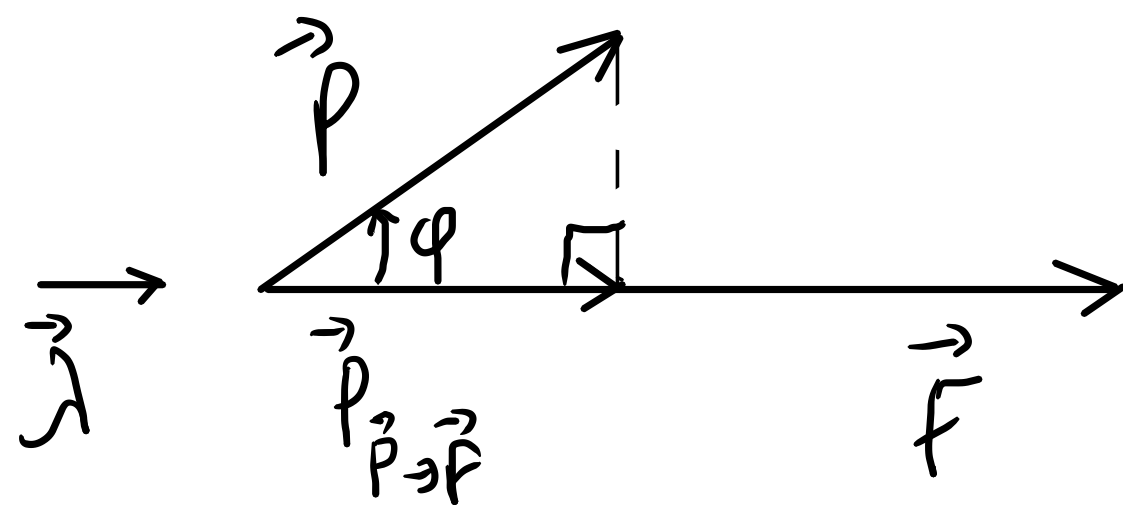
$$\cos \varphi = \frac{\vec{F} \cdot \vec{P}}{|\vec{F}| |\vec{P}|} \quad \text{γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων } \vec{F} \text{ και } \vec{P}$$

• Συνθήκη κάθετοτητας $\vec{F} \perp \vec{P} \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \vec{P} = F_x P_x + F_y P_y + F_z P_z = 0$
 $\vec{F} \neq \vec{0}, \vec{P} \neq \vec{0}$

• Συνθήκη παραλληλότητας $\vec{F} \parallel \vec{P}, \vec{F} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \vec{0}$

• Συνθήκη συνεπιπλοτητας τριών διανυσμάτων $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}$ μικρό τριπλό γινόμενο $\vec{F} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 0$

Προβολές δυνάμεως $\vec{P}$ σε διεύθυνση ως δυνάμεως $\vec{F}$



$$\text{Proj}_{\vec{F}} \vec{P} = \vec{P}_{\vec{P} \rightarrow \vec{F}} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{F}}{|\vec{F}|} \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{|\vec{P}| |\vec{F}| \cos \varphi}{|\vec{F}|} \cdot \vec{\lambda} = |\vec{P}| \cos \varphi \cdot \vec{\lambda}$$

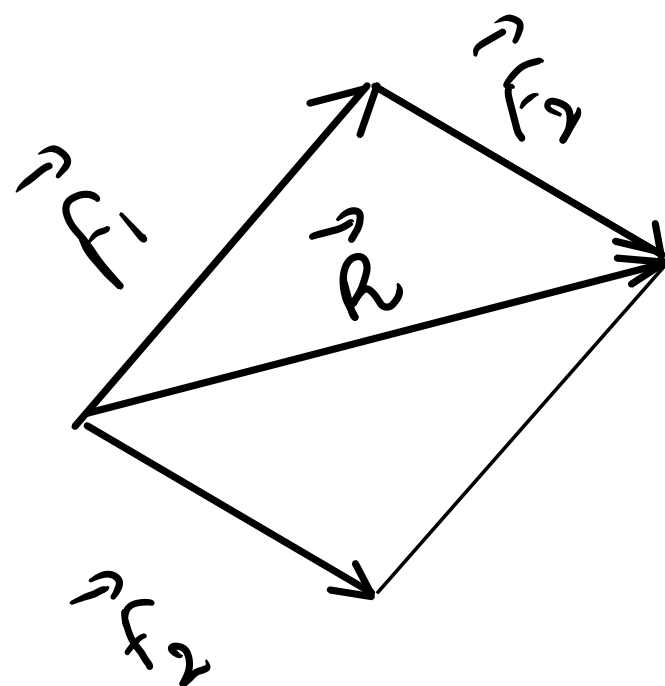
Συνεχόμενες δυνάμεις:

έχω $Oxyz$ άξονες

$$\vec{F}_1 < F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} >$$

$$\vec{F}_2 < F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} >$$

$$\vec{R} < R_x, R_y, R_z >$$



Η $\vec{R}$ μπορεί να αναλυθεί σε
συνεχόμενες κατά τους άξονες
 x, y, z

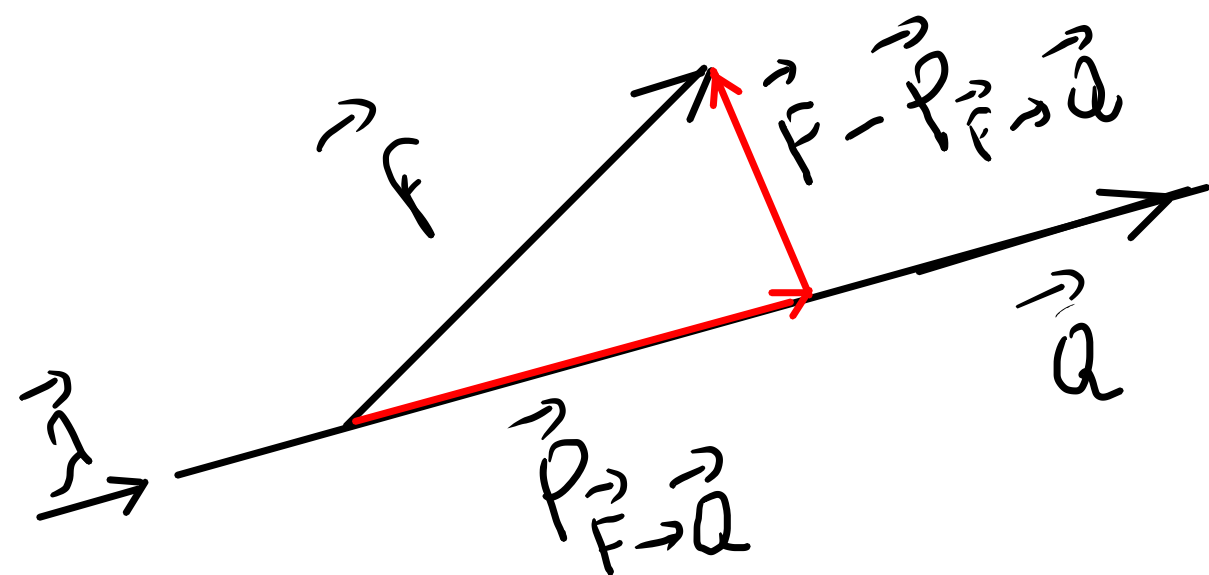
$$\vec{R} = \sum_{n=1}^2 \vec{F}_n \quad \text{συνεχόμενες δυνάμεις στο χώρο}$$

$$R_x = \sum_{n=1}^2 F_{nx} = F_{1x} + F_{2x}$$

$$R_y = \sum F_{ny}$$

$$R_z = \sum F_{nz}$$

Ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες



$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|}$$

$$\vec{F} = \underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda}}_{\substack{\text{προβολή} \\ \vec{P}_{\vec{F} \rightarrow \vec{Q}}}} + \underbrace{\left[\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} \right]}_{\substack{\text{κάθετο διάνυσμα} \\ \vec{F} - \vec{P}_{\vec{F} \rightarrow \vec{Q}}}}$$

Ροπή

Ροπή Σύνθεσης ως προς σημείο

$$\vec{F} : \langle F_x, F_y, F_z \rangle$$

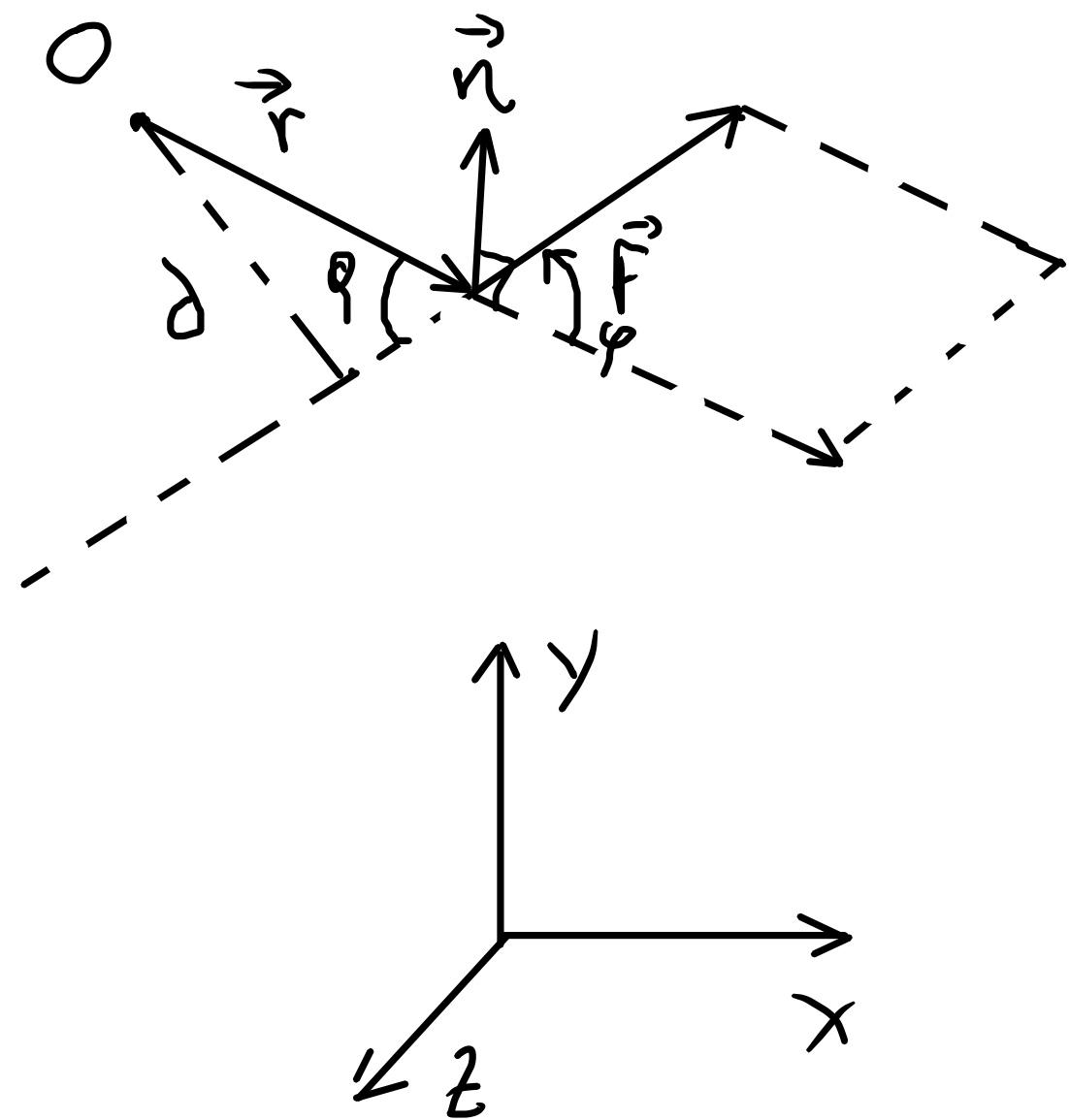
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= (|\vec{F}| \cdot d) \vec{n}$$

$$M_O = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \varphi = |F| d$$

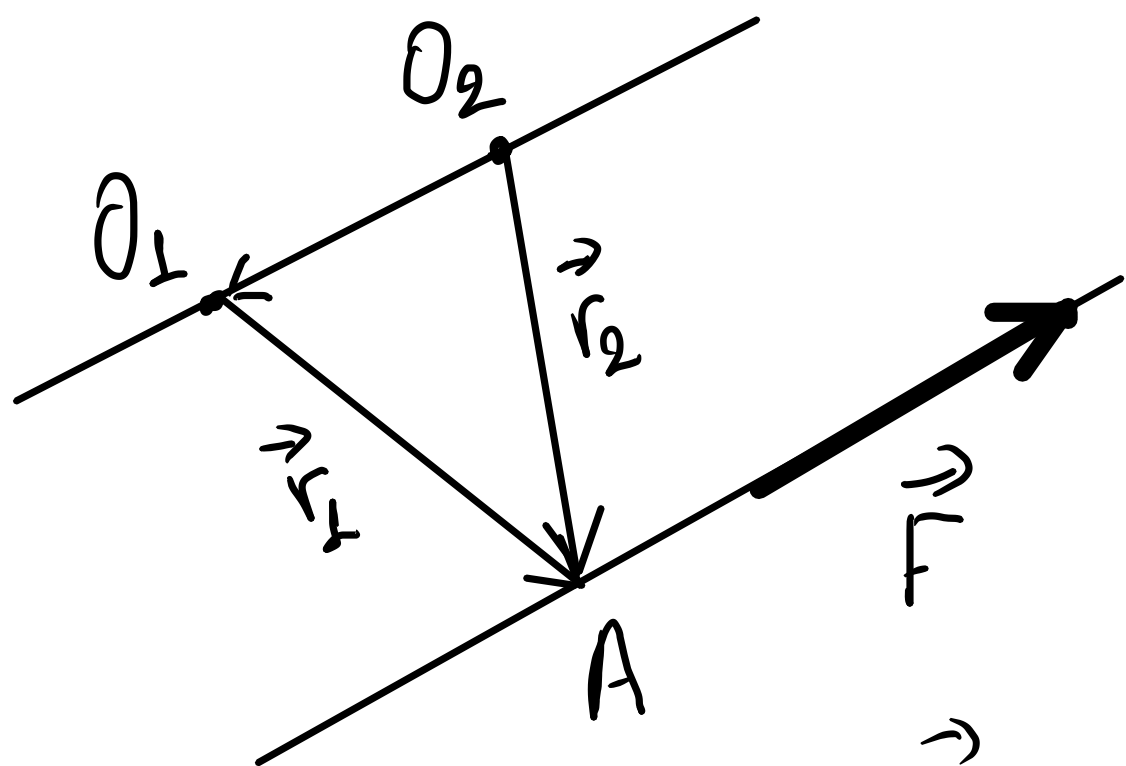
$\vec{M}_O = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{r} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \text{το σημείο } O \text{ να είναι σημείο}$
 $\text{πάνω στο φορέα της } \vec{F}$

φυσική σημασία ροπής:

Η ροπή παρέχει την μέση που έχει ένα βέλος σώμα να περιβραχτεί γύρω από ένα σταθερό σημείο O υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$



Ροπή ως προς σημείο ευθείας παράλληλης στο φορέα της δύναμης



$$\vec{M}_{O_1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}, \quad \vec{M}_{O_2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}$$

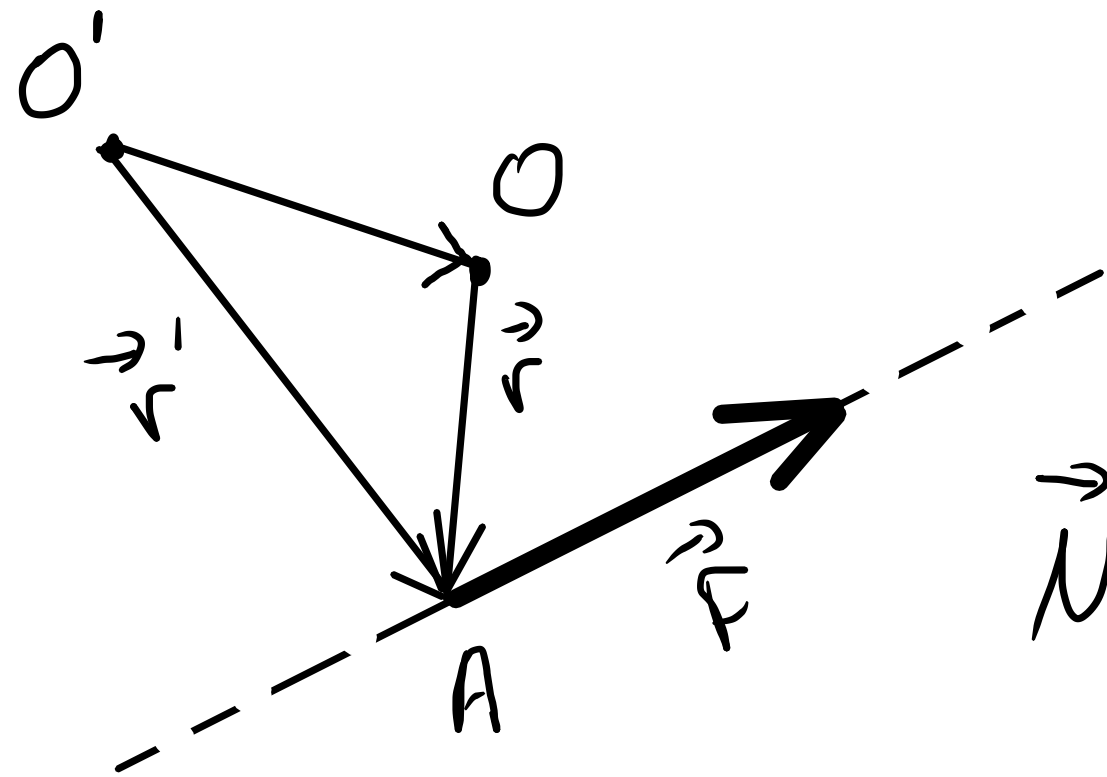
$$\vec{r}_2 = \vec{O_2 O_1} + \vec{r}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O_2} &= \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{O_2 O_1} + \vec{r}_1) \times \vec{F} = \\ &= \underbrace{\vec{O_2 O_1} \times \vec{F}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}}_{\vec{M}_{O_1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_{O_2}} \quad \text{!} \text{ γιατί !}$$

* Όλα τα σημεία ευθείας παράλληλης με το φορέα μιας δύναμης $\vec{F}$ δίνουν την ίδια ροπή

Ροπή δύναμης ως προς σημείο O' όταν είναι γνωστή η ροπή ως προς ένα σημείο O



$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F} = \\ &= \underbrace{\vec{O'O} \times \vec{F}}_{\neq \vec{0}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}_O} \end{aligned}$$

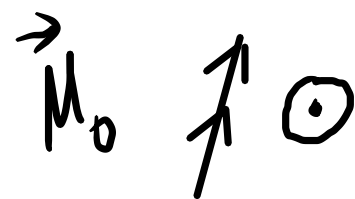
Σημείωση

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο O' είναι ίση με τη ροπή $\vec{M}_O$ ως να διασυνταχθεί αποτέλεσμα των δύο σημείων εξωτερικώς $\vec{F}$

μονάδες) Υπόμνηση ροπής

N.m

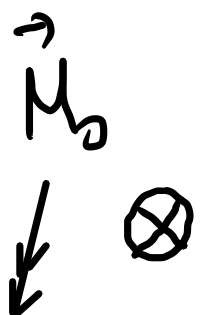
kN.m



$$M_O = F \cdot d$$

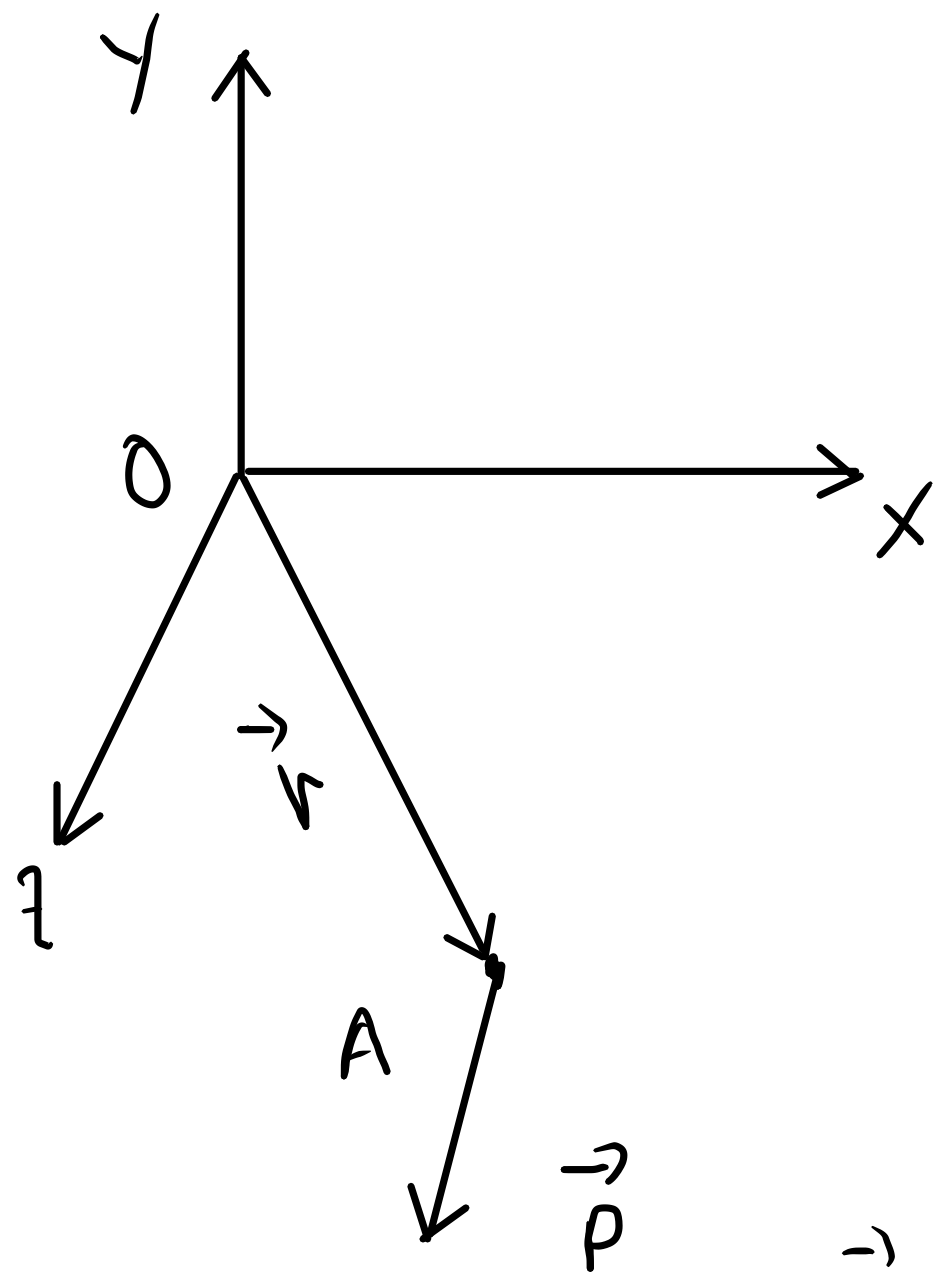


$$M_O = -F \cdot d$$



Παράδειγμα:

$\vec{P}(P_x, P_y, P_z)$: $P_x = 20 \text{ kN}$, $P_y = -25 \text{ kN}$, $P_z = 12 \text{ kN}$
η $\vec{P}$ δρα στο σημείο $A(4, -2, 3)$ σε m . Να βρεθεί η ροπή της δύναμης $\vec{P}$ ως προς το σημείο $O(0, 0, 0)$ αρχή των αξόνων.



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{r} = (x_A - x_O)\vec{i} + (y_A - y_O)\vec{j} + (z_A - z_O)\vec{k}$$

$$\vec{r} = (4 - 0)\vec{i} + (-2 - 0)\vec{j} + (3 - 0)\vec{k}$$

$$\vec{r} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k} = 20\vec{i} - 25\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{r} : \langle 4, -2, 3 \rangle, \quad \vec{P} : \langle 20, -25, 12 \rangle$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 3 \\ 20 & -25 & 12 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -25 & 12 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 20 & 12 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 20 & -25 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} (-24 + 75) - \vec{j} (48 - 60) + \vec{k} (-100 + 40) \\ &= 51\vec{i} + 12\vec{j} - 60\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_O: \langle 51, 12, -60 \rangle$$

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{51^2 + 12^2 + (-60)^2} = 79,66 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ροπή δύναμης ως προς $O(0,0,0)$
που αβτεεί και ορισμένη στο χώρο

$$\lambda_x = \frac{M_x}{|\vec{M}_O|} = \cos\theta_x$$

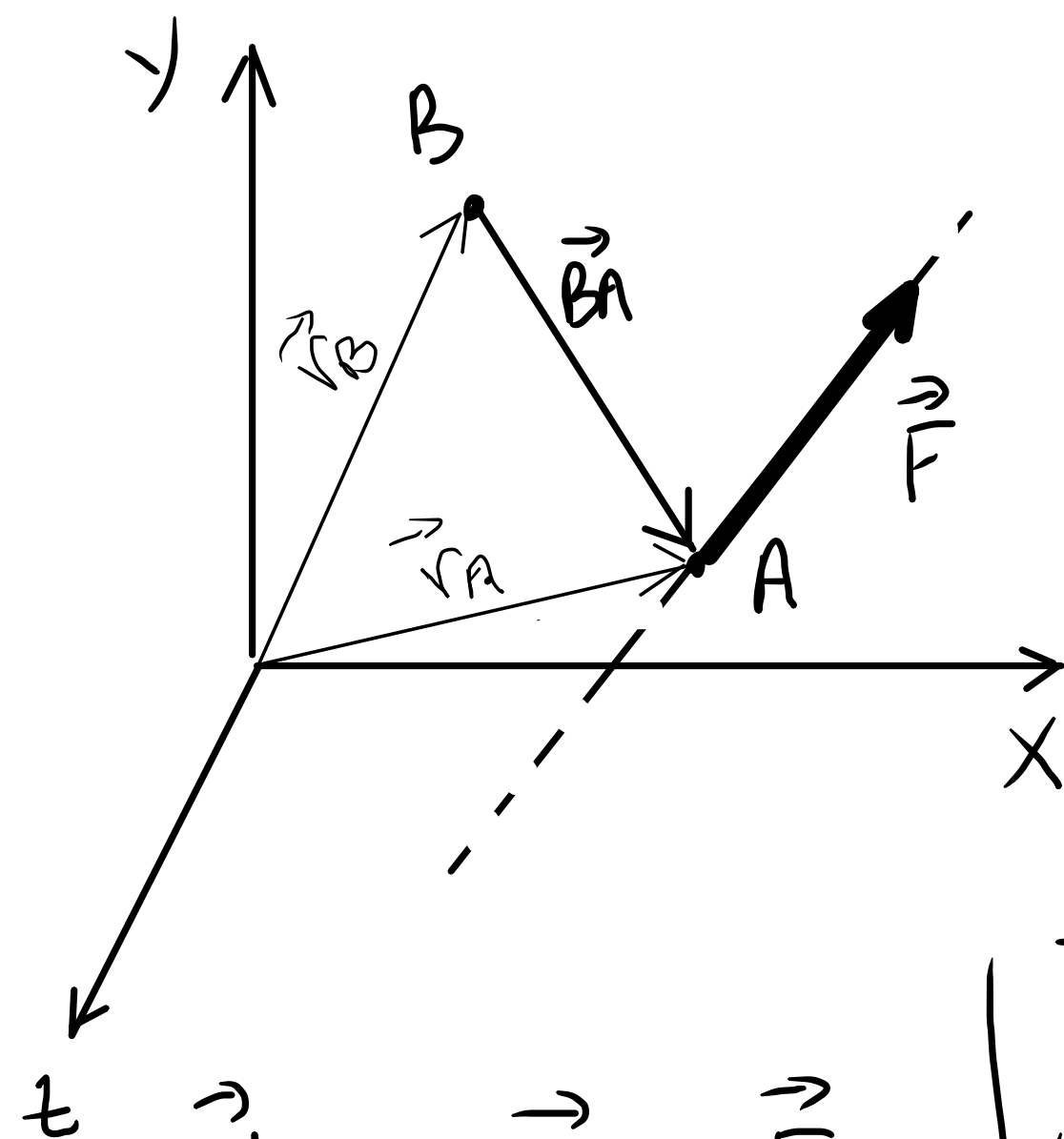
$$\lambda_y = \frac{M_y}{|\vec{M}_O|} = \cos\theta_y$$

$$\lambda_z = \frac{M_z}{|\vec{M}_O|} = \cos\theta_z$$

$$\vec{r}: \langle x, y, z \rangle, \vec{F}: \langle F_x, F_y, F_z \rangle$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underbrace{(yF_z - zF_y)}_{M_x} \vec{i} + \underbrace{(zF_x - xF_z)}_{M_y} \vec{j} + \underbrace{(xF_y - yF_x)}_{M_z} \vec{k}$$

$$\vec{M}_O: \langle M_x, M_y, M_z \rangle$$



Γενικευμένη ροπή μιας δύναμης που ασκείται
 σε τυχαίο σημείο A στο χώρο και
 υπολογίζουμε τη ροπή ως προς
 από τυχαίο σημείο B στο χώρο

$$\vec{M}_B = \vec{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

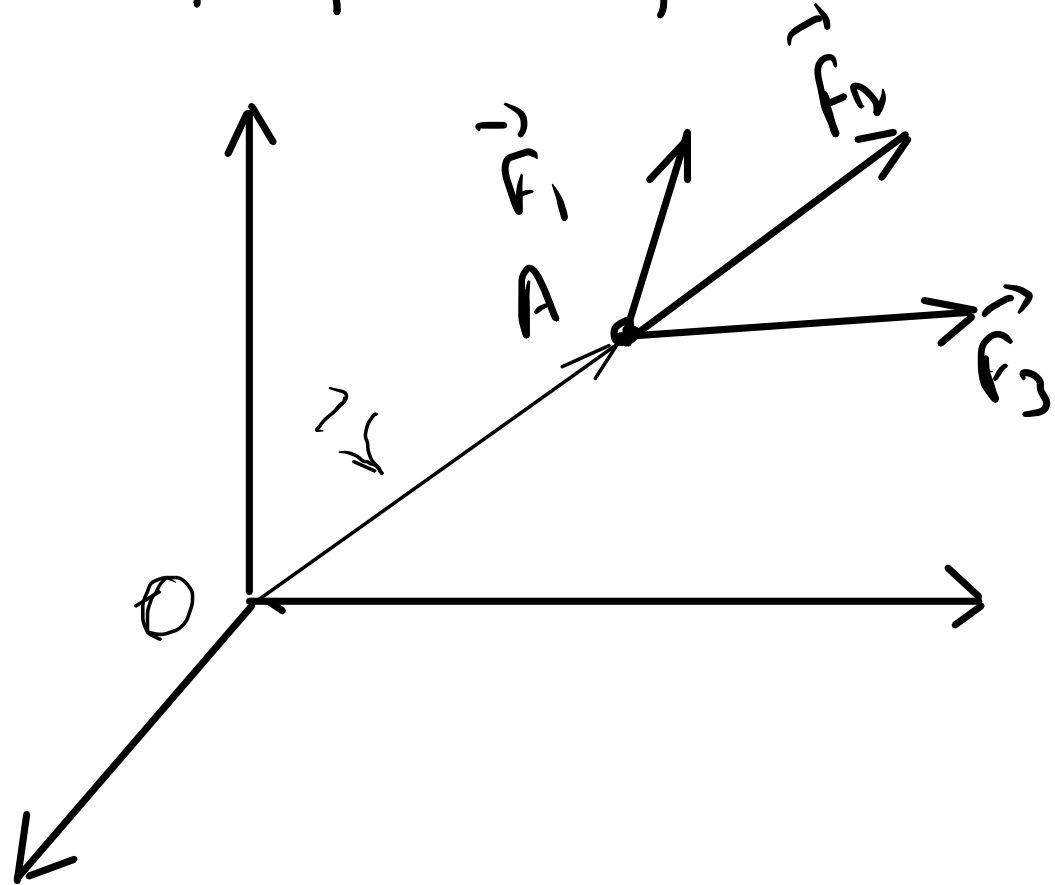
$$\vec{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$$

Θεώρημα Varignon

Av $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ συνισταμένη η δυνάμειων στο χώρο

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n$$

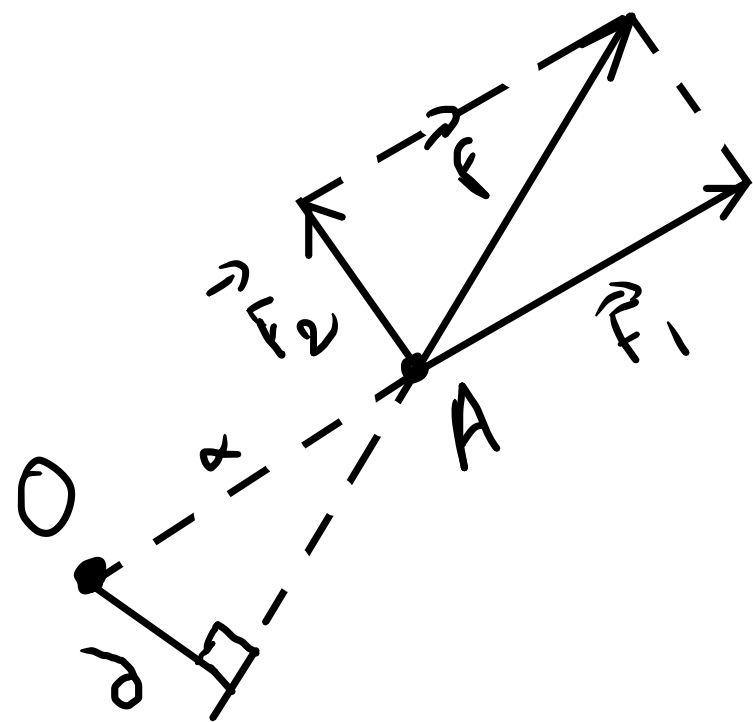
Η ποσότητα της συνισταμένης $\vec{R}$ ως προς κάποιο σημείο O ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ποσότητες των συνιστωσών της ως προς το ίδιο σημείο



$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \\ &= \vec{r} \times \vec{R} \end{aligned}$$

Ανάλυση του $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$$



$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{OA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) =$$

$$= \underbrace{\vec{OA} \times \vec{F}_1}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{OA} \times \vec{F}_2}_{\alpha \cdot F_2 \cdot \vec{n}}$$

$$|\vec{OA}| = \alpha$$

$$= d \cdot F$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot F_2 = d \cdot F$$

$$\Rightarrow d = \alpha \frac{F_2}{F}$$

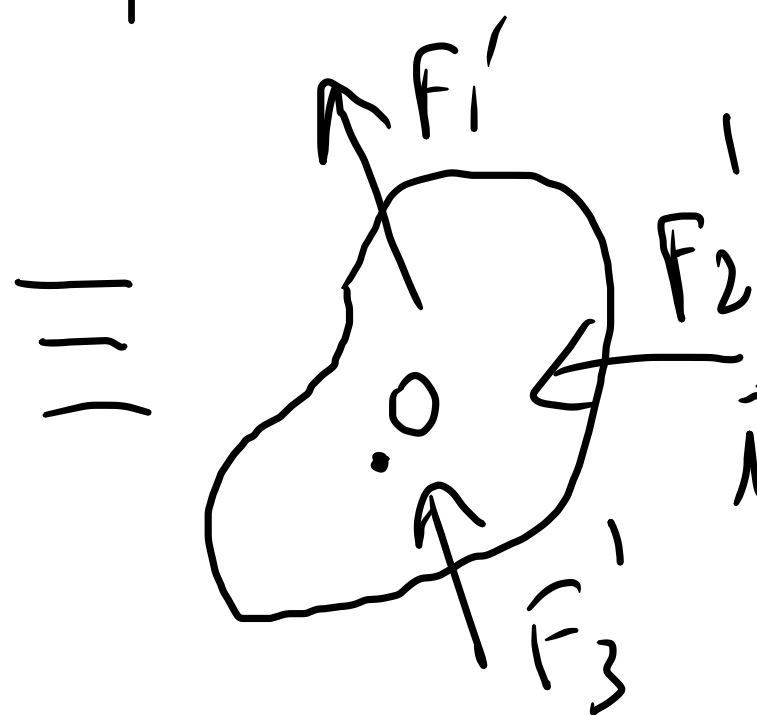
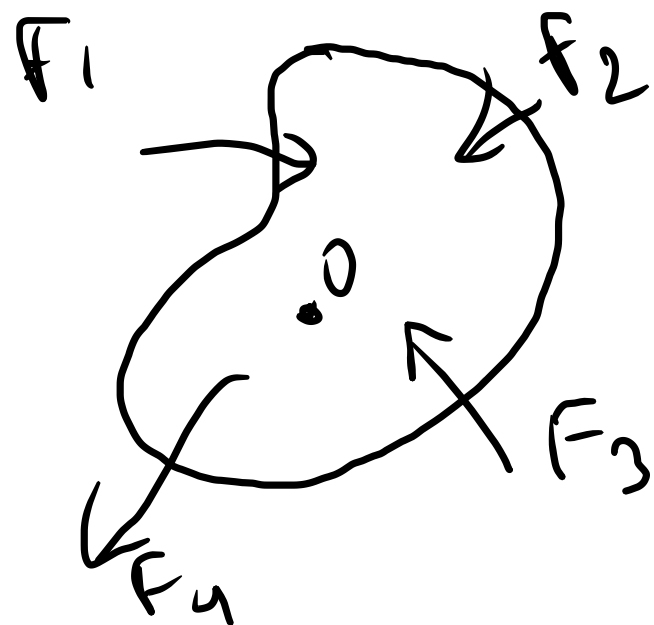
υπολογισμός κάθετης
απόστασης.

Ισοδυναμία δυνάμεων επί στερεού σώματος:

Δύο δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}'$ είναι ισοδυναμικές όταν έχουν την ίδια επίδραση στο κυνηματική κατάσταση του στερεού στο οποίο δρουν.

$\vec{F} = \vec{F}'$ ίσες δυνάμεις

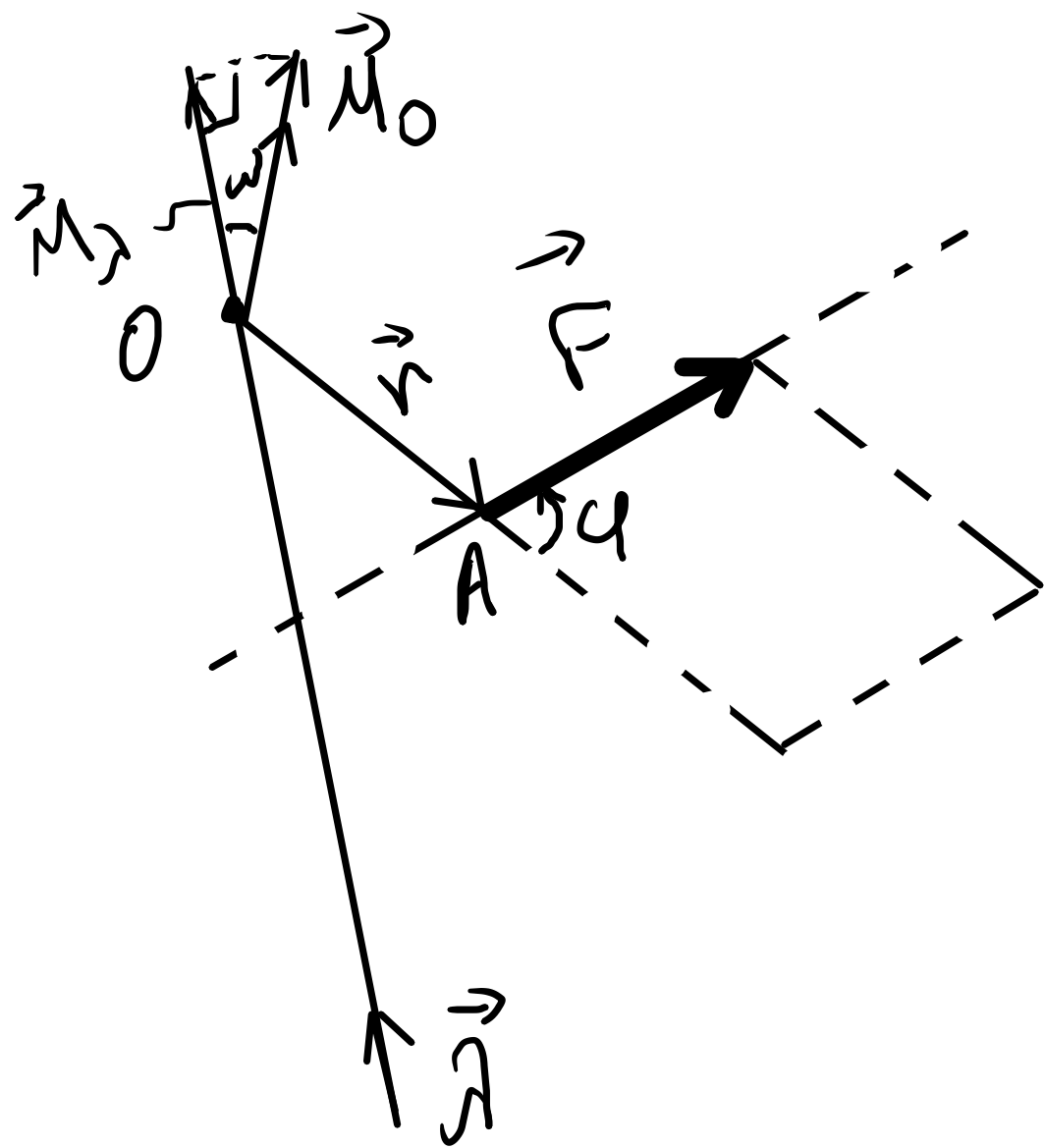
και $\vec{M}_O^F = \vec{M}_O^{F'}$ ίσες δυνάμεις ως προς δεδομένο σημείο O.



$$\sum F_i = R = R' = \sum F_j'$$
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{j=1}^3 \vec{r}_j' \times \vec{F}_j'$$

Ισοδυναμία συντηρητικών δυνάμεων

Ροπή δύναμης ως προς άξονα:



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_n = \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_n = M_n \cdot \vec{n} = \text{Proj}_{\vec{n}} \vec{M}_O$$

Το M_n είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του κέντρου O πάνω στον άξονα.

Η ροπή M_n είναι η προβολή της $\vec{M}_O$ πάνω στον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$.

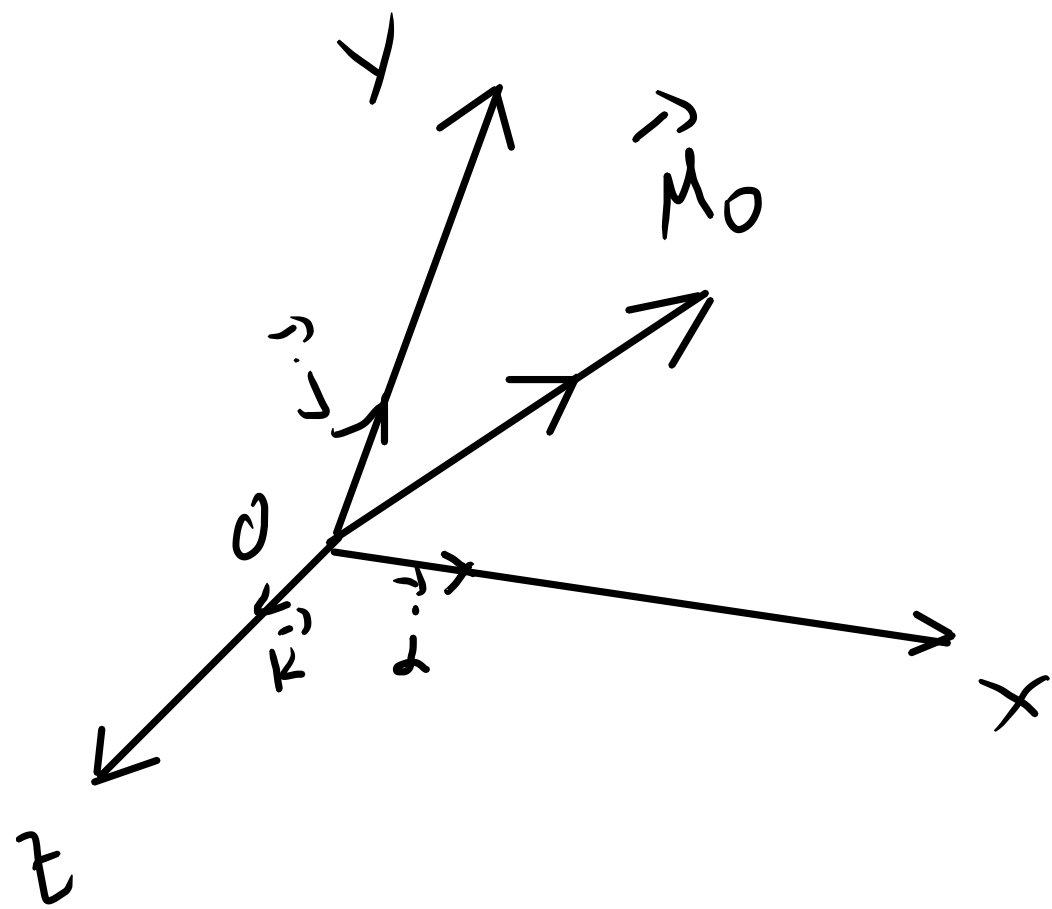
Πότε $M_n = 0$? Ισχύει όταν $\vec{n}, \vec{r}, \vec{F}$ είναι συνεπίπεδα

$$M_n = |\vec{n}| |\vec{r} \times \vec{F}| \cos \omega \quad \text{εάν } \omega = 90^\circ \Rightarrow M_n = 0$$

Ερμηνεία των M_x, M_y, M_z :

Ανάλογα με τη δύναμη $\vec{F} : \langle F_x, F_y, F_z \rangle$, $\vec{M} : \langle M_x, M_y, M_z \rangle$

Αντίστοιχα με τις δυνάμεις που δίνουν να μετακινήσω το σώμα
ως διευθύνσεις των αξόνων Ox, Oy, Oz οι M_x, M_y, M_z δίνουν
να το περιστρέψω ως αντίστοιχες αξίες.



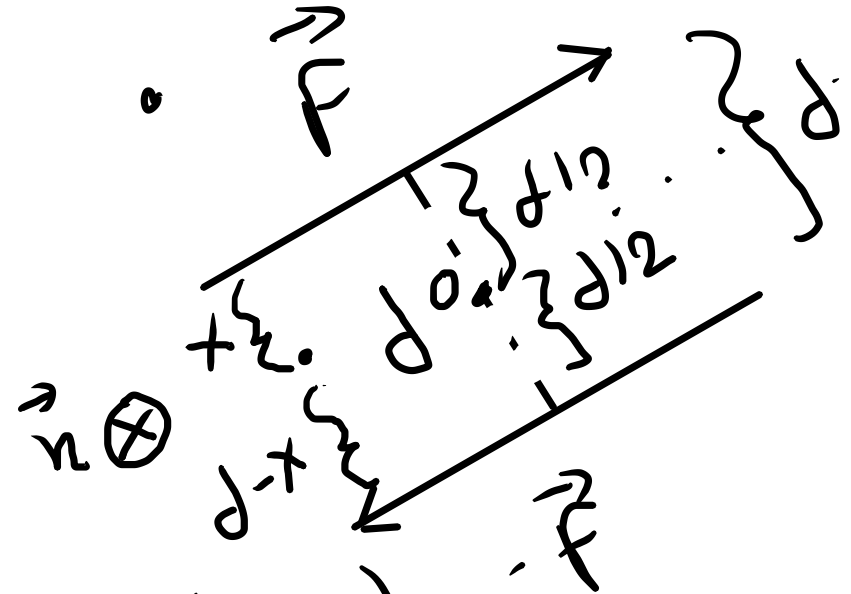
$$M_x = \vec{i} \cdot \vec{M}_0$$

$$M_y = \vec{j} \cdot \vec{M}_0$$

$$M_z = \vec{k} \cdot \vec{M}_0$$

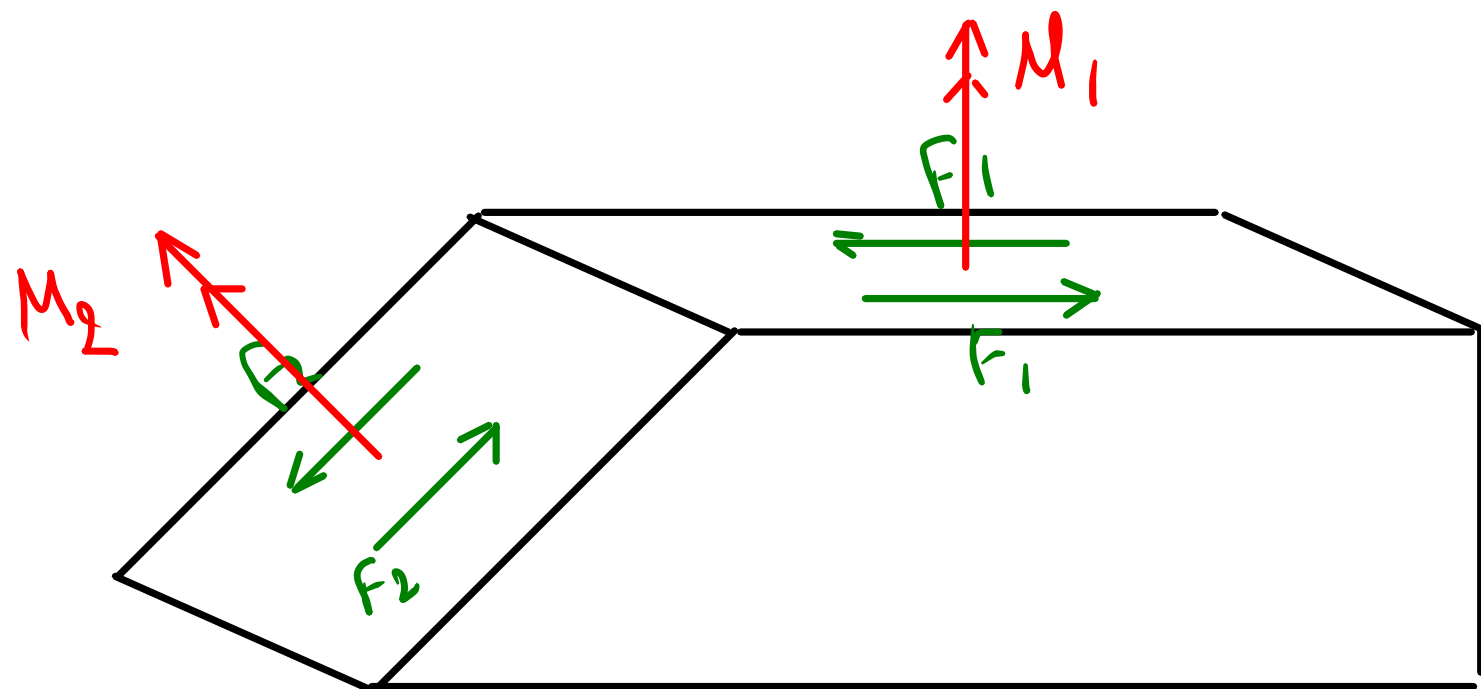
Ζεύγη δυνάμεων - Ισοδύναμα ζεύγη

$$(\vec{F}, -\vec{F})$$



$$M = F \cdot x + F(d-x) = Fd$$

Αθροισμα ζευγών:

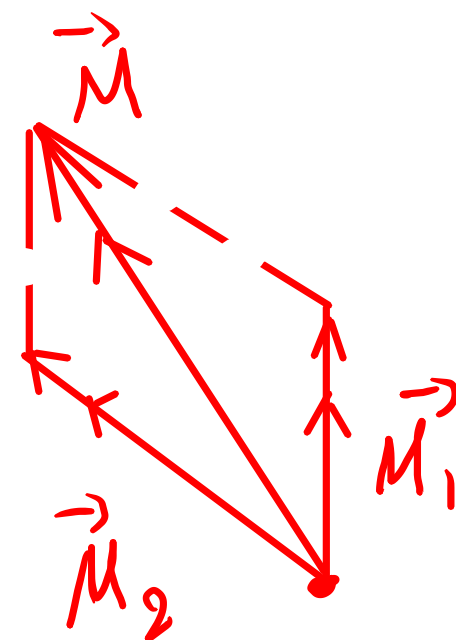


Το ζεύγος αντικαθίσταται ισοδύναμα
από τη ροπή του $M = F \cdot \frac{d}{2} + F \cdot \frac{d}{2}$

$$\Rightarrow M = F \cdot d$$

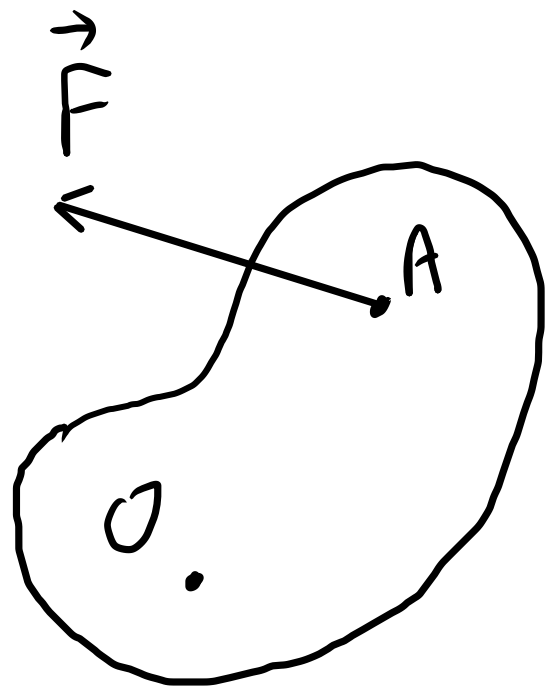
$$\vec{M} = (Fd) \vec{n}$$

$$\vec{n} \perp (\vec{F}, -\vec{F}), |\vec{n}| = 1$$

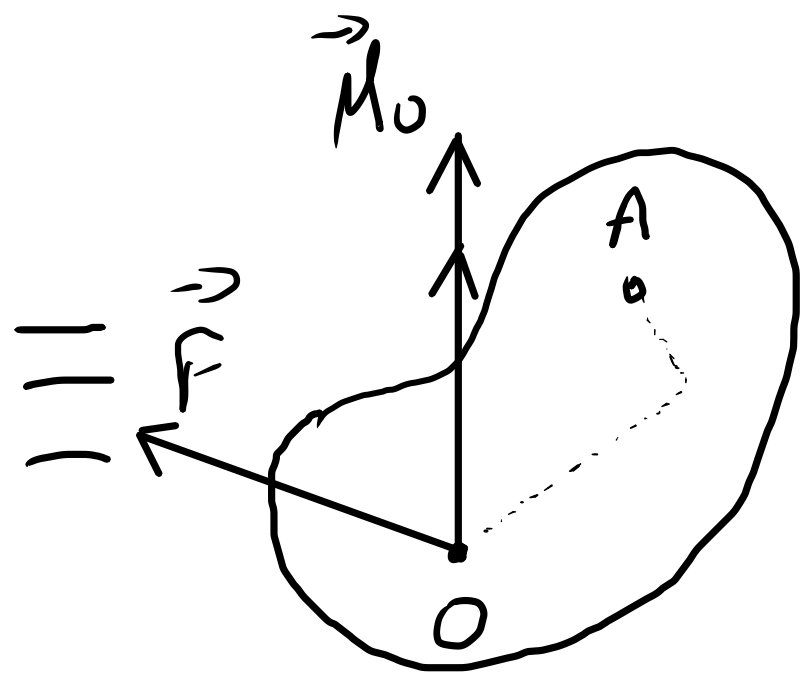


$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Παράλληλη μεταφορά δύναμης από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο O (αναγωγή της $\vec{F}$ που δρα στο A ως προς το O)

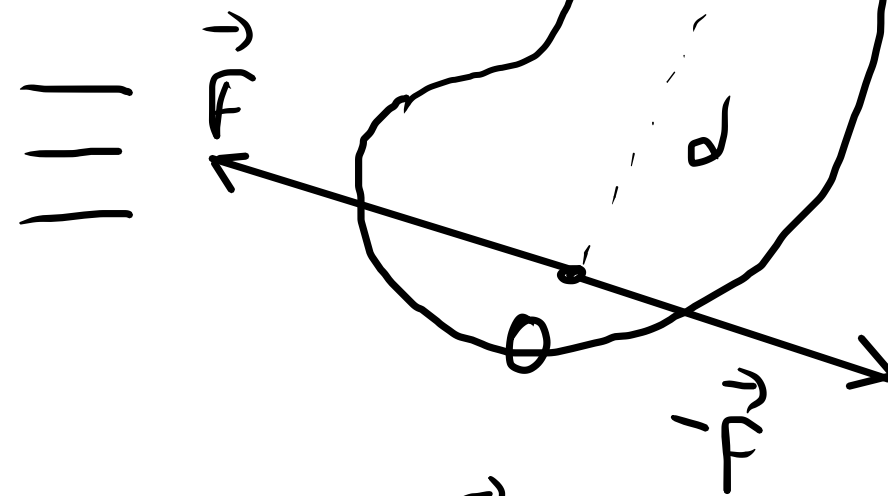


1ο σύστημα



2ο σύστημα

$\vec{M}_O$: ροπή μεταφοράς



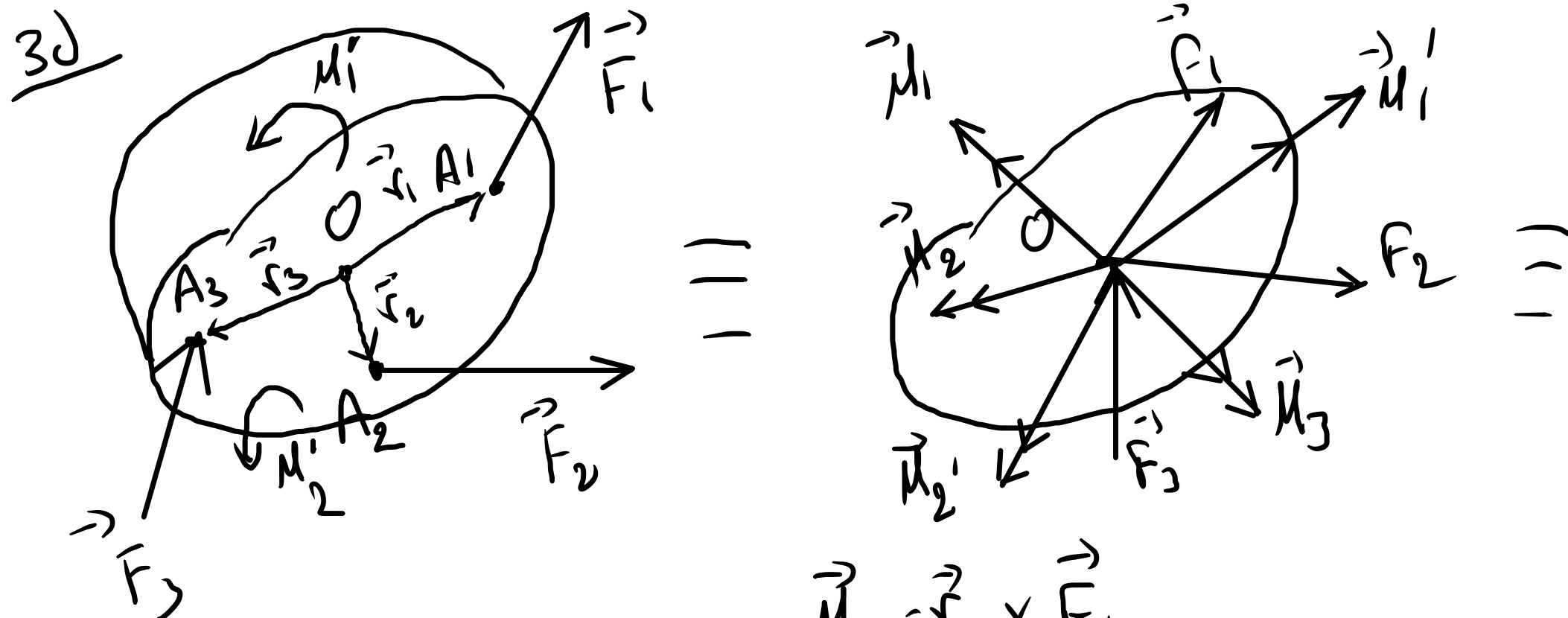
$$\vec{M}_O = (Fd) \vec{n}, \quad \vec{n} \perp (\vec{F}, -\vec{F})$$

Αντικαθιστών το ζεύγος δυνάμεων $(\vec{F}, -\vec{F})$ με τη ροπή $\vec{M}_O$

Μπορώ από το 2ο σύστημα να πιάω στο 2ο υπολογίζοντας την από-
σταση d οίτου πρέπει να μεταφέρω παράλληλα τη δύναμη $\vec{F}$

$$d = \frac{M_O}{F}$$

Αναγωγές συστημάτων δυνάμεων και ροπών



σύνολο δυνάμεων
(όχι συνεπίπεδες)

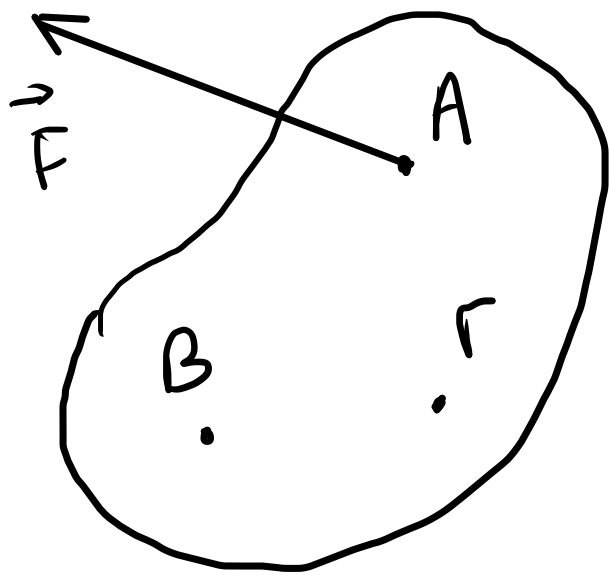
$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ \vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ \vec{M}_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3\end{aligned}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^K \vec{M}'_j$$

αθροισμα
συστημάτων ροπών

Αναγωγή δύναμης ως προς δύο σημεία



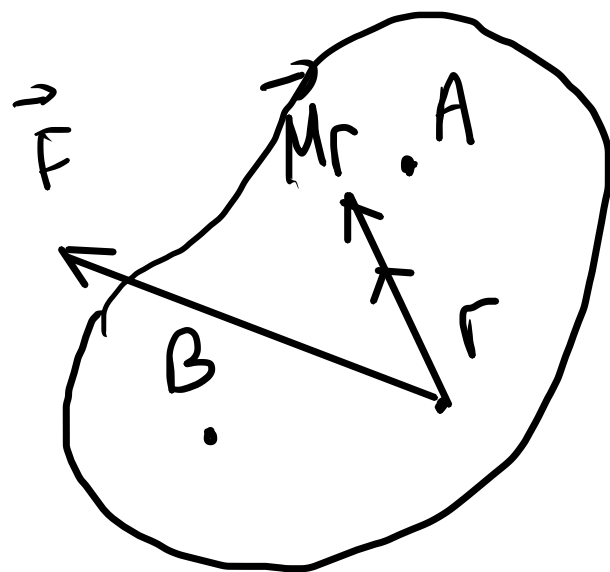
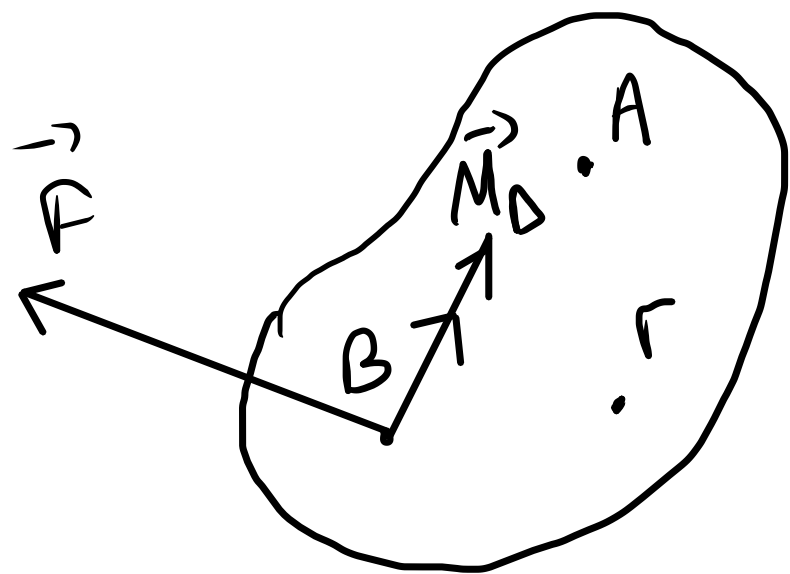
$$\vec{M}_B = \vec{BA} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_r = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{BA}$$

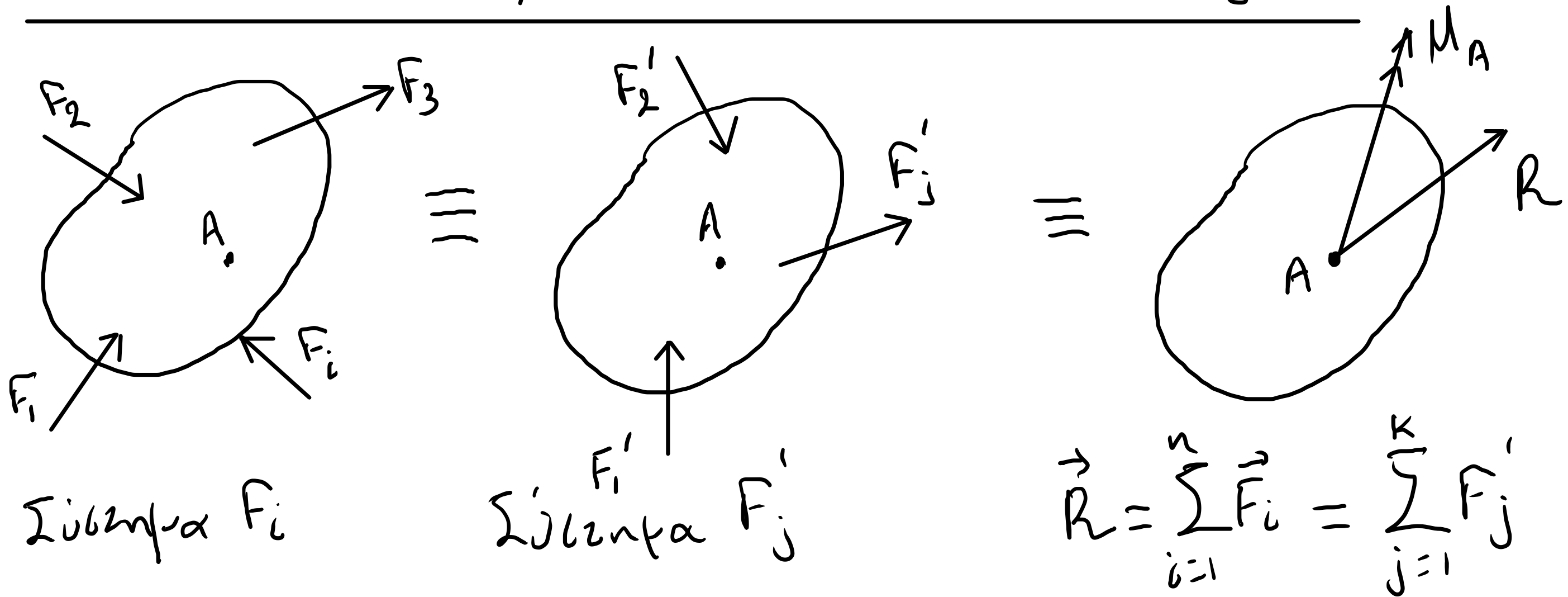
$$\Rightarrow \vec{M}_r = (\vec{r}_B + \vec{BA}) \times \vec{F} = \vec{r}_B \times \vec{F} + \underbrace{\vec{BA} \times \vec{F}}_{\vec{M}_B}$$

$$\vec{M}_r = \vec{M}_B + \vec{r}_B \times \vec{F}$$

Η $\vec{F}$ παραμένει αναλλοίωτη, διαφορετική ροπή ανάλογα με το σημείο αναγωγής



Ισοδυναμία συστημάτων δυνάμεων F_i και F_j'

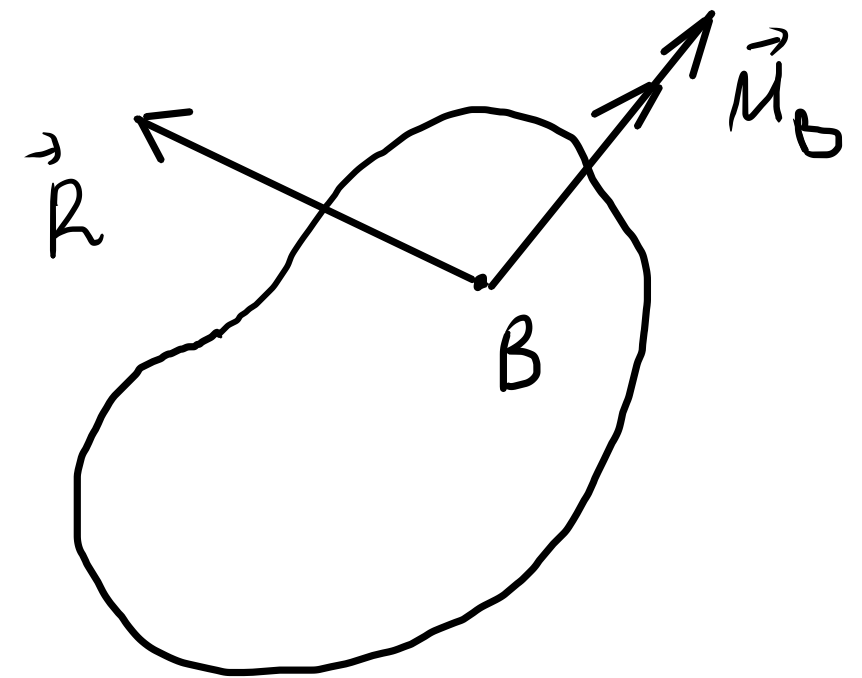
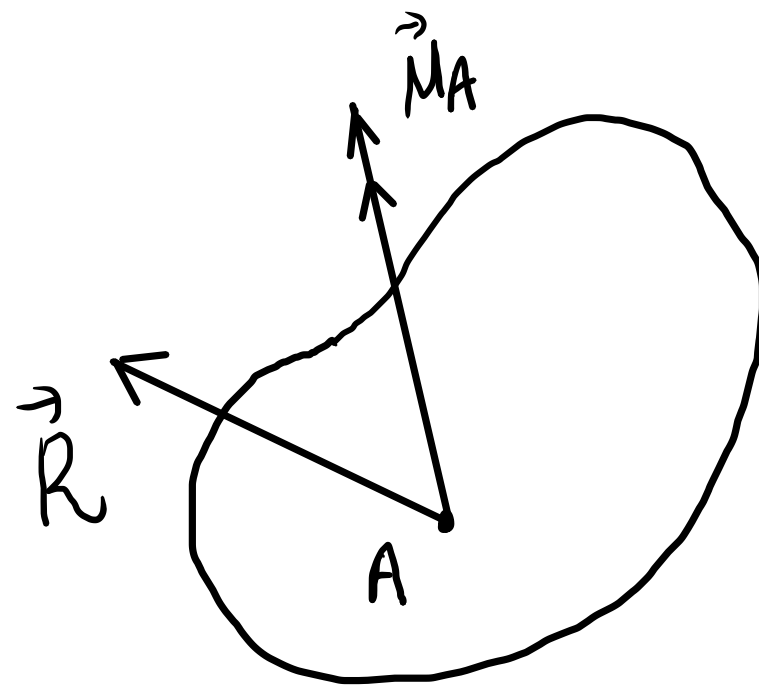
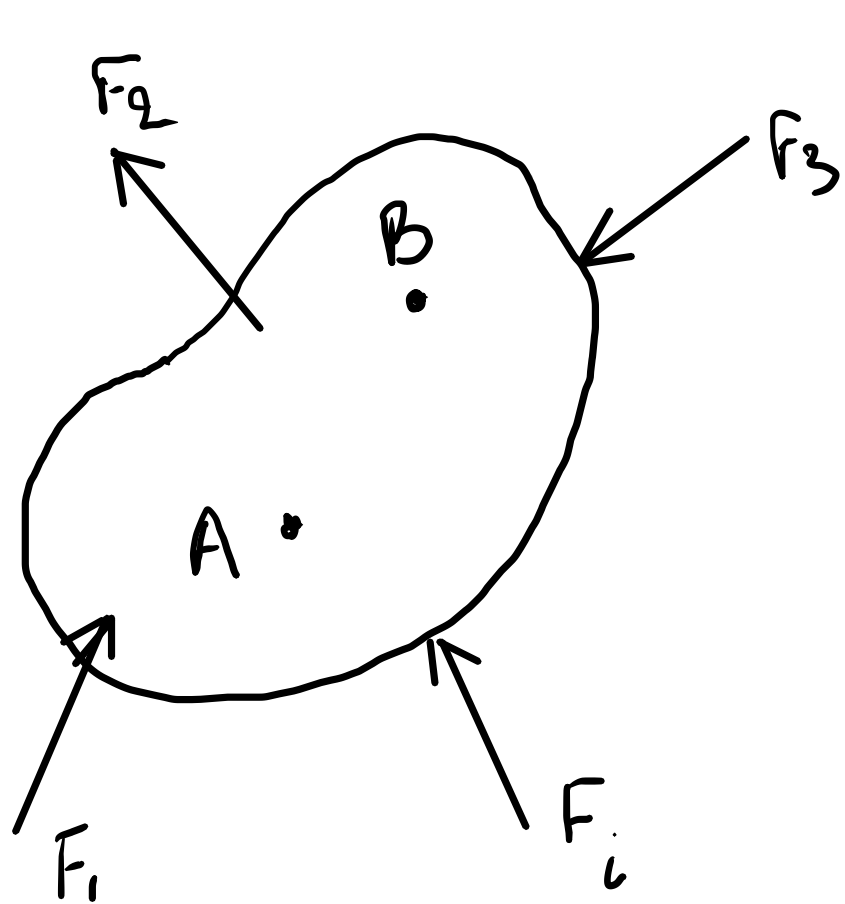


και

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{j=1}^K (\vec{r}_j' \times \vec{F}_j')$$

$n \neq K$
 Γενικά και περίπλοκα

Μετατόπιση συστήματος από το σημείο A στο B



$\vec{R}$: αφ'ελαβ'ηση

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^n (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i)$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \times \vec{R}$$

Επομένως δεν χρειάζεται να γίνουν οι υπολογισμοί $\vec{r}'_i \times \vec{F}_i$ εάν είναι γνωστή η ροπή στο A, $\vec{M}_A$.