

Διανυσματικός Πολλαπλός:

Διάνυσμα:

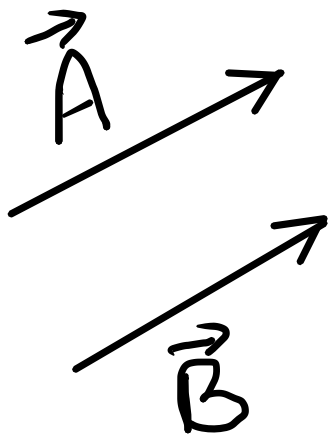
— — — — — φοράς διανύσματος



$\vec{A}, \mathbf{A}, A$
μέτρο $|\mathbf{A}|$ ή $|A|$

μέτρο, διεύθυνση, φορά
κατεύθυνση

Διανύσματα ίσα:

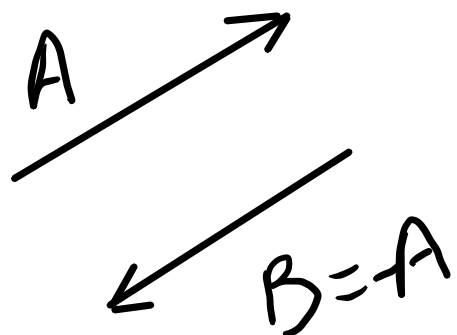


$|A| = |B|$, παράλληλοι φορείς, ίδιες φορές

$$A = B \text{ ή } B = A$$

Διανύσματα αντιστρέφονται:

$$(A = -B \text{ ή } B = -A) \Leftrightarrow (A \updownarrow B \text{ και } |A| = |B|)$$



ίδιο μέτρο και διεύθυνση, αντιστρέφει φορά

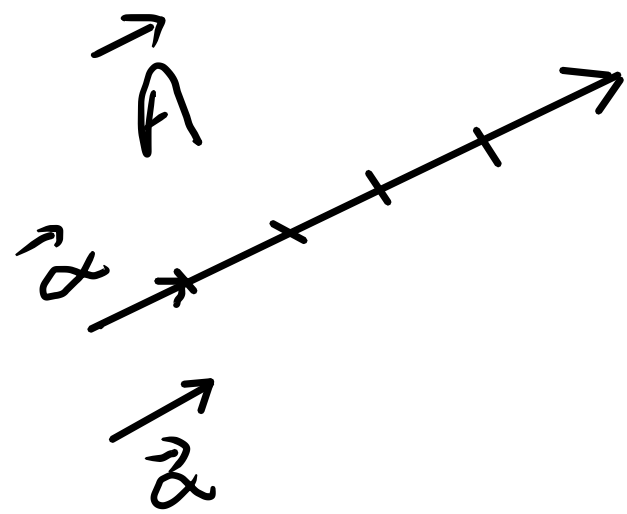
Μηδενικό διάνυσμα:

Αν $\vec{A} = \vec{B}$ τότε $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$, $|\vec{0}| = 0$, απροσδιόριστο διεύθυνση

Μοναδιαίο διάνυσμα:

Το μέτρο του είναι μονάδα.

Το διάνυσμα $\vec{A}$ έχει μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a}$, $|\vec{a}| = 1$

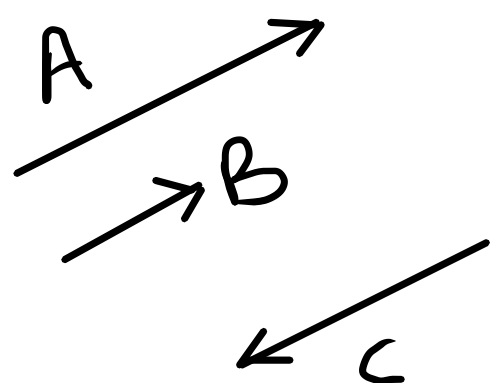


$$\vec{A} = n \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Εάν $|\vec{A}| = 5$ τότε $n = 5$

Διανύσματα παράλληλα:

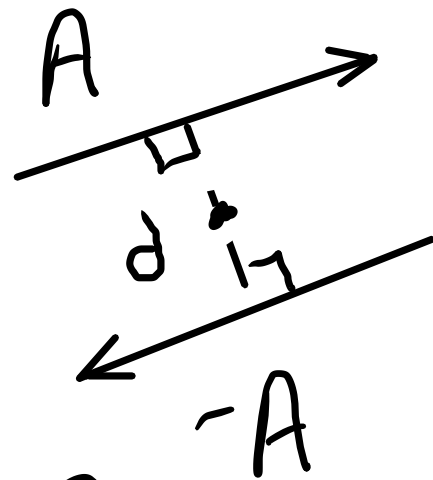


παράλληλα: ίδιες φορές (παράλληλοι φορές)

αντιπαράλληλα: αντίθετες φορές (παράλληλοι φορές)

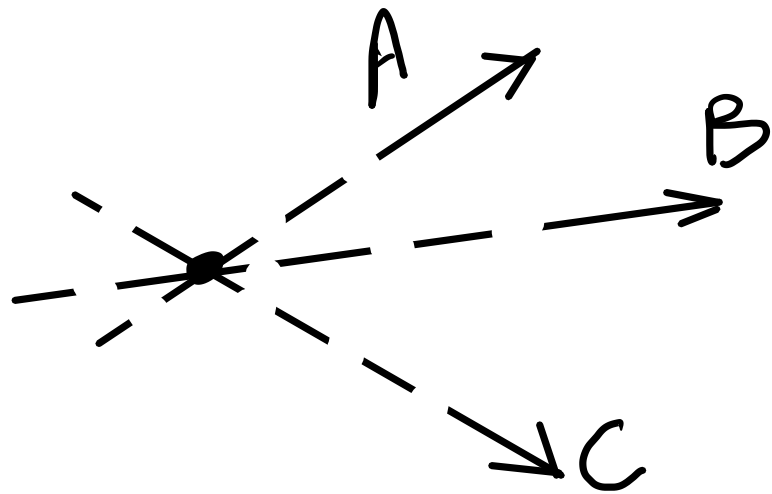
Ζεύγος Διανυσμάτων:

$(A, -A)$



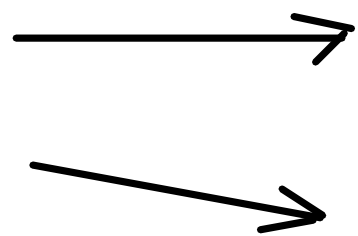
Ίσα μέτρα, αντισπάρηληλα, $d \neq 0$

Συερόχοντα Διανύσματα:



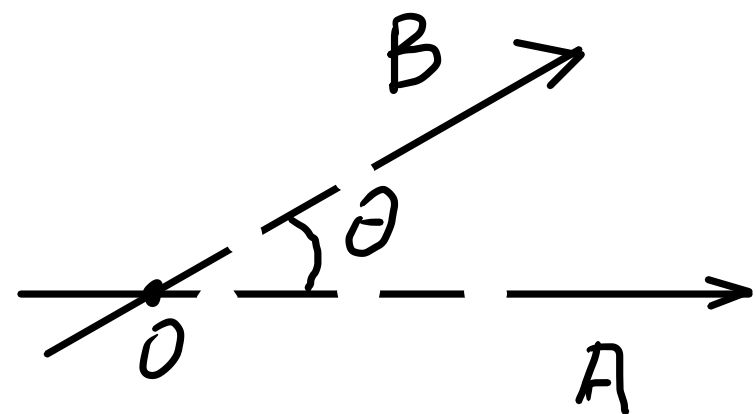
Οι φορείς διέρχονται από ένα και το αυτό σημείο

Συνεπίπεδα Διανύσματα:



Οι φορείς τους πρέπει να περιέχονται σε ένα και το αυτό επίπεδο.

Γωνία δύο διανυσμάτων:

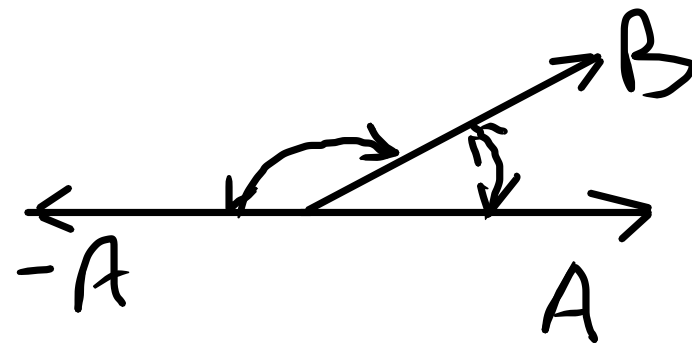


$$(\hat{A}, \hat{B}) : \theta = \hat{A} \hat{O} B, 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{Εάν } A \uparrow \uparrow B \Leftrightarrow \theta = 0^\circ$$

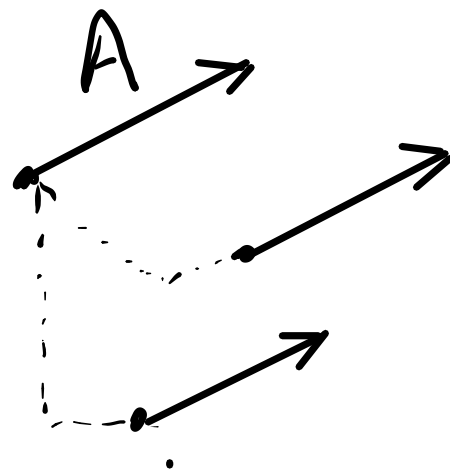
$$A \uparrow \downarrow B \Leftrightarrow \theta = \pi$$

$$(\hat{A}, \hat{B}) + (-\hat{A}, \hat{B}) = \pi$$



Διάκριση διανυσμάτων:

• Ελεύθερο διάνυσμα



• Ολοθάινον διάνυσμα

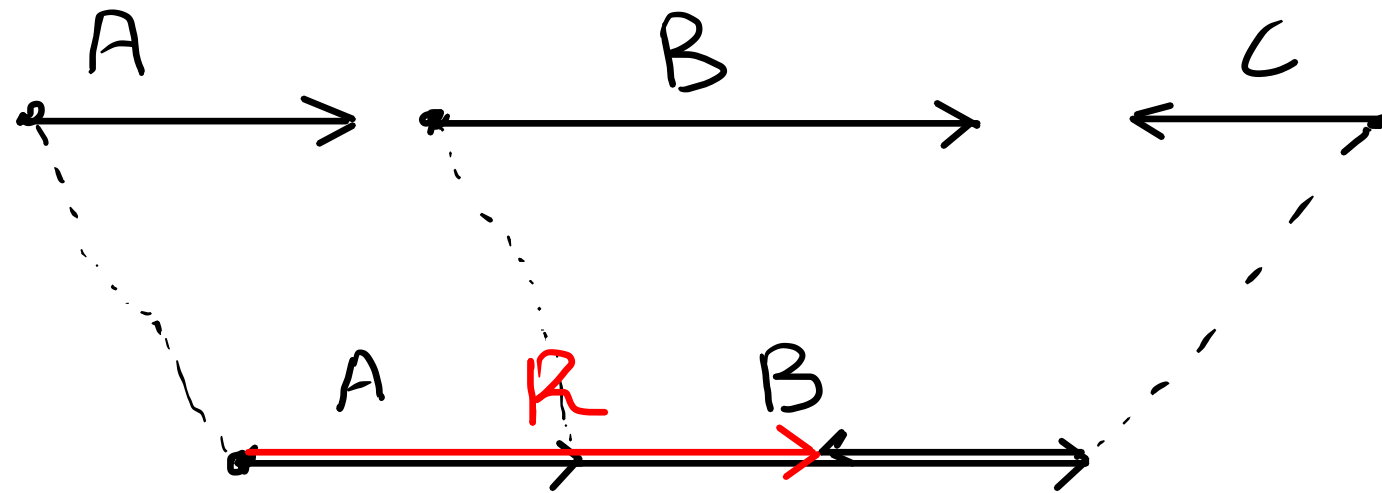


• Εφαρμοζό διάνυσμα: προκαθορισμένο σημείο εφαρμογής



Αλγεβρα διανυσμάτων:

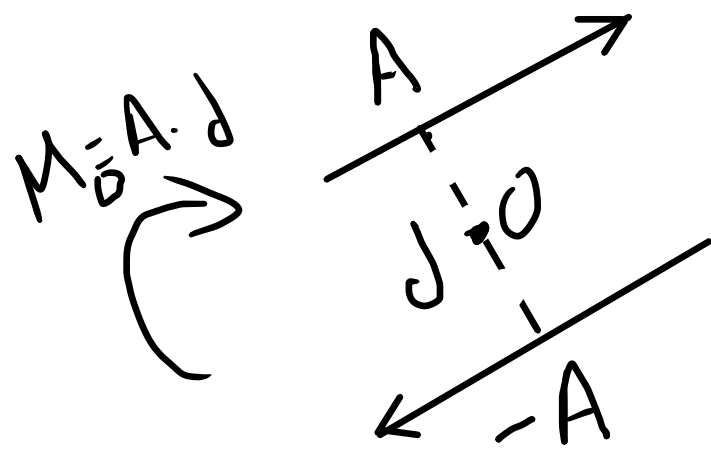
Συνισταμένη διανυσμάτων (R : Result)



$$R = A + B + (-C) = A + B - C$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

Συνισταμένη ζεύγους διανυσμάτων ($A, -A$)

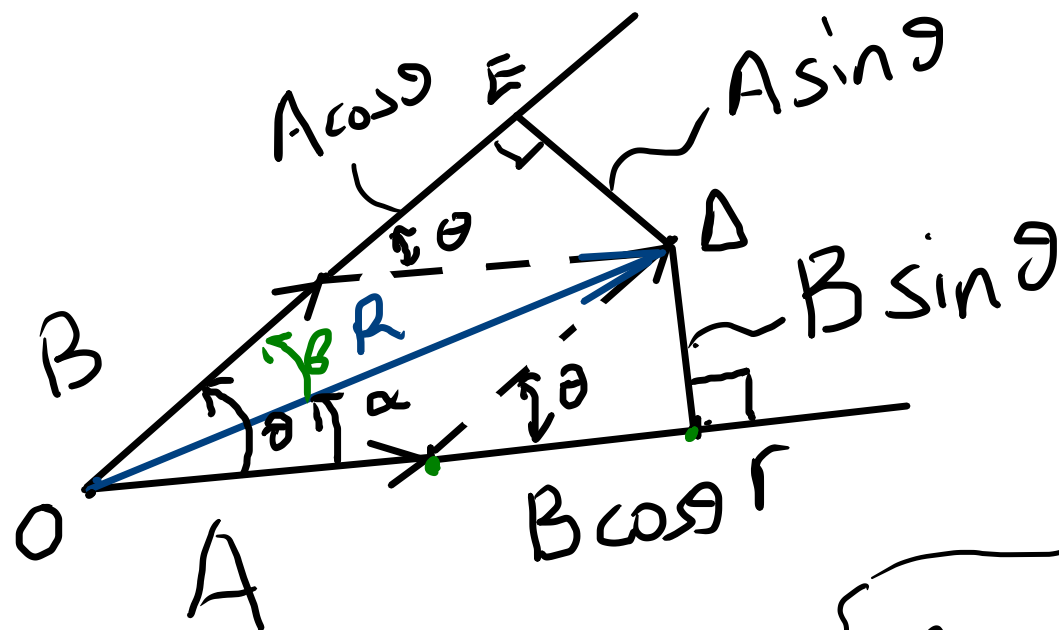
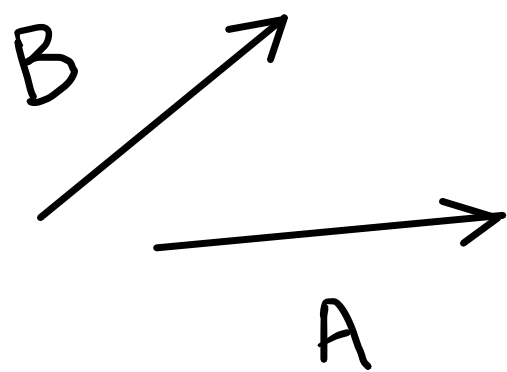


$$R = A + (-A) = 0$$

$$\sum M \neq 0$$

$$A \cdot \frac{d}{2} + A \cdot \frac{d}{2} = 2A \frac{d}{2} = A \cdot d$$

Κανόνας Παραλληλογράμμου:



$$||R|| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$\begin{aligned} ||R||^2 &= (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2 \\ &= A^2 + 2AB\cos\theta + B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta \\ &= A^2 + 2AB\cos\theta + B^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_1) \end{aligned}$$

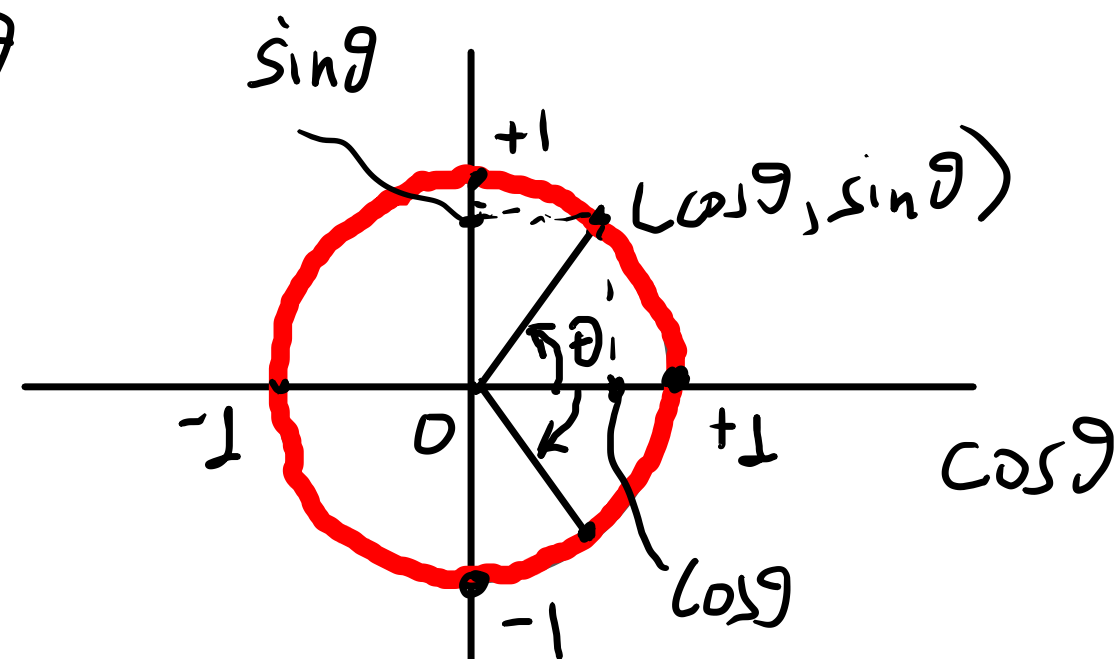
$$\Rightarrow ||R|| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$\sin\alpha = \frac{B\sin\theta}{R}, \quad \tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{A\sin\theta}{R}$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

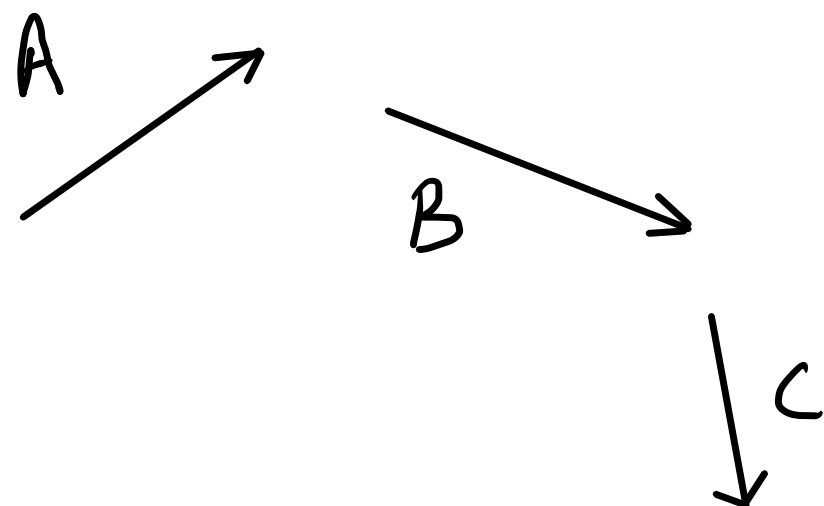
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$



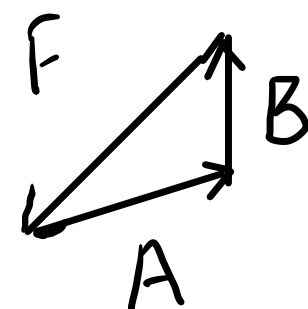
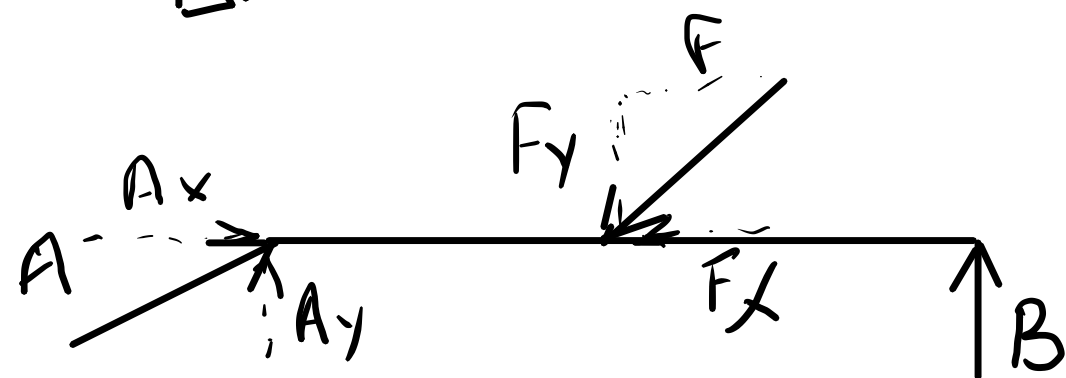
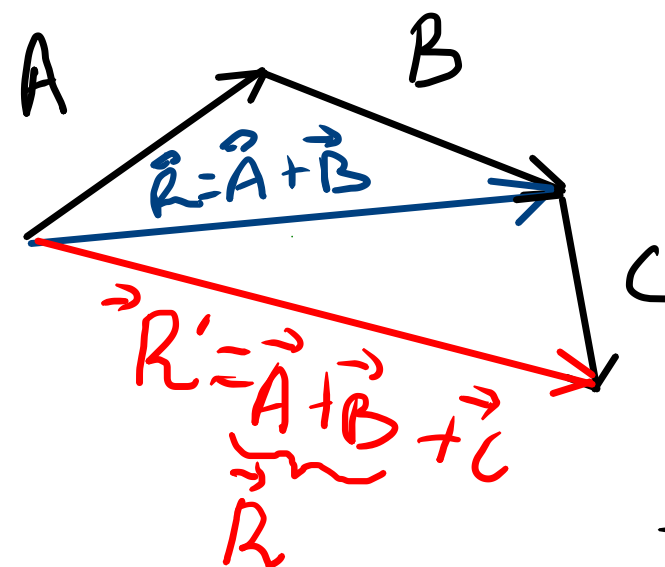
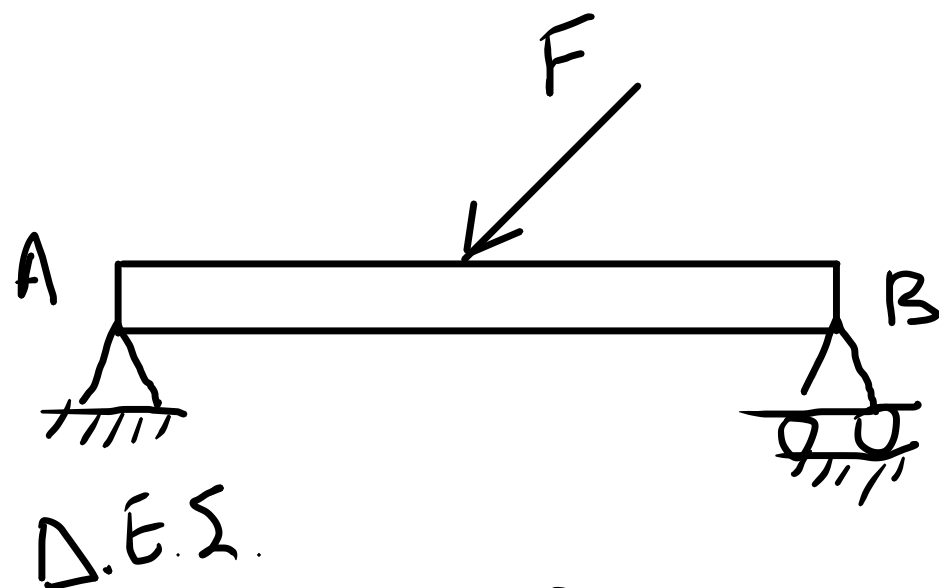
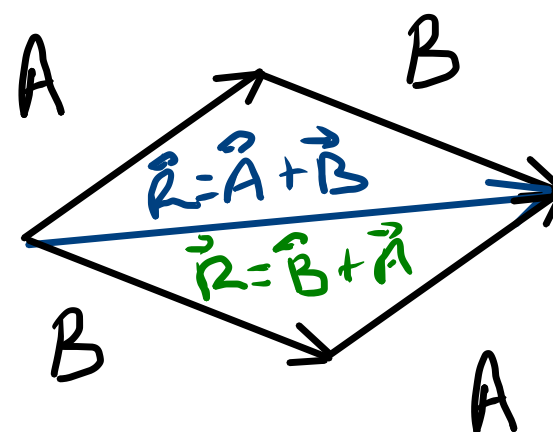
$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \\ x^2 + y^2 &= 1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(-\theta) \\ \sin\theta &= -\sin(-\theta) \end{aligned}$$

Δυναμοζεύγυνο ή δυναμοπολύνιο



$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$$

αυ βγαίνει ο φερδων
βερρονει

$$\begin{cases} \rightarrow \sum F_x = 0 \\ \uparrow \sum F_y = 0 \\ \curvearrowright \sum M_A = 0 \end{cases}$$

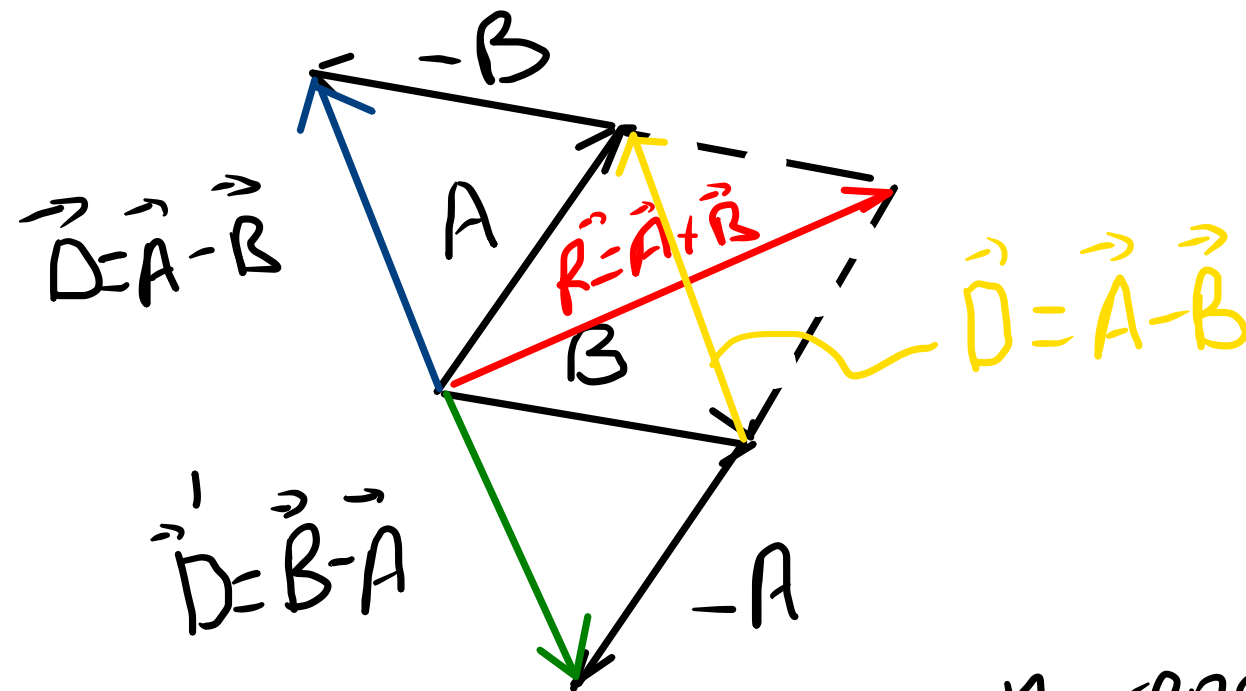
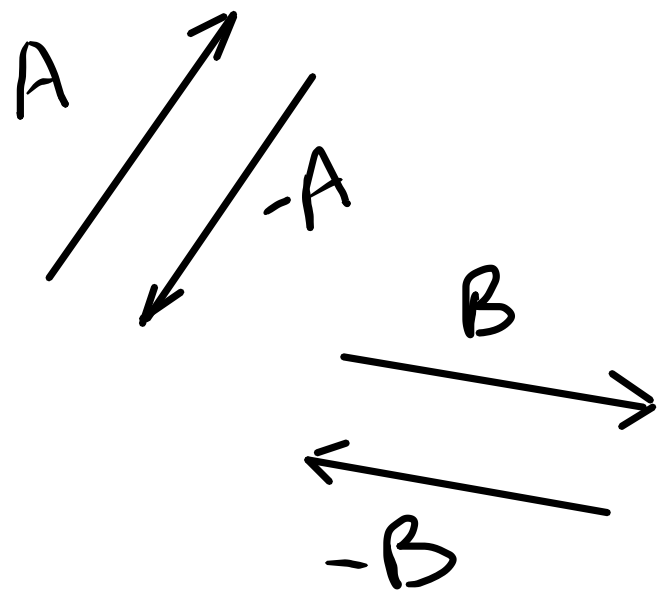
Αφαίρεση ή διαφορά διανυσμάτων

$$\vec{A} - \vec{B}, D = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad \vec{B}$$

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

$$\vec{D} \neq \vec{D}'$$

αντίθετα διανύσματα



Τριγωνική ανισότητα:

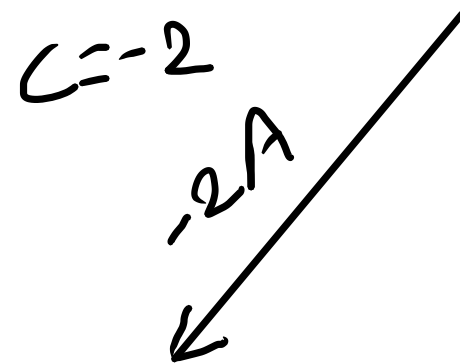
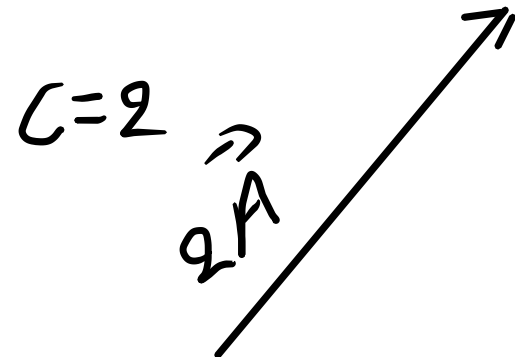
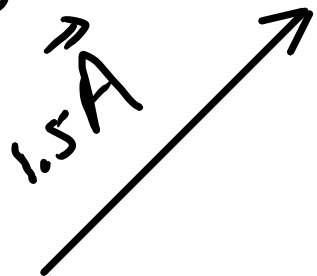
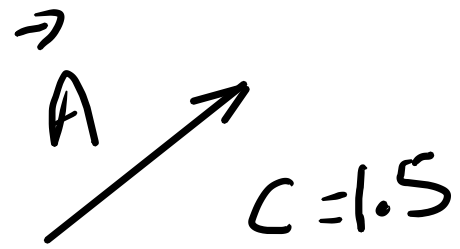
$$||\vec{A}| - |\vec{B}|| < |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| < |\vec{A}| + |\vec{B}|$$

η φορά του $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$
Είναι από το τέλος του $\vec{B}$
προς το τέλος του $\vec{A}$
 $\vec{D}' = \vec{B} - \vec{A}$

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό:

$c\vec{A}$

c : βαθμωτό $\in \mathbb{R}$
 $\vec{A}$: διάνυσμα



Εάν $c=0 \Rightarrow c\vec{A} = \vec{0}$

Ιδιότητες διανυσματικής άλγεβρας:

Αν $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ διανύσματα και c, d βαθμωτά με μέτρο τότε ισχύουν:

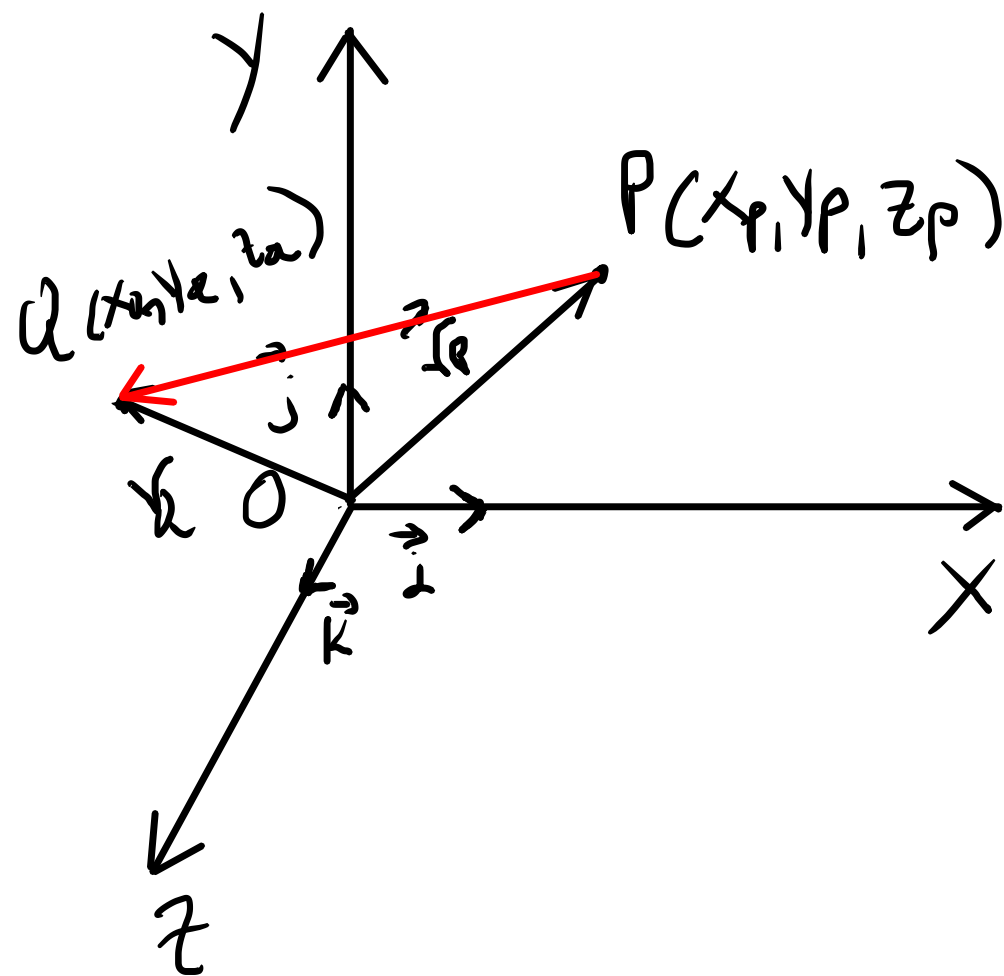
i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ αντιμεταθετική ιδιότητα

ii) $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ προεξαρριτική ιδιότητα της πρόσθεσης

iii) $c(d\vec{A}) = (cd)\vec{A} = d(c\vec{A}) = (dc)\vec{A}$ προεξαρριτική ιδιότητα παλ/μν

iv) $(c+d)\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A}$
 $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$ } επιμεριστική ιδιότητα

Διαγράμματα στο χώρο:



Δεξιάτροφο ορθοκανονικό σύστημα

πρώτα μοναδιαία διαγράμματα

$$\vec{i} = \langle \overset{x}{1}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0} \rangle$$

$$\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

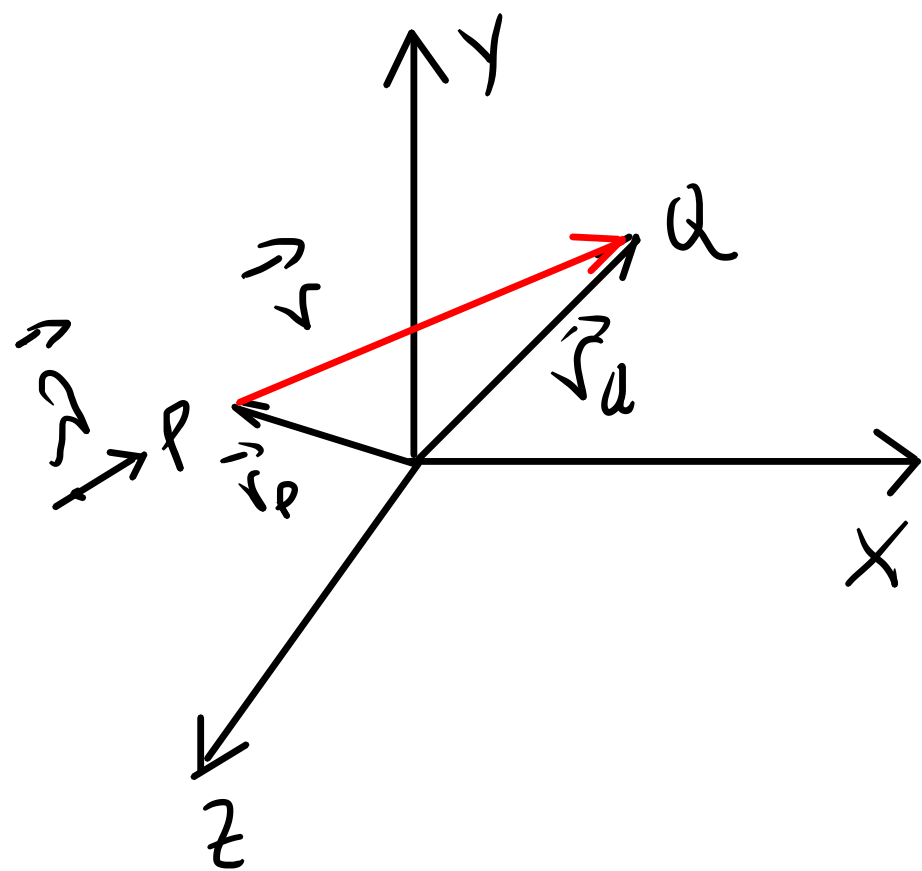
$$\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \right\} |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$\vec{r}_p = \vec{OP}$ διάνυσμα θέσης ή διασυνοταξική ακτίνα
στο σημείο $P(x_p, y_p, z_p)$

$$\vec{r}_p = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}, \quad \vec{r}_q = x_q \vec{i} + y_q \vec{j} + z_q \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{PQ} &= \vec{r}_q - \vec{r}_p = x_q \vec{i} + y_q \vec{j} + z_q \vec{k} - x_p \vec{i} - y_p \vec{j} - z_p \vec{k} \\ &= (x_q - x_p) \vec{i} + (y_q - y_p) \vec{j} + (z_q - z_p) \vec{k} \end{aligned}$$



$$\vec{r} = \vec{r}_a$$

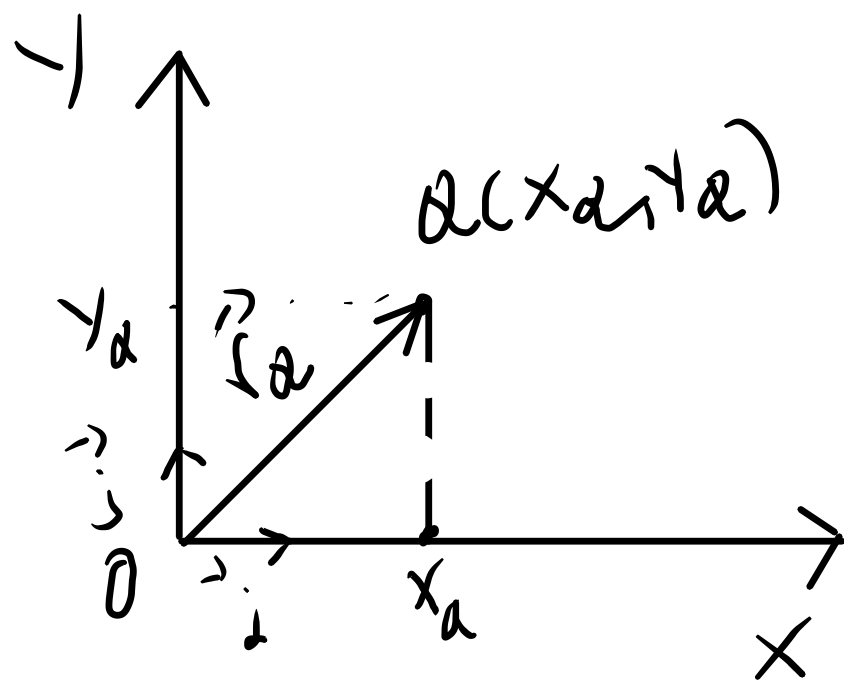
$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{Pa}}{\|\vec{r}_{Pa}\|}$$

$$|\vec{\lambda}| = 1, \quad \vec{r}_{Pa} = \|\vec{r}_{Pa}\| \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_p}{\|\vec{r}_a - \vec{r}_p\|} = \frac{(x_a - x_p)\vec{i} + (y_a - y_p)\vec{j} + (z_a - z_p)\vec{k}}{\sqrt{(x_a - x_p)^2 + (y_a - y_p)^2 + (z_a - z_p)^2}}$$

$$\vec{r}_a = x_a \vec{i} + y_a \vec{j}$$

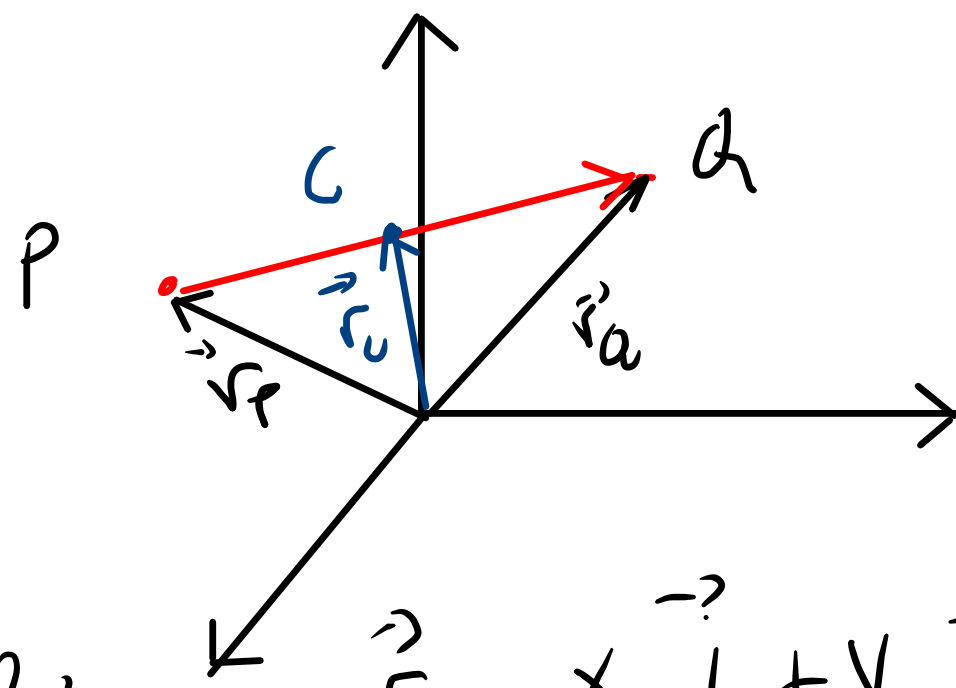
$$|\vec{r}_a| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$



To find the midpoint C of the line segment PA

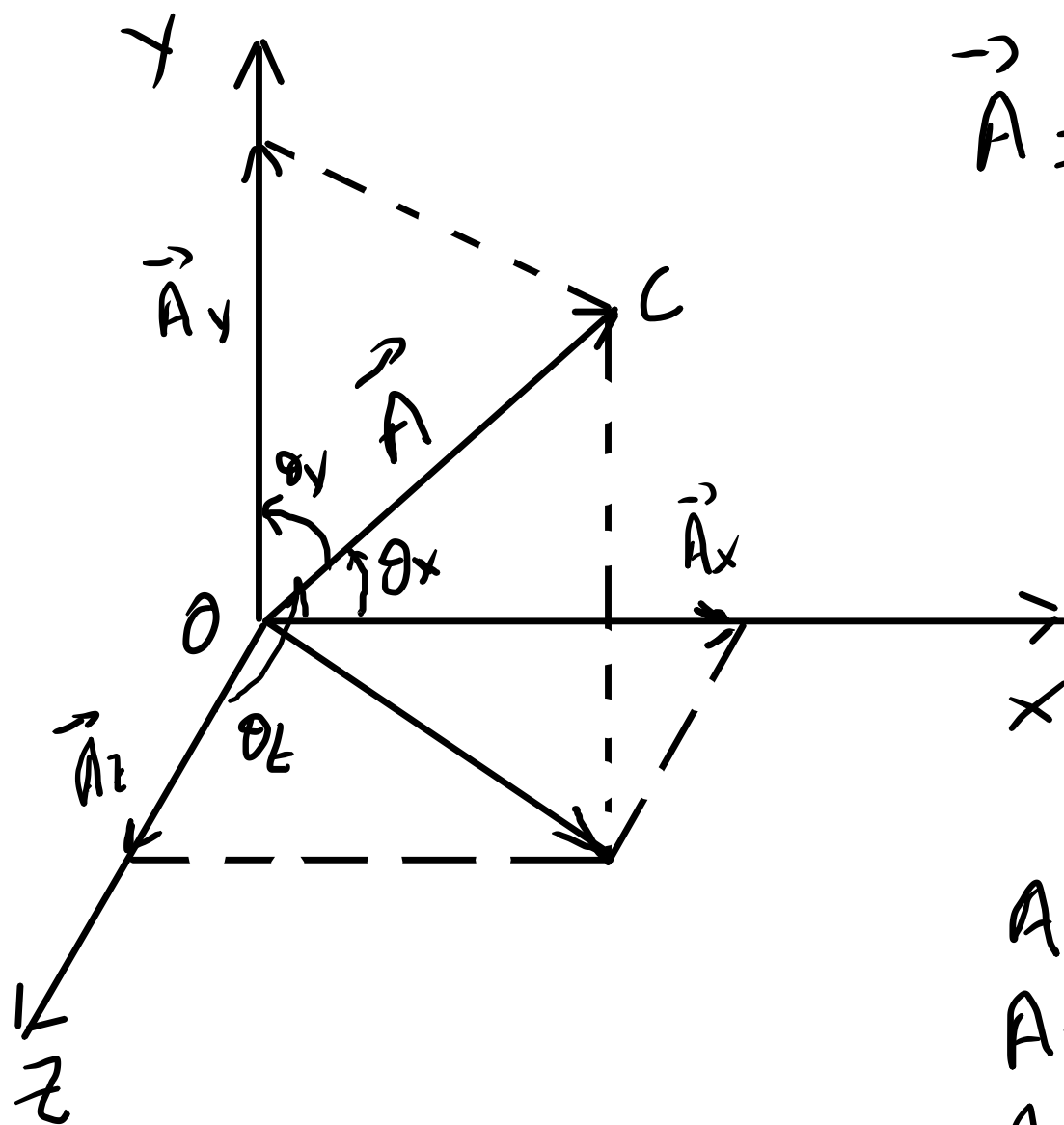
So the coordinates are: $x_c = \frac{x_p + x_a}{2}$

$$y_c = \frac{y_p + y_a}{2}, \quad z_c = \frac{z_p + z_a}{2}$$



$$\vec{r}_c = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}$$

Ορθογώνιες συνιστώσες ενός χωρικού διανύσματος



$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A}_x = A_x \vec{i}, \quad \vec{A}_y = A_y \vec{j}, \quad \vec{A}_z = A_z \vec{k}$$

$\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$: διανυσματικές συνιστώσες

A_x, A_y, A_z : αριθμητικές συνιστώσες

$$A_x = A \cos \theta_x \quad \text{όπου} \quad \theta_x = (\vec{A}, \hat{Ox})$$

$$A_y = A \cos \theta_y \quad \theta_y = (\vec{A}, \hat{Oy})$$

$$A_z = A \cos \theta_z \quad \theta_z = (\vec{A}, \hat{Oz})$$

Συνημιζώνη κατεύθυνσης του $\vec{A}$

$$\cos \theta_x = \lambda_x$$

$$\cos \theta_y = \lambda_y$$

$$\cos \theta_z = \lambda_z$$

$$\vec{\lambda} = \lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k}, \quad |\vec{\lambda}| = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A \cos \theta_x \vec{i} + A \cos \theta_y \vec{j} + A \cos \theta_z \vec{k} = A (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}) \\ &= A (\lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k}) = A \vec{\lambda} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2} = \sqrt{\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z} = 1$$

Πράξεις και γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων:

Έστω $\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle$ και $\vec{B} = \langle B_x, B_y, B_z \rangle$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$
$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\bullet \vec{A} + \vec{B} = \langle A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z \rangle = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \langle R_x, R_y, R_z \rangle, \quad R_x = A_x + B_x, \quad R_y = A_y + B_y, \quad R_z = A_z + B_z$$

$$\bullet \vec{A} - \vec{B} = \langle A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z \rangle = \underbrace{(A_x - B_x)}_{D_x} \vec{i} + \underbrace{(A_y - B_y)}_{D_y} \vec{j} + \underbrace{(A_z - B_z)}_{D_z} \vec{k}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \langle D_x, D_y, D_z \rangle,$$

$$\bullet c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B} = (c\vec{A} + c\vec{B}) \cdot c \quad c \in \mathbb{R} \text{ πραγματικοί αριθμοί}$$

$$\text{εάν } c > 0 \Rightarrow c(\vec{A} + \vec{B}) \text{ έχει την φορά του } \vec{A} + \vec{B}$$

$$c < 0 \quad \text{αντίθετη φορά}$$

$$\bullet \text{Διαίρεση: } \frac{1}{c}(\vec{A} + \vec{B}) \text{ όπως και πολ/μ'ο}$$

$$\bullet \vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow (A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z)$$

Συνθήκη παραλληλότητας δύο διανυσμάτων

$$(\vec{A} // \vec{B}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ορίζουσες}$$

$$A_x B_y - A_y B_x = 0 \Rightarrow A_x B_y = A_y B_x \Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \overset{\substack{\text{σταθερά} \\ \text{αναλογίας}}}{p}$$

$$A_y B_z - A_z B_y = 0 \Rightarrow A_y B_z = A_z B_y \Rightarrow \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = p$$

$$\vec{A} = p \vec{B} \quad \text{όπου} \quad \underset{p > 0}{p \in \mathbb{R}^+} \quad (\text{ίδια φορά}) \quad B_x, B_y, B_z \neq 0$$

$$\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle = \langle p B_x, p B_y, p B_z \rangle$$

Γραμμικά Εξαρτημένα Διανυσμάτα:

$$c\vec{A} = \vec{A}c \quad \text{αντιμεταθετική ιδιότητα}$$

$$c(d\vec{A}) = d(c\vec{A}) \quad \text{προγεγραμμένη}$$

$$\left. \begin{aligned} (c+d)\vec{A} &= c\vec{A} + d\vec{A} \\ c(\vec{A} + \vec{B}) &= c\vec{A} + c\vec{B} \end{aligned} \right\} \text{επιμεριστική}$$

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\vec{A}_i, i=1, 2, \dots, n$ ονομάζεται "γραμμικά εξαρτημένο" εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί c_i (όχι όλοι μηδενικοί) τέτοιοι ώστε:

$$c_1\vec{A}_1 + c_2\vec{A}_2 + \dots + c_n\vec{A}_n = \vec{0}$$

οποδήποτε διάνυσμα $\vec{A}_i$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

παράδειγμα:

Δύο συγγραμμικά διανυσμάτα

$\vec{A}_1$

$\vec{A}_2 = 2\vec{A}_1$

$\longrightarrow$

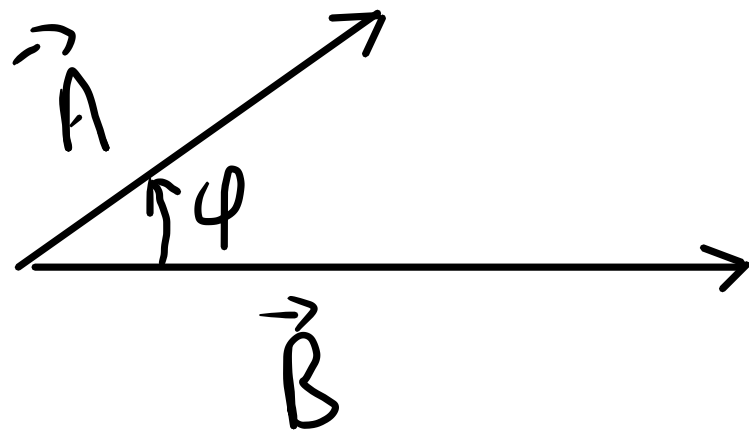
$$c_1\vec{A}_1 + c_2\vec{A}_2 = \vec{0}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2\vec{A}_1 + \vec{A}_2 &= \vec{0} \\ -2\vec{A}_1 + 2\vec{A}_1 &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$2(\vec{A}_1 - \vec{A}_1) = \vec{0} \quad \text{Ιχίς!}$$

- 1) Δύο διανύσματα n μηδενικά είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν είναι συγγραμμικά
- 2) Τρία n μηδενικά διανύσματα για να είναι γραμμικά εξαρτημένα θα πρέπει να είναι συνεπίπλεδα
- 3) Στον 3D χώρο 4 διανύσματα οποιαδήποτε είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \varphi = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$1 \times 3 = 3 \times 1$

$$\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \langle B_x, B_y, B_z \rangle = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

- Αν $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B}$ θετικός αριθμός
- Αν $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow$ αρνητικός
- Αν $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

Πρόσωπα τριωνομιαία διανυσματά - εσωτερικά γινόμενα:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0^\circ = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos 90^\circ = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$(\vec{i} \perp \vec{j}), (\vec{j} \perp \vec{k}), (\vec{k} \perp \vec{i})$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) \\ &= A_x B_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ &\quad + A_y B_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &\quad + A_z B_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

Γωνία φ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$

$$\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle \quad \vec{B} = \langle B_x, B_y, B_z \rangle \quad \varphi = ?$$
$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

$$\vec{A} = \langle A_x, A_y, A_z \rangle$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |A||A| \cancel{\cos 0^\circ}^1 = |A|^2 = A_x \cdot A_x + A_y \cdot A_y + A_z \cdot A_z = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\Rightarrow |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1) Επιμεριστική $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

2) Αντιμεταθετική $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

3) Πολλαπλασιαστική $c \in \mathbb{R}$

$$c(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (c\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (c\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})c$$

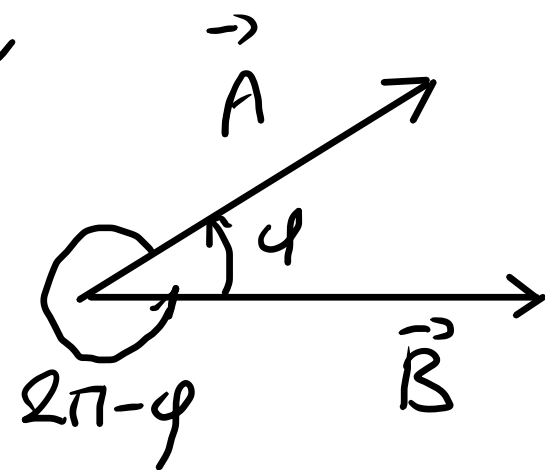
4) Προσεταιριστική (δεν ορίζεται)

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \neq \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

5) $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos 0^\circ = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

6) $\exists \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow (\vec{A} = \vec{0} \vee \vec{B} = \vec{0} \vee \vec{A} \perp \vec{B})$

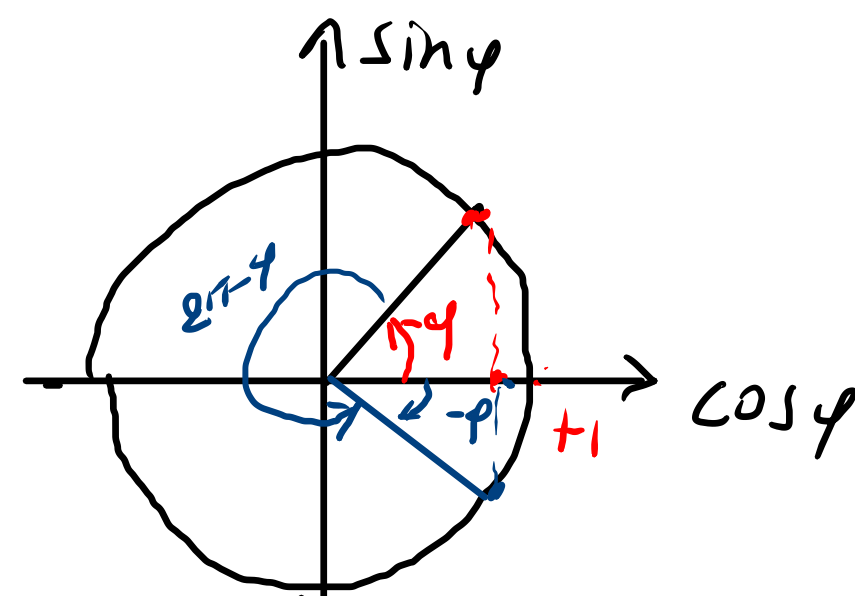
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}, -\vec{A} \perp \vec{B}, -\vec{B} \perp \vec{A}, \vec{A} \perp -\vec{B}$$



$$\vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| |\vec{A}| \cos \varphi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(2\pi - \varphi)$$

$$\cos \varphi = \cos(2\pi - \varphi)$$



Εφαρμογή:

Υπολογισμός γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων:

$$\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} : \langle 1, -2, -2 \rangle$$

$$\vec{B} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} : \langle 6, 3, 2 \rangle$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-4}{3 \cdot 7} = -\frac{4}{21} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right) \approx 100,98^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 6 - 6 - 4 = -4$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

Εφαρμογή:

Να προσδιορίσετε την B_y έτσι ώστε τα διανύσματα

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} \quad \text{και} \quad \vec{B} = 3\vec{i} + B_y\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{να είναι κάθετα} \quad \vec{A} \perp \vec{B}$$

$B_y = ?$

$$\vec{A}: \langle 2, -3, 5 \rangle, \quad \vec{B}: \langle 3, B_y, -2 \rangle$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3 + (-3) \cdot B_y + 5 \cdot (-2) = 0$$

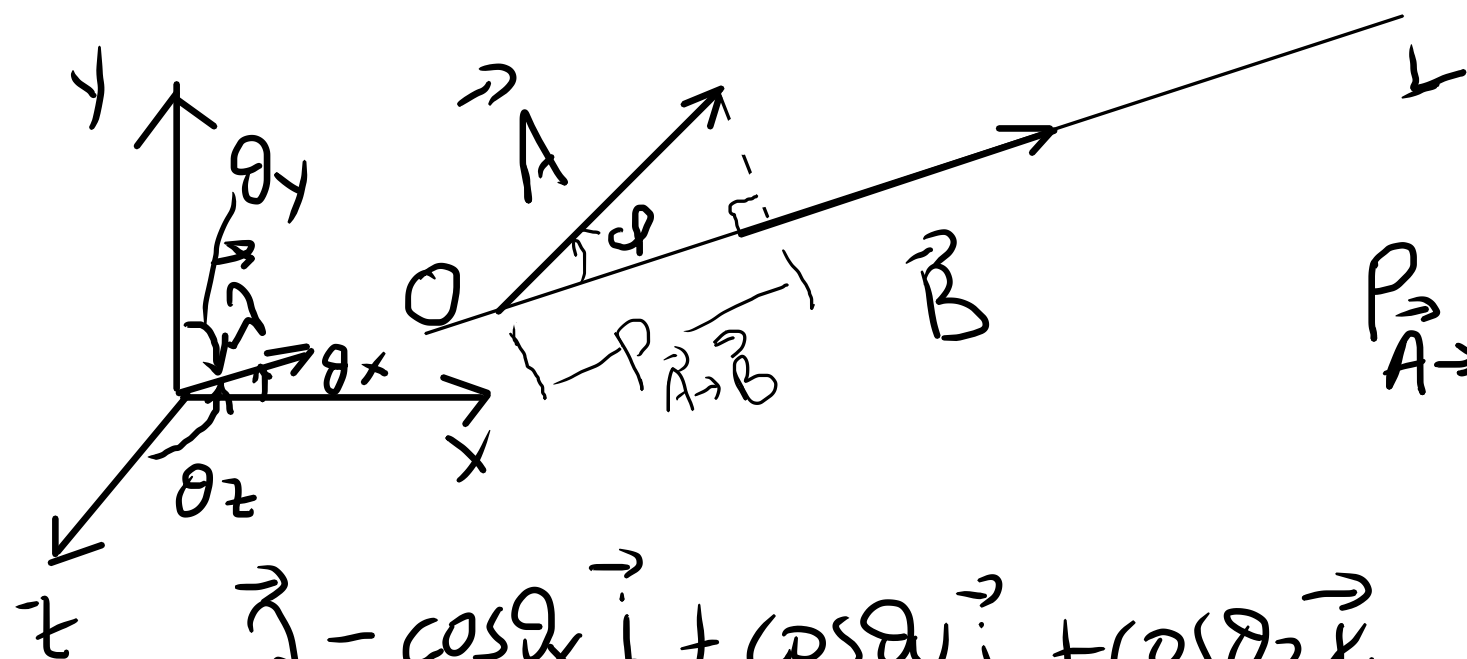
$$\Rightarrow 6 - 3B_y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow -3B_y = 4 \Rightarrow$$

$$B_y = -\frac{4}{3}$$

Προβολές

προβολή του $\vec{A}$ στον άξονα OB όπου
κείται το διάνυσμα $\vec{B}$



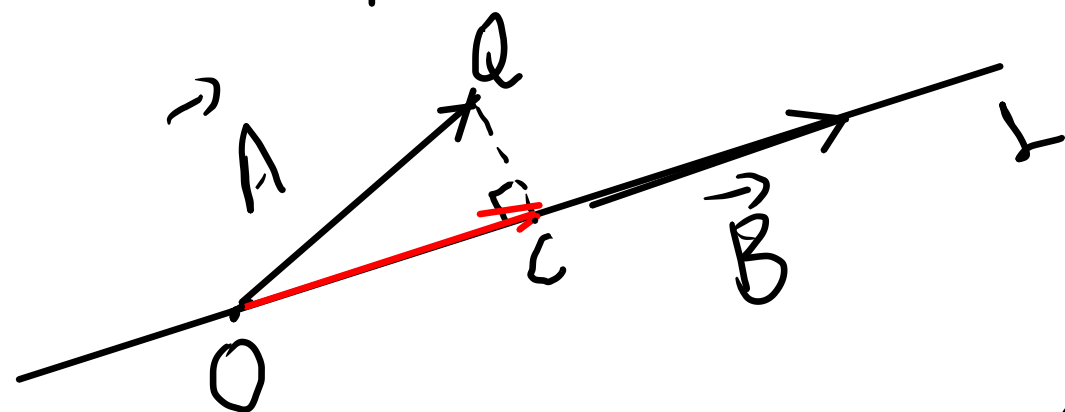
$$P_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} = |\vec{A}| \cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A} \cdot \vec{\lambda} =$$

$$= A_x \cos \theta_x + A_y \cos \theta_y + A_z \cos \theta_z$$

$$\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

$$\vec{\lambda} : \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

Διανυσματική προβολή:



$$\vec{A} = \vec{OQ},$$

$$P_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} = \text{Proj}_{\vec{B}} \vec{A} = \vec{OC} = (|\vec{A}| \cos \varphi) \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} =$$

$$\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \right) \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = (\vec{A} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda}$$

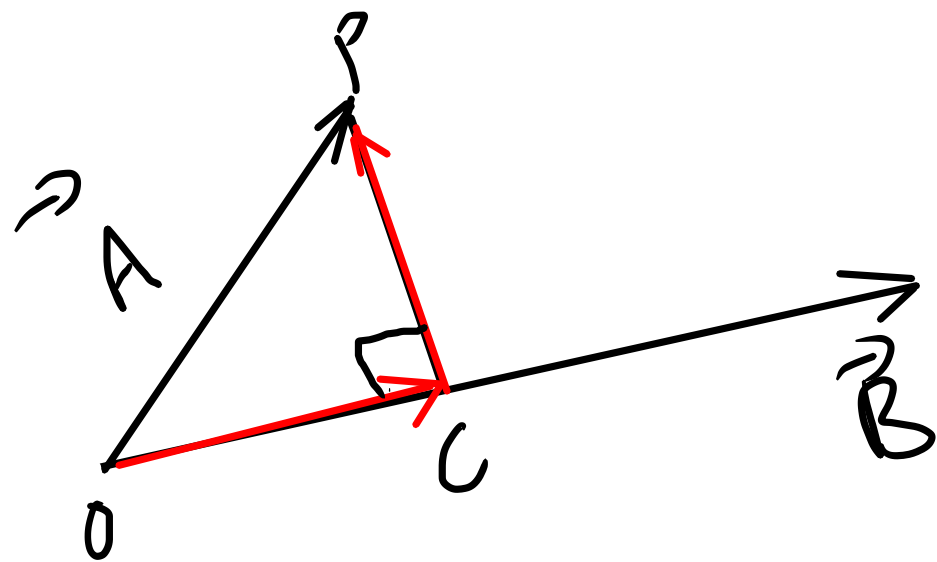
Διανυσματική προβολή

$$\vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} = \text{Proj}_{\vec{B}} \vec{A} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \hat{B}) \hat{B}$$

Αριθμητική προβολή

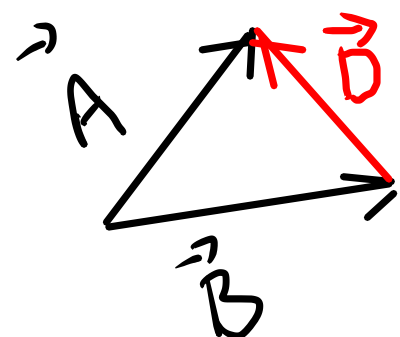
$$P_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} = |\vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}}| = |\vec{A}| \cdot \cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A} \cdot \hat{B}$$

Ανάλυση διανύσματος σε ορθογώνιες συνιστώσες:



$$\vec{A} = \vec{OC} + \vec{CP} = \vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} + (\vec{A} - \vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}})$$

$$= \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \vec{B} + \left[\vec{A} - \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \vec{B} \right]$$



$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

Εφαρμογή:

Ζητείται η διανυσματική προβολή του $\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ στο $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ καθώς και η αριθμητική συνιστώσα του $\vec{A}$ στη διεύθυνση του $\vec{B}$.

$$\vec{A} < 6, 3, 2 >$$

$$\vec{B} < 1, -2, -2 >$$

$$\vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} = |\vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}}| \vec{\hat{A}}_P = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} &= \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \cdot \vec{B} = \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}^2} \right) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = \frac{6 \cdot 1 + 3(-2) + 2(-2)}{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} (\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) \\ &= \frac{6 - 6 - 4}{1 + 4 + 4} (\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = -\frac{4}{9} (\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = -\frac{4}{9}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{8}{9}\vec{k} \quad : < -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9} > \end{aligned}$$

$$P_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} = |\vec{A}| \cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{6 - 6 - 4}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = -\frac{4}{3}$$

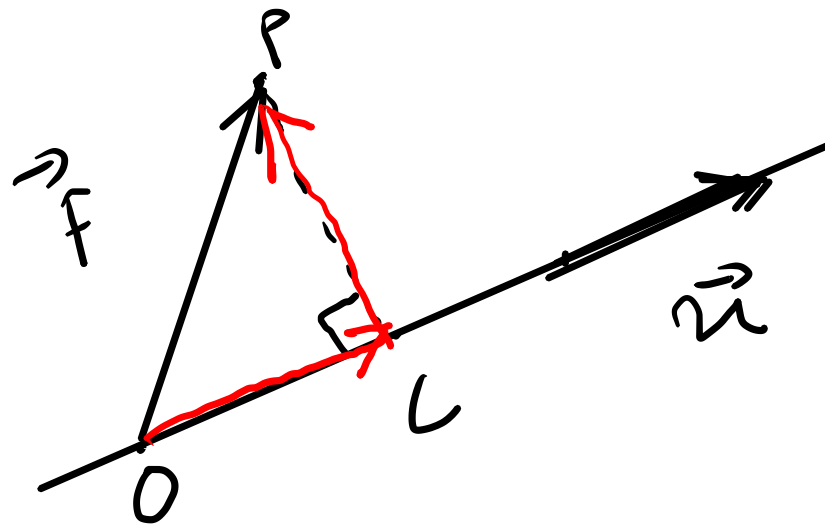
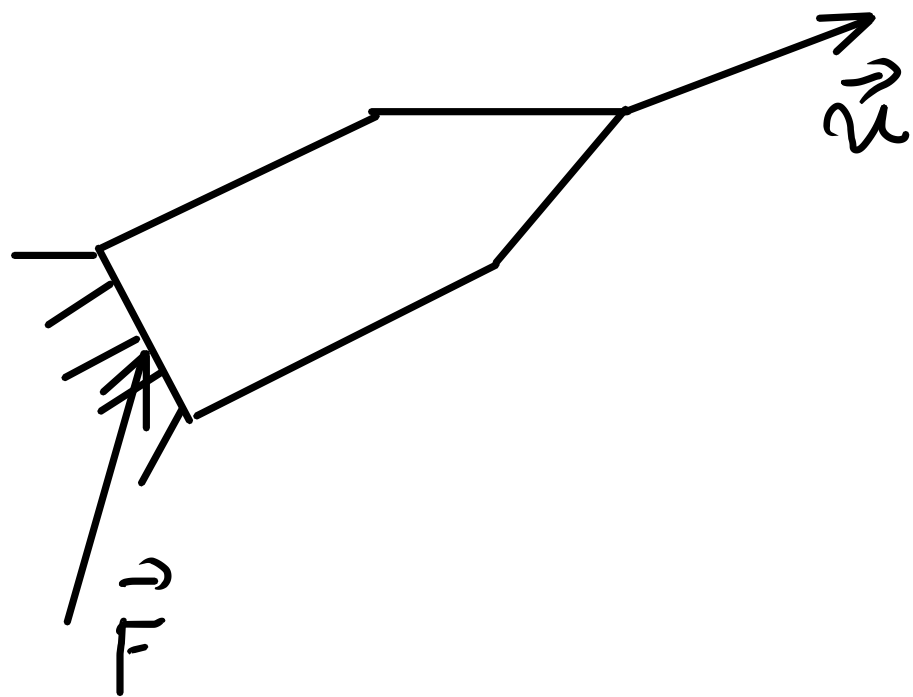
Εφαρμογή:

Δίνεται η προωθητική δύναμη ενός πυραύλου $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ σε kN και η ταχύτητά του $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$

Να εκφραστεί η $\vec{F}$ ως διάνυσμα παράλληλο και κάθετο στον $\vec{u}$

$$\vec{F} \langle 2, 1, -3 \rangle$$

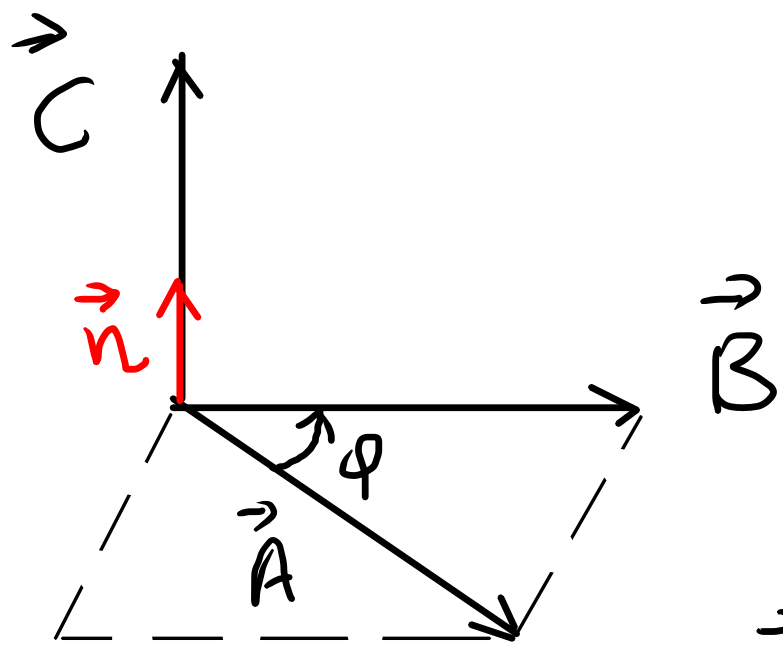
$$\vec{u} \langle 3, -1, 0 \rangle$$



$$\begin{aligned} \vec{F} &= \underbrace{\vec{P}_{\vec{F} \rightarrow \vec{u}}}_{\substack{\vec{OC} \\ \text{Παράλληλο} \\ \text{στον } \vec{u}}} + \underbrace{\left(\vec{F} - \vec{P}_{\vec{F} \rightarrow \vec{u}} \right)}_{\substack{\vec{CP} \\ \text{Κάθετο} \\ \text{στον } \vec{u}}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} + \left(\vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \right) = \frac{6 - 1 + 0}{9 + 1} (3\vec{i} - \vec{j}) + \\ &\quad \left[(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) - \frac{5}{10} (3\vec{i} - \vec{j}) \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \right) + \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k} \right) \end{aligned}$$

Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο:

Έστω δύο μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα στο χώρο $\vec{A} \langle A_x, A_y, A_z \rangle$ και $\vec{B} \langle B_x, B_y, B_z \rangle$. Τα δύο αυτά διανύσματα ορίζουν ένα επίπεδο.



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \varphi) \vec{n} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ |\vec{n}| = 1 \end{array}$$

Κάθε το στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} \langle \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} = A_y B_z - A_z B_y$$

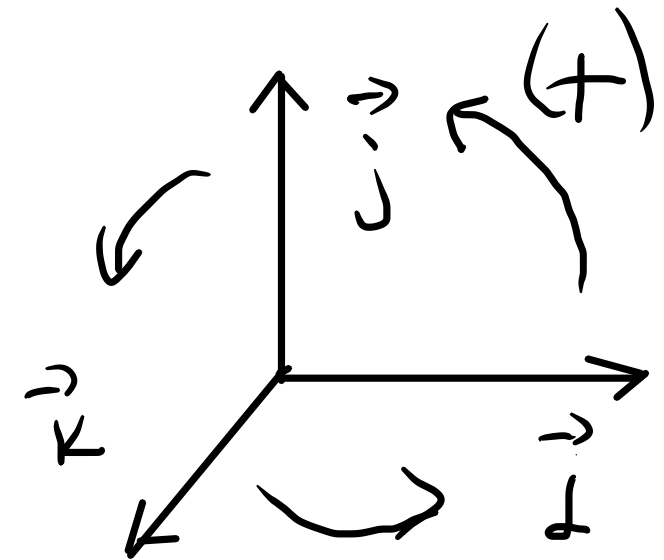
$$\text{Εάν } \vec{A} = \vec{B} \text{ ή } \vec{A} = -\vec{B} \text{ ή } \vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}, \vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$$

Εξωτερικά γινόμενα μοναδικών προσηπών διακυρήσεων

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$



κυκλική μεσάθεση
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\
&= A_x B_x (\vec{i} \times \vec{i}) + A_x B_y (\vec{i} \times \vec{j}) + A_x B_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&+ A_y B_x (\vec{j} \times \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \times \vec{j}) + A_y B_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&+ A_z B_x (\vec{k} \times \vec{i}) + A_z B_y (\vec{k} \times \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \times \vec{k}) =
\end{aligned}$$

$$= A_x B_y \vec{k} - A_x B_z \vec{j} - A_y B_x \vec{k} + A_y B_z \vec{i} + A_z B_x \vec{j} - A_z B_y \vec{i}$$

$$= \vec{i} (A_y B_z - A_z B_y) - \vec{j} (A_x B_z - A_z B_x) + \vec{k} (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \langle A_x, A_y, A_z \rangle, \vec{B} \langle B_x, B_y, B_z \rangle$$

$$\vec{C} \langle C_x, C_y, C_z \rangle$$

Εξωτερικό γινόμενο:

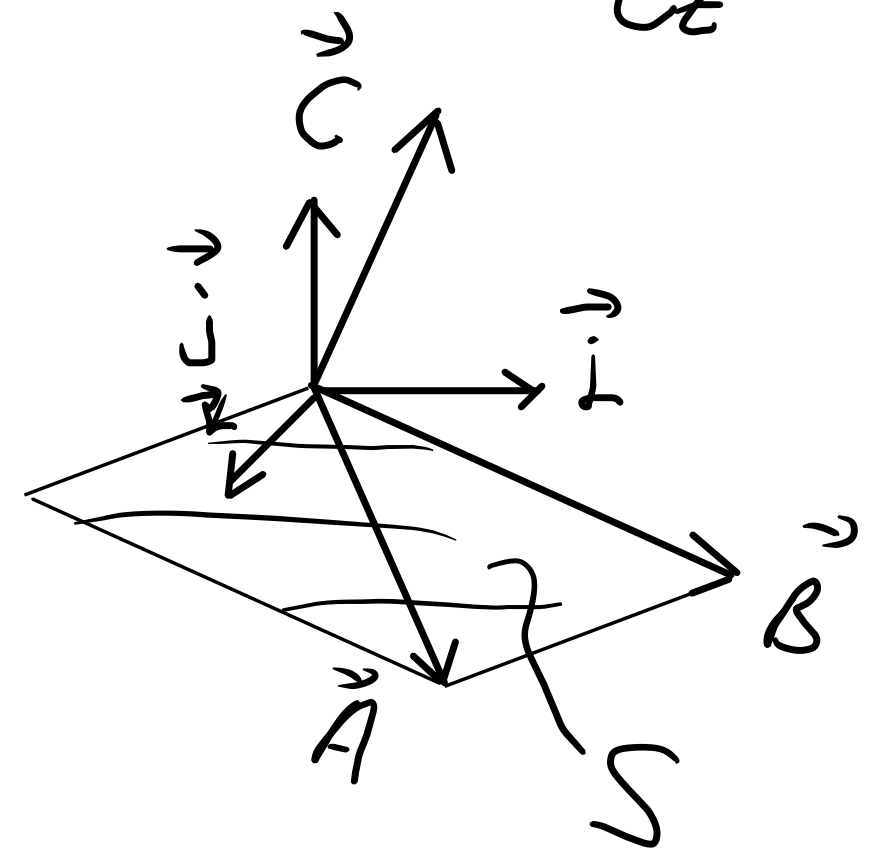
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i} \underbrace{(A_y B_z - A_z B_y)}_{C_x} - \vec{j} \underbrace{(A_x B_z - A_z B_x)}_{-C_y} + \vec{k} \underbrace{(A_x B_y - A_y B_x)}_{C_z}$$

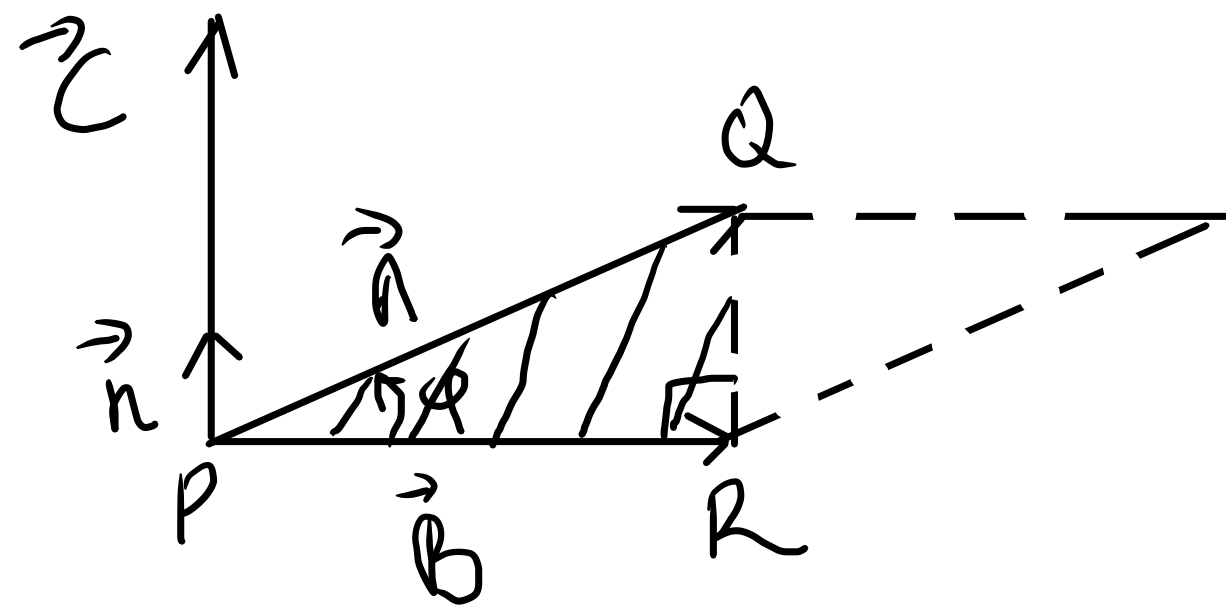
$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$S = \text{Εμβαδόν παραλληλογράμμου } \vec{A}, \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{C}|$$

$$S_{\text{πρβ}} = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{j}|$$

$$P_{\vec{C} \rightarrow \vec{j}} = \frac{\vec{C} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|}$$





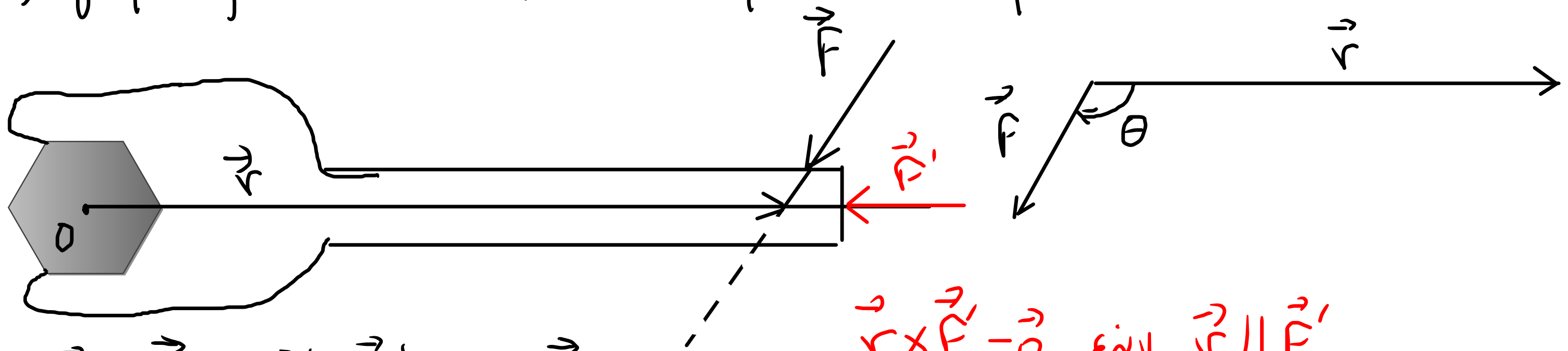
Εμβαδόν τριγώνου PQR

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}| \quad \begin{matrix} \vec{PQ} = \vec{A} \\ \vec{PR} = \vec{B} \end{matrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \underbrace{\sin \varphi}_{\text{AR}}$$

Υπολογισμός ροπής δύναμης ως προς ένα σημείο



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta \vec{n}$$

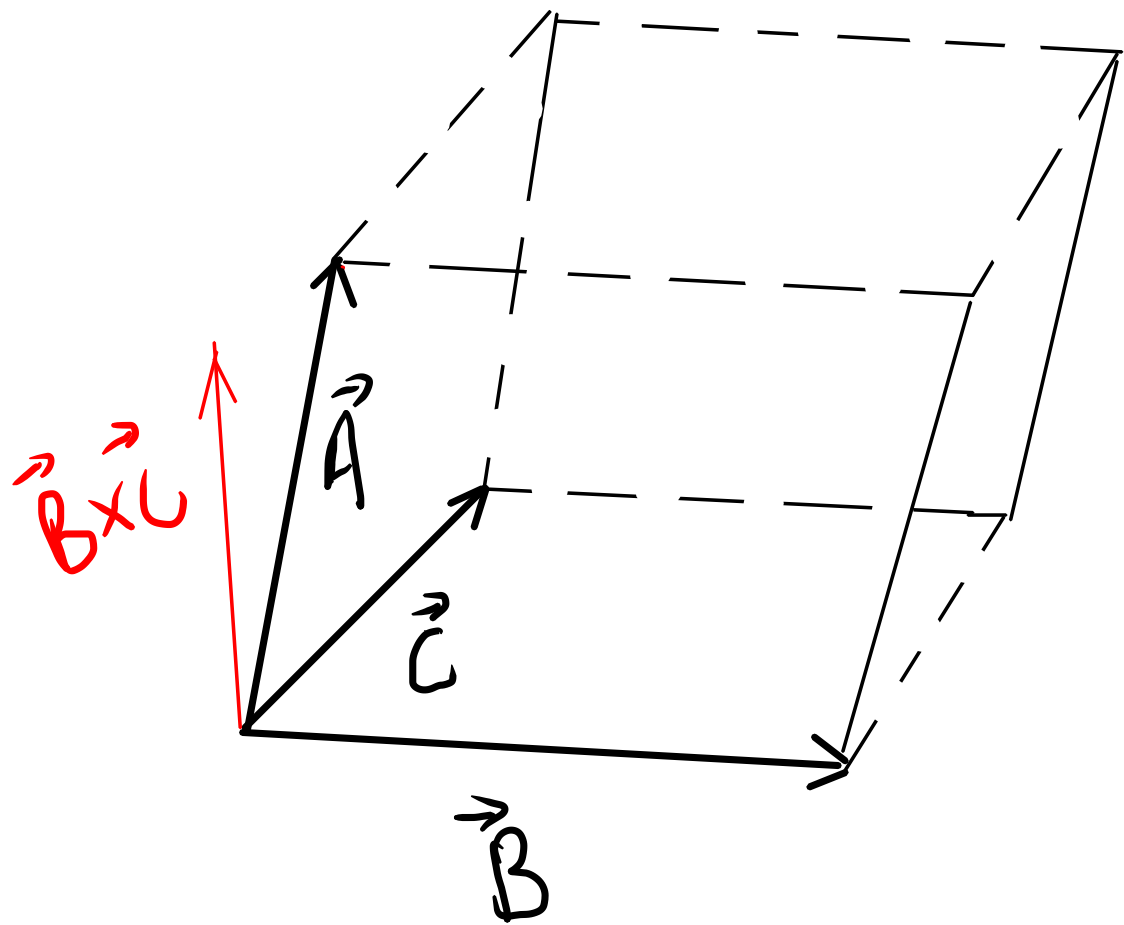
$$\vec{r} \times \vec{F}' = \vec{0} \text{ εάν } \vec{r} \parallel \vec{F}'$$

$\vec{n}$: μοναδιαίο με φορά προς τον πίνακα (κανόνας δεξιού χεριού)
παράλληλο στην άξονα του κοχλίου

Γινόμενο τριών διανυσμάτων:

Μικτό τριπλό γινόμενο: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = V$

V : όγκος του παραλληλεπίπεδου
που ορίζεται από τα
 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ διανύσματα



Εάν $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ τότε τα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ είναι συνεπίπεδα
δεν ορίζουν παραλληλεπίπεδο

Διβεζωζερικό γινόμενο

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$