

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2018-2019
ΜΑΘΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι - ΣΤΑΤΙΚΗ

ΕΠΙΘΕΤΟ: Παντής
ΟΝΟΜΑ: Άγγελος
ΤΜΗΜΑ: ΜΗΠΕΡ
Α.Μ.: 2018050055
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΟΜΑΔΑ: 8

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ: 3

ΘΕΜΑ ΑΣΚΗΣΗΣ : «Ροπές κάμψης σε δοκούς»

ΧΑΝΙΑ (ΗΗ/ΜΜ/ΕΕ): 28/4/2019

Πείραμα 1 : Μεταβολή καμπτικής ροπής στο σημείο εφαρμογής φορτίου

Περίληψη

Σκοπός της πειραματικής άσκησης είναι η μελέτη μιας ισοστατικής μονοπροέχουσας δοκού ως προς τη μεταβολή της καμπτικής ροπής που εμφανίζει σε σημείο τομής (cut position) , κατά την επιβολή σε αυτό διαδοχικά αυξανόμενων φορτίων. Συγκεκριμένα, υπολογίστηκε για κάθε τιμή ασκούμενου στη τομή φορτίου η δύναμη σε αυτή καθώς και η πειραματική και η θεωρητική τιμή καμπτικής ροπής. Ακόμα, παρουσιάστηκε γραφικά η μεταβολή της πειραματικής και της θεωρητικής καμπτικής ροπής συναρτήσει του φορτίου. Τέλος, έγινε σχολιασμός των διαγραμμάτων και προέκυψαν συμπεράσματα για την ακρίβεια της μεθόδου υπολογισμού της θεωρητικής καμπτικής ροπής.

Εισαγωγή

Σε πρώτο χρόνο , γίνεται μετατροπή της μάζας που προσαρτάται στη θέση τομής σε φορτίο. Αυτό γίνεται με τη γνωστή σχέση :

$$W = m * g = m * 9,8 \frac{kg*m}{s^2} \quad (1)$$

Η ψηφιακή ένδειξη της δύναμης που αναπτύσσεται στον βραχίονα ροπής (cut position) και καταγράφεται από αισθητήρα δύναμης , εμφανίζεται στην οθόνη του ψηφιακού δυναμόμετρου. Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη δύναμη με το μήκος του βραχίονα υπολογίζεται η πειραματική ροπή κάμψης στο σημείο τομής . Δηλαδή :

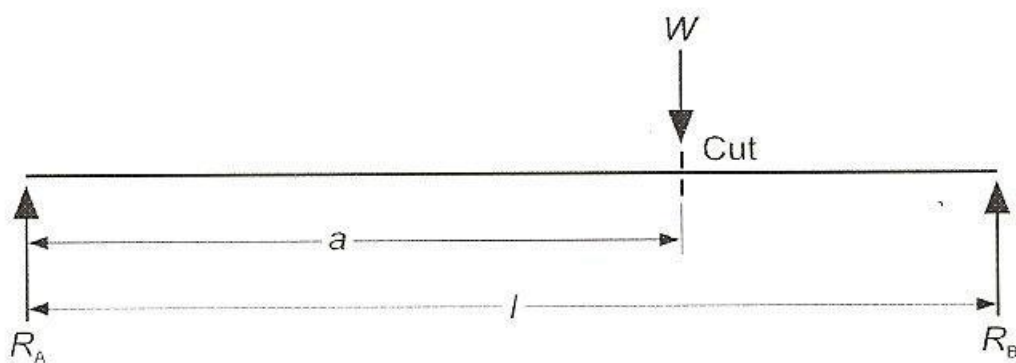
$$M_{cut\ position} (Nm) =$$

$$\text{Ένδειξη δύναμης αντίδρασης στον βραχίονα της ροπής (N)} * 0,125 (m) \quad (2)$$

Η θεωρητική τιμή καμπτικής ροπής στο σημείο τομής υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο :

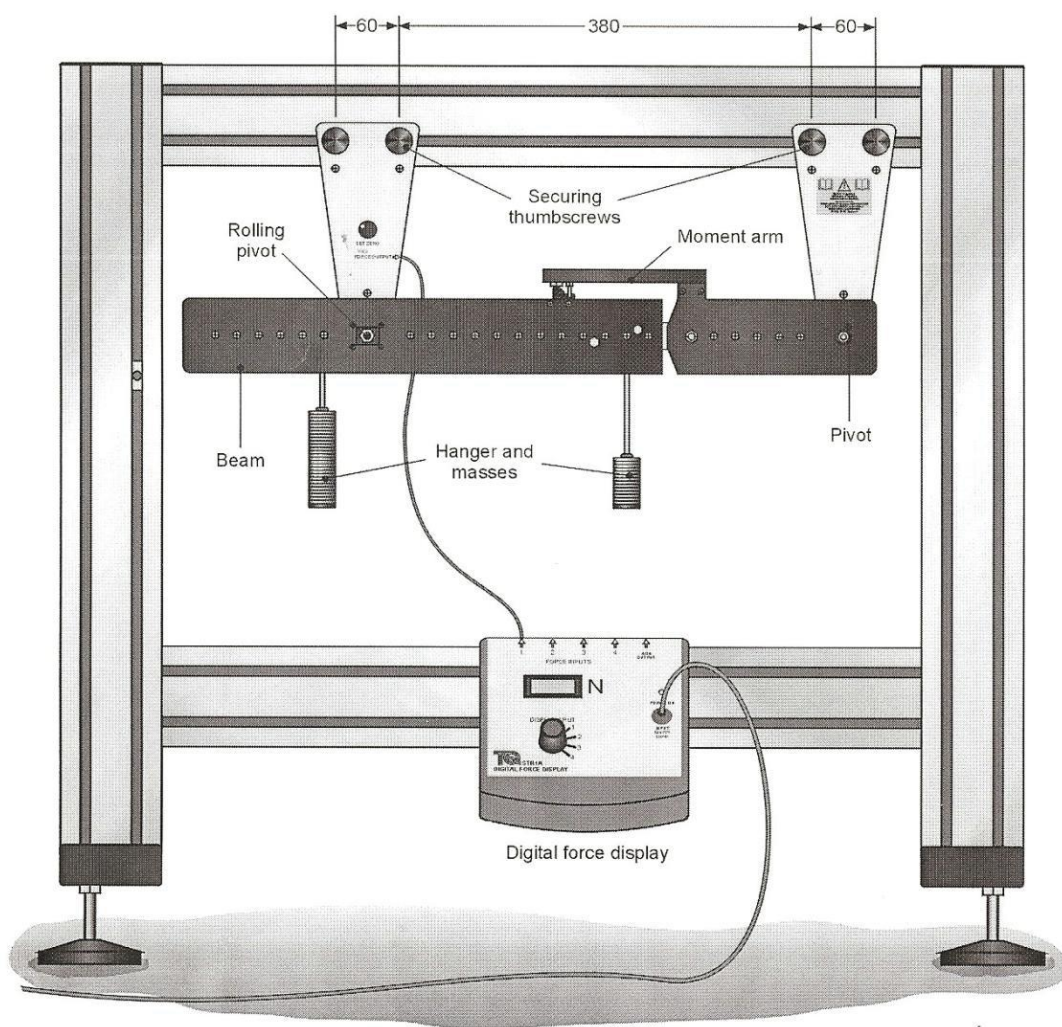
$$M_{theor. at cut} = \frac{W(l-a)}{l} * a \quad (3)$$

, όπου W το φορτίο που ασκείται στο σημείο τομής και l, a οι αποστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Είναι γνωστό ότι $l = 0,44m$ και $a = 0,30m$.

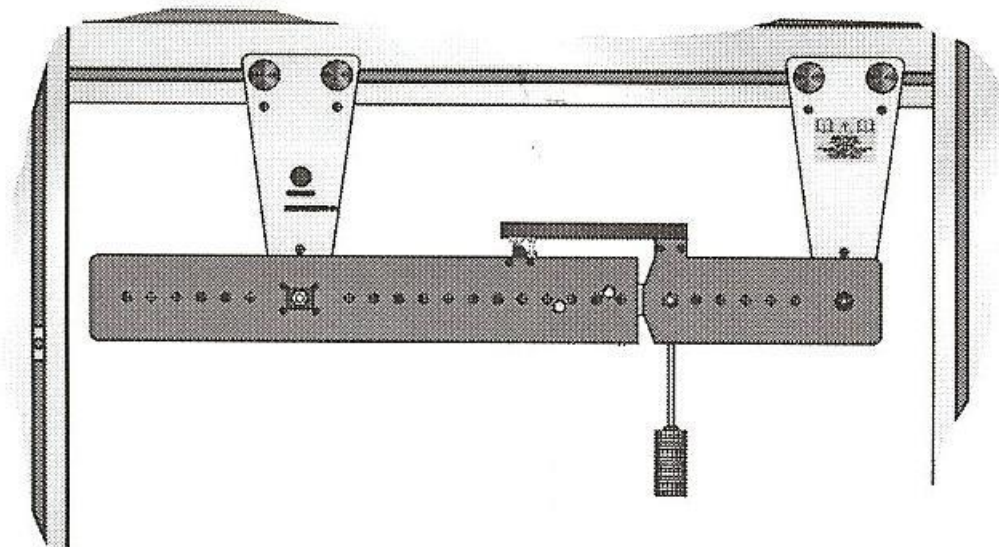


Πειραματική διάταξη και διαδικασία

Στις εικόνες 1 και 2 που ακολουθούν παρουσιάζεται λεπτομερώς η διάταξη του πειράματος.



Εικόνα 1



Εικόνα 2

Σε αυτό το πείραμα μελετάται η μεταβολή της καμπτικής ροπής μιας ισοστατικής δοκού, που μετράται ακριβώς πάνω στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Σε αυτό το σημείο υπάρχει μία πραγματική εγκάρσια ως προς τον άξονα της δοκού τομή (cut position) που επιτρέπει τον υπολογισμό της καταπόνησης που αναπτύσσεται στο εσωτερικό της πειραματικής δοκού λόγω της ροπής κάμψης. Στο σημείο τομής γίνονται όλοι οι υπολογισμοί του πειράματος.

Όπως φαίνεται στις εικόνες 1 και 2, υπάρχει ένας ευθύγραμμος βραχίονας που γεφυρώνει την τομή και διαθέτει κατάλληλο αισθητήρα δύναμης. Ο αισθητήρας καταγράφει την δύναμη αντίδρασης που αναπτύσσεται ώστε να ισορροπεί ο βραχίονας με αποτέλεσμα – γνωρίζοντας το μήκος του βραχίονα της δύναμης αντίδρασης (125 mm) – να μπορεί να υπολογισθεί η ροπή κάμψης ακριβώς πάνω στην θέση της τομής.

Η δοκός είναι εφοδιασμένη ανά 20mm κατά μήκος με θέσεις κρέμασης για την τοποθέτηση βαρών σαν συγκεντρωμένα φορτία (με χρήση άγκιστρου) υπό μορφή δίσκων με μάζα 10 gr έκαστος. Έτσι, παραμένει εντελώς οριζόντια σε σχέση με τα βάρη.

Μία ειδική ψηφιακή συσκευή προσαρμόζεται στο πλαίσιο ώστε να παρέχει τις ενδείξεις της δύναμης αντίδραση του βραχίονα της ροπής, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κατά την διάρκεια των εκτελούμενων πειραμάτων. Όλες οι συσκευές συνδέονται με υπολογιστή μέσω ειδικής μονάδας αυτόματης συσκευής επεξεργασίας δεδομένων.

Αρχικά, τοποθετείται ένα φορτίο μάζας 100g ακριβώς πάνω στο σημείο της τομής. Συμπληρώνεται στον Πίνακα 2 η δύναμη που καταγράφεται από τον αισθητήρα δύναμης (ψηφιακή ένδειξη στην οθόνη του δυναμόμετρου). Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας τις ενδεικτικές μάζες των 200 g, 300 g, 400 g, 500 g. Πριν από αυτή τη διαδικασία έχει προηγηθεί μετατροπή των παραπάνω μαζών σε μονάδες φορτίου (N).

Η δύναμη αντίδρασης που αναπτύσσεται στον βραχίονα ροπής μετασχηματίζεται σε Πειραματική Καμπτική Ροπή (Nm) στο σημείο της τομής, σύμφωνα με την εξίσωση (2) της εισαγωγής. Συμπληρώνεται η αντίστοιχη στήλη του Πίνακα 2, για κάθε τιμή φόρτισης.

Τέλος, με χρήση της εξίσωσης (3) υπολογίζεται η θεωρητική τιμή της ροπής κάμψης στο σημείο της τομής και συμπληρώνονται τα αποτελέσματα στον Πίνακα 2.

Αποτελέσματα-Ανάλυση-Συζήτηση

Πίνακας 1

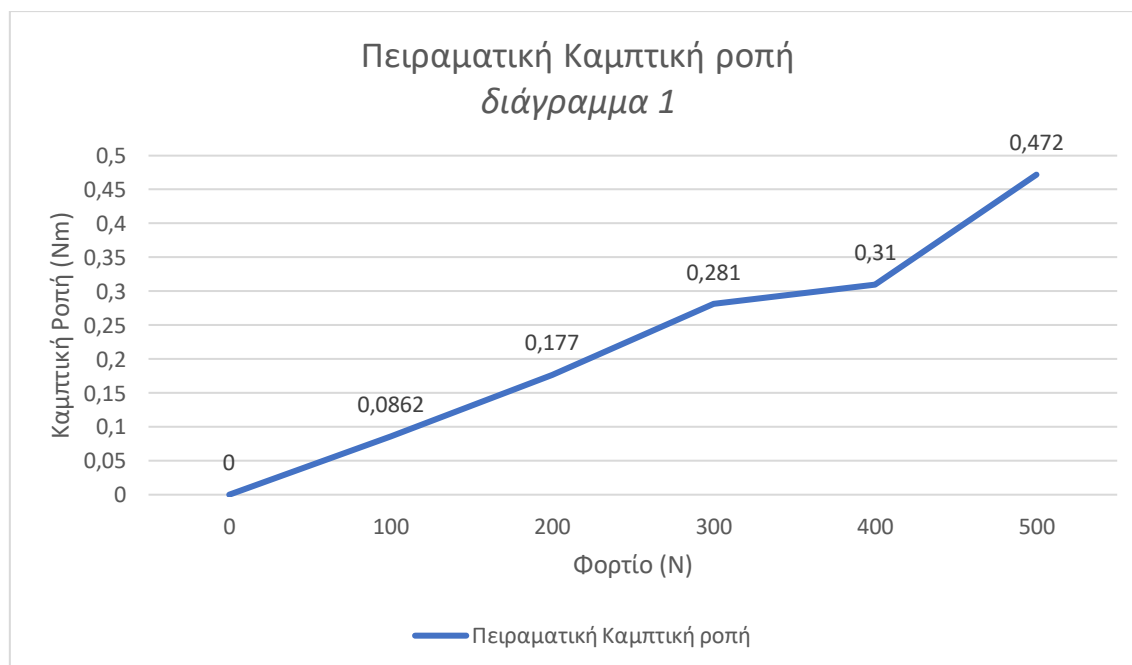
Μάζα (g)	Φορτίο (N)	Ψηφιακή Ένδειξη δύναμης	Πειραματική καμπτική ροπή (Nm)	Θεωρητική καμπτική ροπή (Nm)
0	0	0	0	0
100	0,98	0,69	0,0862	0,0935
200	1,96	1,42	0,177	0,187
300	2,94	2,25	0,281	0,280
400	3,92	2,48	0,310	0,374
500	4,90	3,78	0,472	0,467

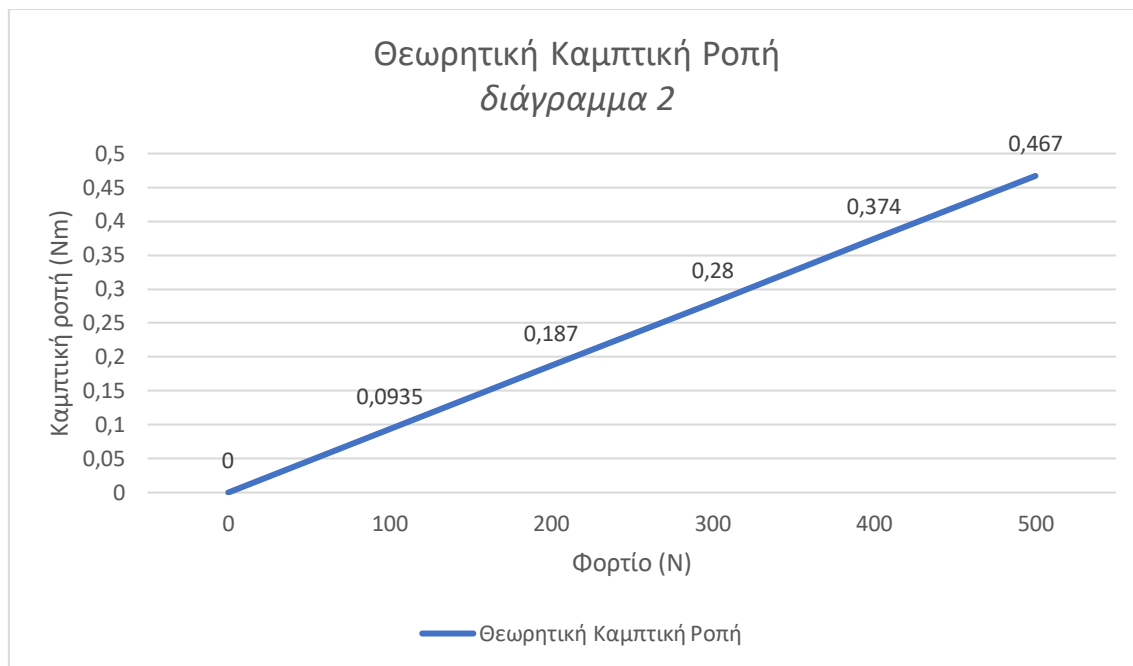
Οι πειραματικές τιμές της ροπής κάμψης στο σημείο τομής υπολογίστηκαν με τον τύπο (2) που αναφέρεται στην εισαγωγή, ενώ οι αντίστοιχες θεωρητικές τιμές βρέθηκαν με τη βοήθεια του τύπου (3). Ενδεικτικά, ακολουθεί η διαδικασία εύρεσης των παραπάνω μεγεθών για αναρτώμενη μάζα 100g :

$$M_{exp. \text{ at cut}} = 0,69 * 0,125 = 0,0862 \text{ Nm}$$

$$M_{theor. \text{ at cut}} = 0,98 * 0,0954 = 0,0935 \text{ Nm}$$

Στα διαγράμματα 1 και 2 που ακολουθούν παρουσιάζεται η μεταβολή της πειραματικής και της θεωρητικής καμπτικής ροπής πάνω στην τομή της δοκού σε συνάρτηση του φορτίου που εφαρμόζεται στην θέση αυτή.





Από τα παραπάνω διαγράμματα γίνεται εμφανές ότι το μέγεθος της καμπτικής ροπής στο σημείο τομής είναι ανάλογο του φορτίου που ασκείται στο σημείο αυτό. Συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το φορτίο που ασκείται στη θέση τομής, αυξάνεται παράλληλα και η τιμή της καμπτικής ροπής.

Συμπεράσματα

Στη παραπάνω πειραματική άσκηση μελετήθηκε η μεταβολή της καμπτικής ροπής μιας ράβδου σε ένα συγκεκριμένο σημείο (cut position), κατά την επιβολή σε αυτό κάθετου φορτίου. Η τιμή της καμπτικής ροπής που αναπτύσσεται στο σημείο τομής υπολογίστηκε πειραματικά και θεωρητικά. Τόσο από τα αποτελέσματα του Πίνακα 1, όσο και από τα διαγράμματα 1 και 2, παρατηρείται ότι η απόκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών είναι πολύ μικρή. Αυτή η απόκλιση οφείλεται εν μέρει στο γεγονός ότι στον τύπο (3) που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της θεωρητικής καμπτικής ροπής, το φορτίο θεωρείται ότι ασκείται ακριβώς πάνω στη θέση τομής (όπως φαίνεται και στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος στην εισαγωγή). Ακόμα πρέπει να ληφθεί υπόψη η φθορά που έχουν υποστεί η μάζες που αναρτώνται στη δοκό.

Σε κάθε περίπτωση, οι τιμές που προκύπτουν από τη σχέση (3) προσεγγίζουν κατά πολύ τις πραγματικές. Ως εκ τούτου η σχέση (3) μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για την ακριβή πρόβλεψη της συμπεριφοράς μιας δοκού σε καταστάσεις φόρτισης όμοιες αυτών του πειράματος.

Πείραμα 2: Μεταβολή της καμπτικής ροπής σε απόσταση από το σημείο φόρτισης

Περίληψη

Σκοπός του πειράματος 2 είναι η μελέτη της μεταβολής της καμπτικής ροπής στο σημείο 'cut' της δοκού (σημείο τομής πειράματος 1) για διάφορες συνθήκες φόρτισης, κατά τις οποίες το φορτίο δεν ασκείται στη θέση τομής. Εξετάζονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις φόρτισης : α) Ένα συγκεντρωμένο φορτίο στο αριστερό άκρο της δοκού, β) Δύο συγκεντρωμένα φορτία από την ίδια πλευρά της τομής (αριστερή) και γ) Δύο συγκεντρωμένα φορτία, ένα σε κάθε πλευρά της τομής. Για κάθε περίπτωση, αναρτώνται στη δοκό τα αντίστοιχα βάρη και συμπληρώνεται ο Πίνακας 2 με : τη δύναμη αντίδρασης στον μοχλοβραχίονα (ένδειξη αισθητήρα), τις αντιδράσεις των στηρίξεων, τη πειραματική και τη θεωρητική τιμή της καμπτικής ροπής. Τέλος, συγκρίνοντας τις πειραματικές και τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν, εξάγεται συμπέρασμα για το κατά πόσο μπορούν οι εξισώσεις ισορροπίας που χρησιμοποιήθηκαν στην θεωρία να προβλέψουν με ακρίβεια την συμπεριφορά της δοκού, ανεξάρτητα της περίπτωσης φόρτισης.

Εισαγωγή

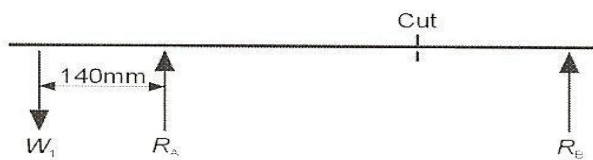
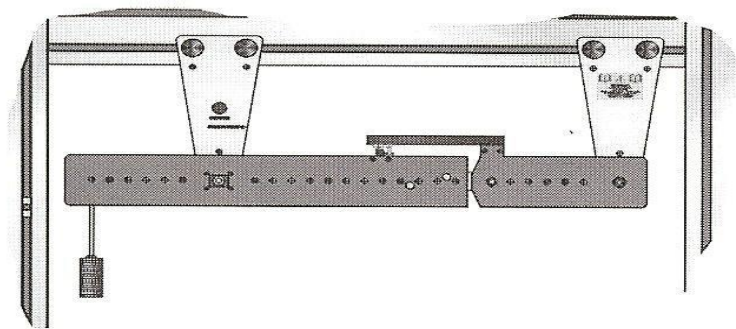
Για τη συμπλήρωση του Πίνακα 2 γίνεται πάλι χρήση της εξίσωσης (2) που φαίνεται στην εισαγωγή του πειράματος 1. Με τη σχέση (2) μετατρέπεται η πειραματική δύναμη που καταγράφει ο αισθητήρας σε πειραματική καμπτική ροπή.

Οι αντιδράσεις των στηρίξεων σε κάθε περίπτωση προκύπτουν από τη θεώρηση της ράβδου και των μαζών που αναρτήθηκαν ως ενιαίου σώματος και την εφαρμογή σε αυτό των εξισώσεων : $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_{A/B} = 0$

Για τον υπολογισμό της θεωρητικής τιμής της καμπτικής ροπής στο σημείο τομής λαμβάνεται ένα από τα δυο τμήματα της δοκού (αριστερά ή δεξιά της τομής) ως σώμα που βρίσκεται σε ισορροπία και σχεδιάζεται γι' αυτό διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Η διατμητική δύναμη V στο σημείο τομής προσδιορίζεται εξισώνοντας το άθροισμα των κατακόρυφων συνιστωσών όλων των δυνάμεων ίσο με το μηδέν. Ομοίως, εξισώνοντας με το μηδέν το άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο τομής, υπολογίζεται η καμπτική ροπή M. Δηλαδή, η καμπτική ροπή στο σημείο 'cut' είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που προκαλούνται από τα φορτία που δρουν στην αριστερή ή δεξιά πλευρά από το σημείο της τομής.

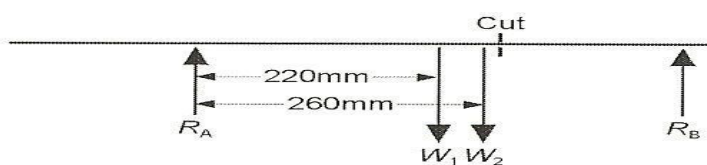
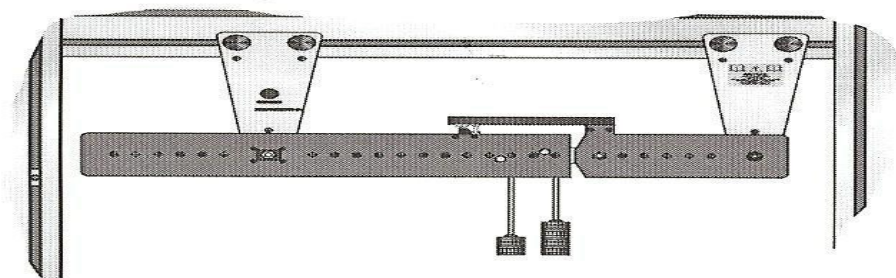
Πειραματική διάταξη και διαδικασία

Η διάταξη του πειράματος 2 είναι η ίδια με του πειράματος 1. Αυτή τη φορά δίνεται έμφαση στη θέση του ασκούμενου φορτίου και όχι τόσο στο μέτρο του. Στις εικόνες 3,4,5 που ακολουθούν παρουσιάζονται αντίστοιχα οι περιπτώσεις φόρτισης α),β),γ) που αναφέρθηκαν νωρίτερα.



$$W_1 = 3.92 \text{ N (400 g)}$$

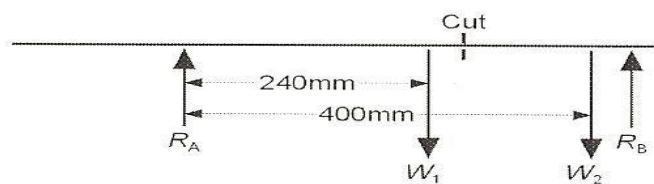
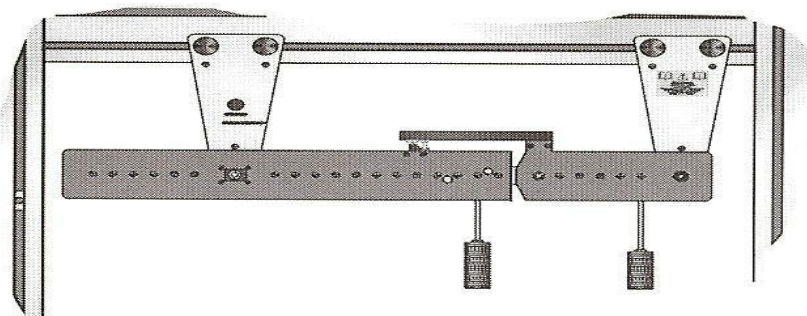
Εικόνα 3 : Φορτίο στο αριστερό άκρο της δοκού



$$W_1 = 1.96 \text{ N (200 g)}$$

$$W_2 = 3.92 \text{ N (400 g)}$$

Εικόνα 4 : Δυο φορτία στην ίδια πλευρά της τομής



$$W_1 = 4.91 \text{ N (500 g)}$$

$$W_2 = 3.92 \text{ N (400 g)}$$

Εικόνα 5 : Ένα φορτίο σε κάθε πλευρά της τομής

Πριν ξεκινήσει η φόρτιση της δοκού με την ανάρτηση μαζών ,επιβεβαιώνεται ότι ο αισθητήρας είναι κατάλληλα συνδεδεμένος στον βραχίονα και δεν έχει υποστεί κάποια σημαντική βλάβη που θα οδηγούσε στη καταγραφή λανθασμένων δεδομένων.

Στην συνέχεια, φορτίζεται προσεκτικά η δοκός στη θέση που δείχνει η εικόνα 3, χρησιμοποιώντας το ενδεικτικό φορτίο που υποδεικνύεται στον Πίνακα 3. Καταγράφεται η ψηφιακή ένδειξη της δύναμης αντίδρασης στον μοχλοβραχίονα της καμπτικής ροπής. Η δύναμη αντίδρασης του μοχλοβραχίονα της καμπτικής ροπής υπολογίζεται όπως και στο πείραμα 1 με τη σχέση (2). Στη συνέχεια, ακολουθείται η διαδικασία εύρεσης τιμών των αντιδράσεων των στηρίξεων και της θεωρητικής καμπτικής ροπής, όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή.

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και στις άλλες δυο περιπτώσεις φόρτισης της δοκού (εικόνες 4,5) και συμπληρώνεται ο Πίνακας 3.

Αποτελέσματα

Πίνακας 3

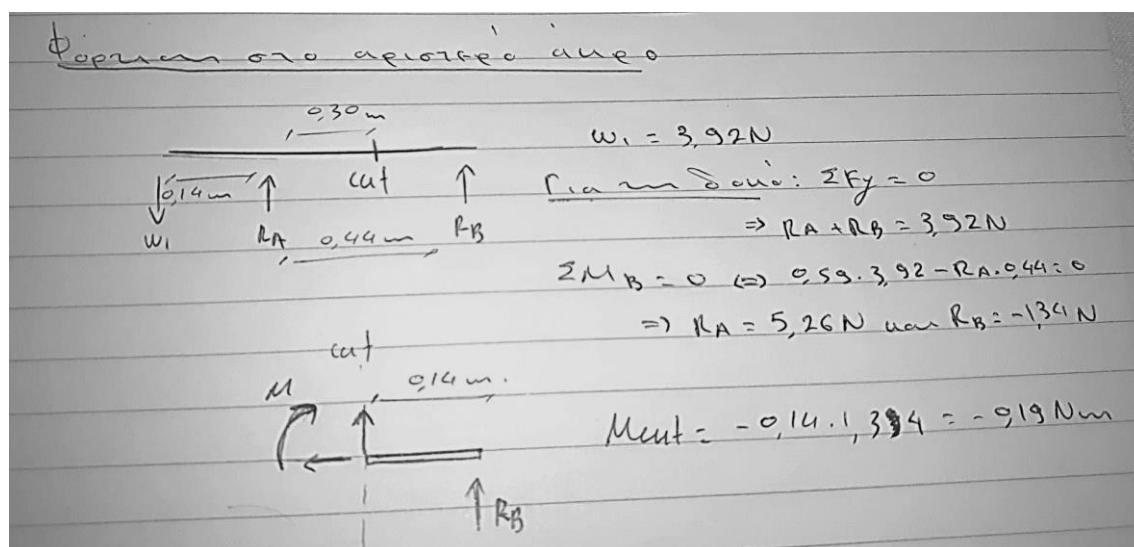
Εικόνα	W1 (N)	W2 (N)	Πειραματική δύναμη (N)	Πειραματική καμπτική ροπή (Nm)	RA (N)	RB (N)	Θεωρητική καμπτική ροπή (Nm)
3	3,92	-	-1,39	-0,17	5,26	-1,34	-0,19
4	1,96	3,92	3,71	0,46	2,58	3,30	0,46
5	4,91	3,92	3,87	0,48	2,58	6,25	0,48

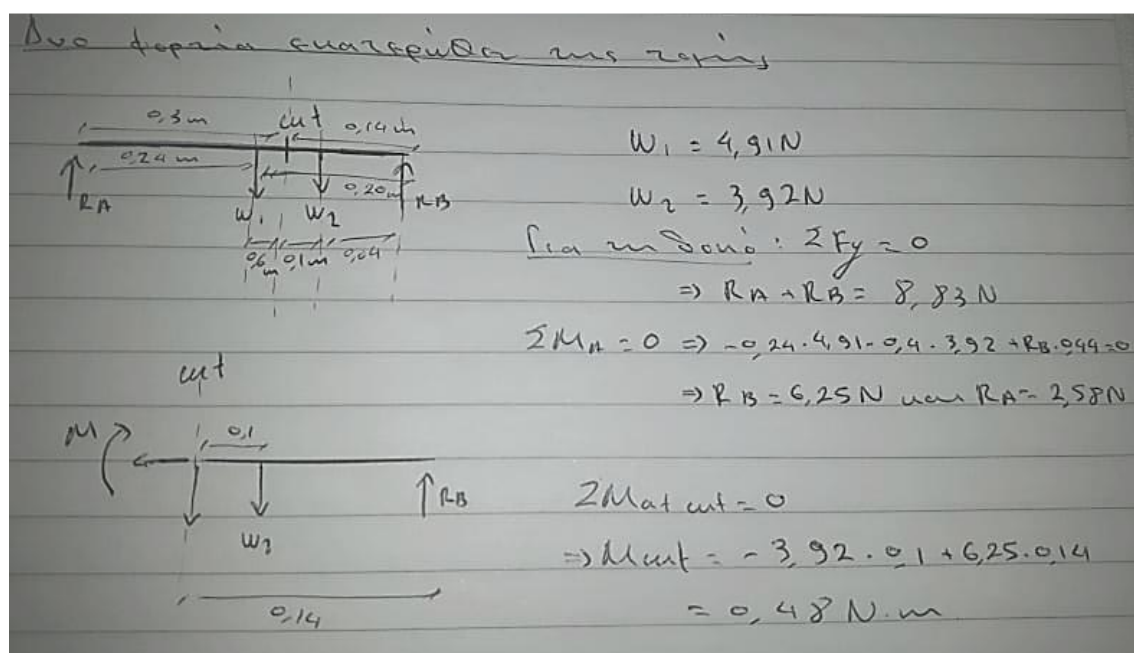
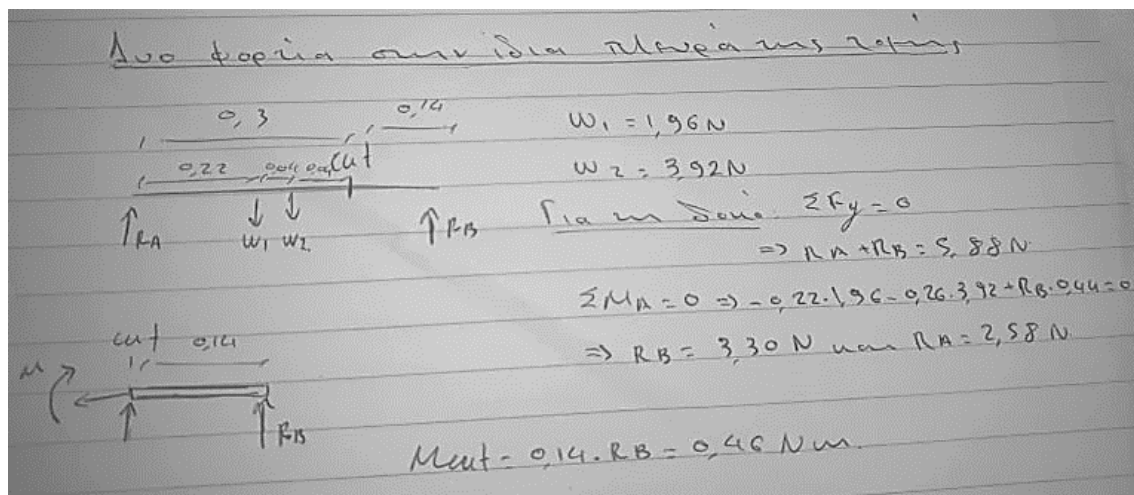
Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον υπολογισμό των απαραίτητων για τη συμπλήρωση του πίνακα μεγεθών, παρουσιάζεται αναλυτικά στις παρακάτω φωτογραφίες.

Η πειραματική καμπτική ροπή υπολογίστηκε από την σχέση (2).

Το αρνητικό πρόσημο στις τιμές των αντιδράσεων στήριξης υποδηλώνει ότι έχουν αντίθετη φορά από αυτή που τους προσδίδεται στα διαγράμματα ελευθέρου σώματος.

Για τη καμπτική ροπή, το αρνητικό πρόσημο δηλώνει αντίθετη φορά από τη προβλεπόμενη κατά τη γενική σύμβαση.





Συμπεράσματα

Στο Πείραμα 2 μελετήθηκε η μεταβολή της καμπτικής ροπής μιας ράβδου σε ένα συγκεκριμένο σημείο (cut position), σε τρεις διαφορετικές συνθήκες φόρτισης. Τα φορτία σε κάθε περίπτωση αναρτήθηκαν σε απόσταση από το σημείο τομής. Η τιμή της καμπτικής ροπής που αναπτύσσεται στο σημείο τομής υπολογίστηκε πειραματικά και θεωρητικά. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3 παρατηρείται ότι στη δεύτερη και στη τρίτη περίπτωση φόρτισης, το σφάλμα μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής τιμής της καμπτικής ροπής είναι μηδενικό (αν εκφραστούν οι τιμές με δυο δεκαδικά). Ακόμα, στη πρώτη περίπτωση φόρτισης το σφάλμα μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών τιμών εμφανίζεται μικρό (0,02 N.m). Η θεώρηση του βάρους της δοκού ως αμελητέου άλλα και η φθορά των μαζών, πιθανών έχουν συμβάλει στη διαμόρφωση του παραπάνω σφάλματος.

Από τα παραπάνω γίνεται εμφανής η ακρίβεια της μεθόδου που ακολουθήθηκε για τους θεωρητικούς υπολογισμούς, καθώς τα αποτελέσματα αυτής ανταποκρίνονται κατά πολύ τη πραγματικότητα. Επομένως, οι εξισώσεις ισορροπίας που χρησιμοποιούνται στη θεωρία δύνανται να προβλέψουν με ακρίβεια την συμπεριφορά μιας δοκού, ανεξάρτητα της περίπτωσης φόρτισης.