

Άσκηση 1. Να εξετάσετε εάν τα παρακάτω διανυσματικά πεδία $\vec{F}$ είναι το πεδίο κλίσεων ∇f μιας συνάρτησης και εάν είναι να βρεθεί η συνάρτηση f

$$i) \vec{F}(\vec{x}) = (y + z, x + z, x + y) \quad ii) \vec{F}(\vec{x}) = (yz \sin(xy), xz \sin(xy), \eta \mu(xy)).$$

Λύση . i) Για το $\vec{F}$ έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}(y + z) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x + z), \quad \frac{\partial}{\partial z}(x + z) = 1 = \frac{\partial}{\partial y}(x + y),$$

$$\text{και } \frac{\partial}{\partial x}(x + y) = 1 = \frac{\partial}{\partial z}(y + z).$$

Επειδή το $\vec{F}(x, y, z)$ είναι ορισμένο στο $\mathbb{R}^3$ που είναι απλό συνεκτικό σύνολο, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ισχύουν οι παραπάνω ισότητες υπάρχει συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$. Εάν πάρουμε το σημείο $(0, 0, 0)$ τότε συνάρτηση δυναμικού είναι

$$f(x, y, z) = \int_0^x (y + z) dt + \int_0^y (0 + z) dt + \int_0^z (0 + 0) dt = xy + xz + yz.$$

ii) Για την $\vec{F}(\vec{x}) = (yz\sigma\nu(xy), xz\sigma\nu(xy), \eta\mu(xy))$

$$\frac{\partial}{\partial y}(yz\sigma\nu(xy)) = z\sigma\nu(xy) - xyz\eta\mu(xy) = \frac{\partial}{\partial x}(xz\sigma\nu(xy))$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(xz\sigma\nu(xy)) = x\sigma\nu(xy) = \frac{\partial}{\partial y}(\eta\mu(xy)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\eta\mu(xy)) = y\sigma\nu(xy) = \frac{\partial}{\partial z}(yz\sigma\nu(xy))$$

Επειδή το $\vec{F}(x,y,z)$ είναι ορισμένο στο $\mathbb{R}^3$ που είναι απλό συνεκτικό σύνολο, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ισχύουν οι παραπάνω ισότητες υπάρχει συνάρτηση δυναμικού για το $\vec{F}$. Εάν $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz\sigma\nu(xy) \Rightarrow f(x,y,z) = z\eta\mu(xy) + g(y,z) \Rightarrow$$

$$xz\sigma\nu(xy) + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = xz\sigma\nu(xy) \Rightarrow g(y,z) = h(z)$$

Έτσι έχουμε $f(x,y,z) = z\eta\mu(xy) + h(z) \Rightarrow$

$$\eta\mu(xy) + h'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \eta\mu(xy) \Rightarrow h(z) = c.$$

Έτσι έχουμε $f(x,y,z) = z\eta\mu(xy) + c.$

Άσκηση 2. Να βρεθεί η μάζα του σύρματος που έχει το σχήμα της καμπύλης $\vec{\rho}(t) = (2t, t^2, t^3/3)$, $t \in [0, 1]$ εάν η πυκνότητα είναι στο σημείο $\vec{\rho}(t)$ είναι ίση με $1 + t$.

Λύση . Έχουμε ότι

$$\vec{\rho}'(t) = (2, 2t, t^2) \Rightarrow \|\vec{\rho}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(t^2 + 2)^2} = t^2 + 2$$

Επίσης $\delta(\vec{\rho}(t)) = 1 + t$. Επομένως η μάζα του σύρματος είναι ίση με

$$M = \int_0^1 (1 + t)(t^2 + 2)dt = \frac{43}{12}.$$

Άσκηση 3. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \sqrt{1 + 4x^2z^2} ds$ όπου C είναι η τομή των επιφανειών $x^2 + z^2 = 1$ και $y = x^2$.

Λύση . Ο κύκλος $x^2 + z^2 = 1$ έχει παραμετρικοποίηση $\vec{\rho}_1(t) = (\sin(t), 0, \eta\mu(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Επειδή $y = x^2$ έχουμε ότι μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{\rho}(t) = (\sin(t), \sin^2(t), \eta\mu(t)), t \in [0, 2\pi].$$

Επίσης $\vec{\rho}'(t) = (\cos(t), 2\sin(t)\eta\mu(t), \eta\mu'(t)) \Rightarrow$

$$\|\vec{\rho}'(t)\| = \sqrt{1 + 4\sin^2(t)\eta\mu^2(t)}.$$

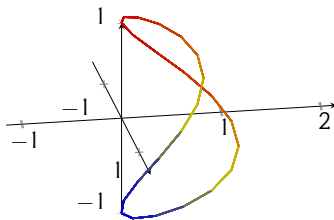
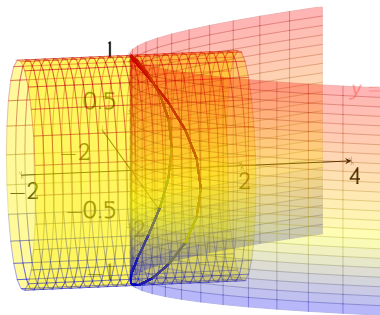
Άσκηση 3. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \sqrt{1 + 4x^2z^2} ds$ όπου C είναι η τομή των επιφανειών $x^2 + z^2 = 1$ και $y = x^2$.

Λύση . Ο κύκλος $x^2 + z^2 = 1$ έχει παραμετρικοποίηση $\vec{\rho}_1(t) = (\sin(t), 0, \eta\mu(t)), t \in [0, 2\pi]$. Επειδή $y = x^2$ έχουμε ότι μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{\rho}(t) = (\sin(t), \sin^2(t), \eta\mu(t)), t \in [0, 2\pi].$$

Επίσης $\vec{\rho}'(t) = (\cos(t), 2\sin(t)\cos(t), \eta\mu(t)) \Rightarrow$

$$\|\vec{\rho}'(t)\| = \sqrt{1 + 4\sin^2(t)\eta\mu^2(t)}.$$



Σχήμα: Οι δύο επιφάνειες και η καμπύλη της τομής τους

Επομένως

$$\begin{aligned}
 \int_C \sqrt{1 + 4x^2 z^2} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\sin^2(t)\eta\mu^2(t)} \sqrt{1 + 4\sin^2(t)\eta\mu^2(t)} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 + 4\sin^2(t)\eta\mu^2(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 + \eta\mu^2(2t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 + \frac{(1 - \sin(4t))}{2} dt = 3\pi - \frac{1}{8} \eta\mu(4t) \Big|_{t=0}^{2\pi} = 3\pi
 \end{aligned}$$

στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποίησαμε τις ταυτότητες

$$\eta\mu(2t) = 2\eta\mu(t)\sin(t), \quad 1 - \sin(2t) = 2\eta\mu^2(t).$$

Άσκηση 4. Να υπολογισθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = (-4xy, 8y, 2)$ που δρα σε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ στο επίπεδο $z = 1$ από το σημείο $A(0, 0, 1)$ ως το σημείο $B(2, 4, 1)$.

Λύση . Η παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{\rho}(x) = (x, x^2, 1), 0 \leq x \leq 2$$

Άσκηση 4. Να υπολογισθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = (-4xy, 8y, 2)$ που δρα σε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ στο επίπεδο $z = 1$ από το σημείο $A(0, 0, 1)$ ως το σημείο $B(2, 4, 1)$.

Λύση . Η παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{\rho}(x) = (x, x^2, 1), 0 \leq x \leq 2$$

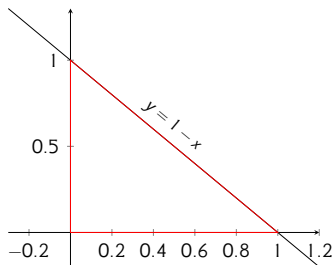
Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_C -4xydx + 8ydy + 2dz &= \int_0^2 (-4xx^2 + 8x^2 2x + 2 \cdot 0) dx \\ &= \int_0^2 -4x^3 + 16x^3 dx \\ &= \int_0^2 12x^3 dx = 3x^4 \Big|_{x=0}^2 = 3 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $x + y = 1$, διαγραφόμενη με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Λύση . Το τρίγωνο αποτελείται από τρεις πλευρές και θα βρούμε παραμετρικοποίηση για κάθε πλευρά με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t, 0) & t \in [0, 1] \\ (1-t, t) & t \in [0, 1] \\ (0, 1-t) & t \in [0, 1] \end{cases}$$



Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^1 0 \cdot 1 + t^2 \cdot 0 dt + \int_0^1 t^2 \cdot (-1) + (1-t)^2 \cdot 1 dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^2 \cdot 0 + 0^2 \cdot (-1) dt \\ &= \int_0^1 -t^2 + (1-t)^2 dt = \int_0^1 1 - 2t dt = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Έστω $\vec{\rho}$ μια C^1 καμπύλη και $\vec{\phi}$ ένα διανυσματικό πεδίο.

α) Εάν το $\vec{\phi}$ είναι κάθετο στην καμπύλη αποδείξτε ότι $\int_{\vec{\rho}} \vec{\phi} ds = 0$.

β) Εάν $\vec{\phi}(\vec{\rho}(t)) = \lambda(t)\vec{\rho}'(t)$, $\lambda(t) > 0$, ναδειχθεί ότι $\oint_{\vec{\rho}} \vec{\phi} ds = \int_{\vec{\rho}} \|\vec{\phi}\| ds$.

Λύση . Έστω $\vec{\rho}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

α) Επειδή $\vec{\phi}$ κάθετο στην καμπύλη ισχύει ότι $\langle \vec{\phi}(\vec{\rho}(t)), \vec{\rho}'(t) \rangle = 0$ για κάθε t . Έτσι παίρνουμε

$$\int_{\vec{\rho}} \vec{\phi} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \vec{\phi}(\vec{\rho}(t)), \vec{\rho}'(t) \rangle dt = \int_{\alpha}^{\beta} 0 dt = 0$$

Άσκηση 6. Έστω $\vec{\rho}$ μια C^1 καμπύλη και $\vec{\Phi}$ ένα διανυσματικό πεδίο.

α) Εάν το $\vec{\Phi}$ είναι κάθετο στην καμπύλη αποδείξτε ότι $\int_{\vec{\rho}} \vec{\Phi} ds = 0$.

β) Εάν $\vec{\Phi}(\vec{\rho}(t)) = \lambda(t)\vec{\rho}'(t)$, $\lambda(t) > 0$, ναδειχθεί ότι $\int_{\vec{\rho}} \vec{\Phi} ds = \int_{\vec{\rho}} \|\vec{\Phi}\| ds$.

Λύση . Έστω $\vec{\rho}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

α) Επειδή $\vec{\Phi}$ κάθετο στην καμπύλη ισχύει ότι $\langle \vec{\Phi}(\vec{\rho}(t)), \vec{\rho}'(t) \rangle = 0$ για κάθε t . Έτσι παίρνουμε

$$\int_{\vec{\rho}} \vec{\Phi} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \vec{\Phi}(\vec{\rho}(t)), \vec{\rho}'(t) \rangle dt = \int_{\alpha}^{\beta} 0 dt = 0$$

β) Για το δεύτερο ερώτημα

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\rho}} \vec{\Phi} ds &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle \lambda(t)(\vec{\rho}'(t)), \vec{\rho}'(t) \rangle dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) \|\vec{\rho}'(t)\| \cdot \|\vec{\rho}'(t)\| dt = \int_{\vec{\rho}} \|\vec{\Phi}\| ds \end{aligned}$$

εφόσον $\|\vec{\Phi}(\vec{\rho}(t))\| = \lambda(t) \|\vec{\rho}'(t)\|$.

Άσκηση 7. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$\vec{F}(x,y) = (cxy, x^6y^2)$ όπου c θετικός πραγματικός αριθμός.

Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η τιμή του a συνάρτηση του c για την οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ από το σημείο $(0,0)$ έως την ευθεία $x = 1$ κατά μήκος της καμπύλης $y = ax^b$ είναι ανεξάρτητο του b .

Άσκηση 7. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$\vec{F}(x,y) = (cxy, x^6y^2)$ όπου c θετικός πραγματικός αριθμός.

Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η τιμή του a συνάρτηση του c για την οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ από το σημείο $(0,0)$ έως την ευθεία $x = 1$ κατά μήκος της καμπύλης $y = ax^b$ είναι ανεξάρτητο του b .

Λύση . Η παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{\rho}(x) = (x, ax^b), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Άσκηση 7. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$\vec{F}(x,y) = (cxy, x^6y^2)$ όπου c θετικός πραγματικός αριθμός.

Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η τιμή του a συνάρτηση του c για την οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ από το σημείο $(0,0)$ έως την ευθεία $x=1$ κατά μήκος της καμπύλης $y=ax^b$ είναι ανεξάρτητο του b .

Λύση . Η παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{\rho}(x) = (x, ax^b), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\rho}} cxy dx + x^6y^2 dy &= \int_0^1 cxax^b + x^6a^2x^{2b}abx^{b-1} dx \\ &= \int_0^1 acx^{b+1} + a^3bx^{3b+5} dx \\ &= \frac{ca}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6} = \frac{1}{3(b+2)}(3ca + a^3b) \end{aligned}$$

Εάν $3ca = 2a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3c/2}$ τότε

$$\frac{1}{3(b+2)}(3ca + a^3b) = \frac{1}{3(b+2)}(2a^3 + a^3b) = \frac{a^3}{3}.$$

Έτσι έχουμε ότι για $a = \sqrt{3c/2}$ η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του b .

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί το $\int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$, όπου C είναι μια καμπύλη που ενώνει το σημείο $(1, 1, 1)$ με το $(1, 2, 4)$.

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί το $\int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$, όπου C είναι μια καμπύλη που ενώνει το σημείο $(1, 1, 1)$ με το $(1, 2, 4)$. Για το $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2 z, x^2 y)$ έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xyz) = 2xz = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z), \quad \frac{\partial}{\partial z}(x^2 z) = x^2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y)$$

και $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) = 2xy = \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)$. Το $\vec{F}(x, y, z)$ είναι ορισμένο στον $\mathbb{R}^3$ που είναι απλό συνεκτικό σύνολο, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και επειδή ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες παίρνουμε ότι το πεδίο κλίσεων μιας συνάρτησης και άρα είναι συντηρητικό.

Εάν $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ το $\vec{F}$ είναι το πεδίο κλίσης της

$$f(x, y, z) = \int_0^x 2tyz dt + \int_0^y 0^2 z dt + \int_0^z 0^2 \cdot 0 dt = x^2 yz.$$

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί το $\int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$, όπου C είναι μια καμπύλη που ενώνει το σημείο $(1, 1, 1)$ με το $(1, 2, 4)$. Για το $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2 z, x^2 y)$ έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xyz) = 2xz = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z), \quad \frac{\partial}{\partial z}(x^2 z) = x^2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y)$$

και $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) = 2xy = \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)$. Το $\vec{F}(x, y, z)$ είναι ορισμένο στον $\mathbb{R}^3$ που είναι απλό συνεκτικό σύνολο, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και επειδή ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες παίρνουμε ότι το πεδίο κλίσεων μιας συνάρτησης και άρα είναι συντηρητικό.

Εάν $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ το $\vec{F}$ είναι το πεδίο κλίσης της

$$f(x, y, z) = \int_0^x 2tyz dt + \int_0^y 0^2 z dt + \int_0^z 0^2 \cdot 0 dt = x^2 yz.$$

Επομένως

$$\int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz = \int_{(1,1,1)}^{(1,2,4)} \nabla f ds = f(1, 2, 4) - f(1, 1, 1) = 7.$$

Άσκηση 9. α) Ναδειχθεί ότι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\oint_C xy^2 dx + (x^2 y + 2x) dy$ όπου C είναι η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου είναι ανάλογη του εμβαδού του παραλληλογράμμου

β) Ναδειχθεί ότι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\oint_C 4x^3 y dx + (x^4 + y^4) dy$ είναι μηδέν για κάθε απλή κλειστή καμπύλη.

Λύση . α) Εάν το παραλληλόγραμμο έχει κορυφές τα σημεία $(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\beta, \delta), (\alpha, \delta)$ τότε μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} ((1-t)\alpha + t\beta, \gamma) & t \in [0, 1] \\ (\beta, (1-t)\gamma + t\delta) & t \in [0, 1] \\ ((1-t)\beta + t\alpha, \delta) & t \in [0, 1] \\ (\alpha, (1-t)\delta + t\gamma) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \oint_C xy^2 dx + (x^2 y + 2x) dy &= \int_0^1 ((1-t)\alpha + t\beta) \gamma^2 (\beta - \alpha) + 0 dt \\ &+ \int_0^1 0 + \beta^2 (((1-t)\gamma + t\delta) + 2\beta) (\delta - \gamma) dt \\ &+ \int_0^1 ((1-t)\beta + t\alpha) \delta^2 (\alpha - \beta) + 0 dt + \int_0^1 0 + (\alpha^2 ((1-t)\delta + t\gamma) + 2\alpha) (\gamma - \delta) dt \\ &= 2(\beta - \alpha)(\delta - \gamma) = 2(\text{εμβαδόν παραλληλογράμμου}). \end{aligned}$$

β) Εάν δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y) = (4x^3y, x^4)$ είναι συντηρητικό τότε θα έχουμε το ζητούμενο. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y) = 4x^3 = \frac{\partial}{\partial x}(x^4).$$

Επειδή το $\vec{F}(x,y)$ είναι ορισμένο στο $\mathbb{R}^2$ και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους από την παραπάνω ισότητα έχουμε ότι είναι συντηρητικό.

Άσκηση 10. Να υπολογισθεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ κατά τη μετακίνηση ενός υλικού σημείου από το σημείο $(1, 0)$ στο σημείο $(-1, 0)$ κατά μήκος της έλλειψης $\beta^2 x^2 + y^2 = \beta^2$.

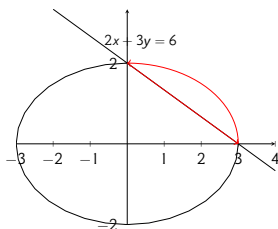
Λύση . Μια παραμετροποίηση της καμπύλης που διατηρεί τον προσανατολισμό είναι η

$$\vec{\rho}(t) = (\sin(t), \beta \mu(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Επομένως το έργο είναι

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{\rho}} (3y^2 + 2)dx + 16x dy \\ &= \int_0^\pi (3\beta^2 \mu^2(t) + 2)(-\eta \mu(t)) + 16 \sin(t) \beta \cos(t) dt \\ &= \int_0^\pi -3\beta^2 \eta \mu^3(t) - 2\eta \mu(t) + 16 \sin(t) \beta \cos(t) dt \\ &= \int_0^\pi -3\beta^2 \eta \mu(t)(1 - \sin^2(t)) - 2\eta \mu(t) + 16\beta \frac{1 - \sin(2t)}{2} dt \\ &= -4\beta^2 - 4 + 8\beta\pi. \end{aligned}$$

Άσκηση 11. Να βρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ διαμέσου της καμπύλης C που είναι η συνοριακή καμπύλη της περιοχής που περικλείεται άνω από την έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$ και κάτω από την ευθεία $2x + 3y = 6$.



Η έλλειψη και η ευθεία τέμνονται για τα x που

$$4x^2 + 9\left(2 - \frac{2}{3}x\right)^2 = 36 \Rightarrow 8x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3.$$

Στο διάστημα $[0, 3]$ η έλλειψη είναι πάνω από την καμπύλη. Μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού είναι η

$$\vec{\rho}(t) = \begin{cases} (3\cos(t), 2\sin(t)), & t \in [0, \pi/2] \\ (3t, 2 - 2t) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
 \text{ροή μέσω της } C &= \int_{\vec{\rho}} xdy - ydx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sigma\upsilon\nu(t)2\sigma\upsilon\nu(t) - 2\eta\mu(t)(-3\eta\mu(t))dt \\
 &\quad + \int_0^1 3t(-2) - (2-2t)3dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6dt + \int_0^1 (-6)dt = 3\pi - 6.
 \end{aligned}$$