

Άσκηση

Βρείτε όλα x, y για τα οποία

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 12xy + y^3)$$

Άσκηση

Βρείτε όλα x, y για τα οποία

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 12xy + y^3)$$

Λύση

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 9x^2 - 12y \\ \Rightarrow 3x^2 - 4y &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Άσκηση

Βρείτε όλα x, y για τα οποία

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 12xy + y^3)$$

Λύση

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 9x^2 - 12y \\ \Rightarrow 3x^2 - 4y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 12xy + y^3) = -12x + 3y^2 \\ \Rightarrow y^2 - 4x &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Άσκηση

Βρείτε όλα x, y για τα οποία

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 12xy + y^3)$$

Λύση

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 - 12xy + y^3) = 9x^2 - 12y \\ \Rightarrow 3x^2 - 4y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 12xy + y^3) = -12x + 3y^2 \\ \Rightarrow y^2 - 4x &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Από (1),(2) παίρνουμε

$$4x = y^2 = \frac{9}{16}x^4 \Rightarrow 64x - 9x^4 = 0 \Rightarrow x(64 - 9x^3) = 0.$$

Εάν $x = 0$ τότε και $y = 0$. Εάν $9x^3 = 64 \Rightarrow x = 4/\sqrt[3]{9}$ και $y = 12/\sqrt[3]{9^2}$.

Άσκηση

Εάν $f(x, y) = xy + \sin(y) + y\eta\mu(x)$ να βρεθούν οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi, 0).$$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + y\cos(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = 0.$$

Άσκηση

Εάν $f(x, y) = xy + \sin(y) + y\eta\mu(x)$ να βρεθούν οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi, 0).$$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + y\sin(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \eta\mu(y) + \eta\mu(x) \Rightarrow$$

Άσκηση

Εάν $f(x, y) = xy + \sin(y) + y\eta\mu(x)$ να βρεθούν οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi, 0).$$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + y\sin(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \eta\mu(y) + \eta\mu(x) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 + \sin(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi, 0) = 1 - 1 = 0.$$

Άσκηση

Εάν $z = f(x, y)$ και $x = g(t, s), y = h(t, s)$ και γνωρίζουμε ότι

$$g(3, 4) = 7, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(3, 4) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial s}(3, 4) = 2$$

$$h(3, 4) = 1, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(3, 4) = 5, \quad \frac{\partial h}{\partial s}(3, 4) = 6$$

και $\frac{\partial f}{\partial x}(7, 1) = 8, \frac{\partial f}{\partial y}(7, 1) = 6$ να βρεθούν οι

$$\frac{\partial z}{\partial t}(3, 4) \text{ και } \frac{\partial z}{\partial s}(3, 4).$$

Λύση

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $z = z(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$. Από κανόνα αλυσίδας

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s), y(t, s)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t, s), y(t, s)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t, s).$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t}(3, 4) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(3, 4), y(3, 4)) \frac{\partial x}{\partial t}(3, 4) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(3, 4), y(3, 4)) \frac{\partial y}{\partial t}(3, 4) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(7, 1) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(7, 1) \cdot 5 \\ &= 8 \cdot 1 + 6 \cdot 5 = 38.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial t}(3, 4) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(3, 4), y(3, 4)) \frac{\partial x}{\partial t}(3, 4) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(3, 4), y(3, 4)) \frac{\partial y}{\partial t}(3, 4) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(7, 1) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(7, 1) \cdot 5 \\
 &= 8 \cdot 1 + 6 \cdot 5 = 38.
 \end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial s}(3, 4) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(3, 4), y(3, 4)) \frac{\partial x}{\partial s}(3, 4) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(3, 4), y(3, 4)) \frac{\partial y}{\partial s}(3, 4) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(7, 1) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(7, 1) \cdot 6 \\
 &= 8 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 52.
 \end{aligned}$$

Άσκηση

Προς ποια κατεύθυνση η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ στο σημείο $(1,1)$ ισούται με μηδέν;

Λύση

Έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Άσκηση

Προς ποια κατεύθυνση η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ στο σημείο $(1,1)$ ισούται με μηδέν;

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Άσκηση

Προς ποια κατεύθυνση η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ στο σημείο $(1,1)$ ισούται με μηδέν;

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Εάν $(x,y) \neq (0,0)$ τότε έχουμε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος στο (x,y) είναι μηδέν στις κατευθύνσεις που είναι κάθετες στο $\nabla f(x,y)$.

Επειδή $\nabla f(1, 1) = (1, -1)$ έχουμε ότι ένα διάνυσμα (a, b) είναι κάθετο στο $\nabla f(1, 1)$ όταν

$$\langle \nabla f(1, 1), (a, b) \rangle = 0 \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot (-1) = 0 \Rightarrow a = b.$$

Επειδή $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε τις κατευθύνσεις $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Άσκηση

Εάν $f'(\vec{\alpha} : (2, 3)) = 1$ και $f'(\vec{\alpha} : (1, 1)) = 2$ να βρεθούν
α) το διάνυσμα $\nabla f(\vec{\alpha})$
β) τα σημεία (x, y) για τα οποία $f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = 6$.

Άσκηση

Εάν $f'(\vec{\alpha} : (2, 3)) = 1$ και $f'(\vec{\alpha} : (1, 1)) = 2$ να βρεθούν

α) το διάνυσμα $\nabla f(\vec{\alpha})$

β) τα σημεία (x, y) για τα οποία $f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = 6$.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = \langle \nabla f(\vec{\alpha}), (x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})y.$$

Άσκηση

Εάν $f'(\vec{\alpha} : (2, 3)) = 1$ και $f'(\vec{\alpha} : (1, 1)) = 2$ να βρεθούν

α) το διάνυσμα $\nabla f(\vec{\alpha})$

β) τα σημεία (x, y) για τα οποία $f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = 6$.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = \langle \nabla f(\vec{\alpha}), (x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})y.$$

Έτσι έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})2 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})3 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})1 = 2$.

Άσκηση

Εάν $f'(\vec{\alpha} : (2, 3)) = 1$ και $f'(\vec{\alpha} : (1, 1)) = 2$ να βρεθούν

α) το διάνυσμα $\nabla f(\vec{\alpha})$

β) τα σημεία (x, y) για τα οποία $f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = 6$.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = \langle \nabla f(\vec{\alpha}), (x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})y.$$

Έτσι έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})2 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})3 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})1 = 2$.

Λύνοντας στο σύστημα βρίσκουμε $\nabla f(\vec{\alpha}) = (5, -3)$.

Άσκηση

Εάν $f'(\vec{\alpha} : (2, 3)) = 1$ και $f'(\vec{\alpha} : (1, 1)) = 2$ να βρεθούν

α) το διάνυσμα $\nabla f(\vec{\alpha})$

β) τα σημεία (x, y) για τα οποία $f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = 6$.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = \langle \nabla f(\vec{\alpha}), (x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})y.$$

Έτσι έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})2 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})3 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\alpha})1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\alpha})1 = 2$.

Λύνοντας στο σύστημα βρίσκουμε $\nabla f(\vec{\alpha}) = (5, -3)$.

Επίσης $f'(\vec{\alpha} : (x, y)) = 6 \Rightarrow 5x - 3y = 6$ και επομένως τα σημεία της ευθείας αυτής ικανοποιούν το ερώτημα του β) ερωτήματος.

Άσκηση

Να δείξετε ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος της $g(x,y) = \frac{y^2}{x}$ σε κάθε σημείο της έλλειψης $2x^2 + y^2 = 1$, με $x \neq 0$, ως προς το διάνυσμα που κάθετο στην έλλειψη στο σημείο αυτό, είναι ίση με το μηδέν.

Λύση

Εάν (x,y) είναι σημείο της έλλειψης $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ τότε το διάνυσμα $\nabla f(x,y) = (4x, 2y)$ είναι κάθετο στην εφαπτομένη και άρα στην έλλειψη.

Η συνάρτηση $g(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x,y) , $x \neq 0$ οπότε σε αυτά σημεία έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g'((x,y) : (4x, 2y)) &= \langle \nabla g(x,y), (2x,y) \rangle = -\frac{y^2}{x^2} 4x + \frac{2y}{x} 2y \\ &= -4\frac{y^2}{x} + 4\frac{y^2}{x} = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση

Έστω $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$. Να βρεθεί η διεύθυνση στην οποία η f μεταβάλλεται με τον πιο γρήγορο ρυθμό στο σημείο $(2, -1, 2)$ και να βρεθεί η παράγωγος της f στο δοσμένο σημείο στη κατεύθυνση αυτού του διανύσματος.

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (2(x+y) + 2(x+z), 2(x+y) + 2(y+z), 2(z+y) + 2(x+z)) \\ &= (4x + 2y + 2z, 2x + 4y + 2z, 2x + 2y + 4z).\end{aligned}$$

Άσκηση

Έστω $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$. Να βρεθεί η διεύθυνση στην οποία η f μεταβάλλεται με τον πιο γρήγορο ρυθμό στο σημείο $(2, -1, 2)$ και να βρεθεί η παράγωγος της f στο δοσμένο σημείο στη κατεύθυνση αυτού του διανύσματος.

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (2(x+y) + 2(x+z), 2(x+y) + 2(y+z), 2(z+y) + 2(x+z)) \\ &= (4x + 2y + 2z, 2x + 4y + 2z, 2x + 2y + 4z).\end{aligned}$$

Επομένως η f στο σημείο $(2, -1, 2)$ μεταβάλλεται με τον πιο γρήγορο ρυθμό στην κατεύθυνση $\vec{\alpha} = \frac{\nabla f(2, -1, 2)}{\|\nabla f(2, -1, 2)\|} \frac{(10, 4, 10)}{\sqrt{216}}$ και η παράγωγος θα είναι ίση με

$$f'((2, -1, 2) : \vec{\alpha}) = \langle \nabla f(2, -1, 2), \vec{\alpha} \rangle = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

Άσκηση

Εάν η $y^3 + 4xy = 16$ ορίζει το y ως συνάρτηση του x , $y = h(x)$ για $x > 0$,

- ❶ δείξτε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{-4y}{3y^2 + 4x}$
- ❷ εάν $z = f(x, y(x))$. $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 8$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 10$ να βρεθεί η $z'(1)$.

Άσκηση

Εάν η $y^3 + 4xy = 16$ ορίζει το y ως συνάρτηση του x , $y = h(x)$ για $x > 0$,

❶ δείξτε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{-4y}{3y^2 + 4x}$

❷ εάν $z = f(x, y(x))$. $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 8$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 10$ να βρεθεί η $z'(1)$.

Λύση

1) Έχουμε ότι η $F(x, y) = y^3 + 4xy - 16 = 0$ ορίζει το y ως συνάρτηση του x . Επομένως

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = \frac{-4y}{3y^2 + 4x}.$$

2) Εάν $x = 1$ τότε $y^3 + 4y = 16$ και η $y = 2$ είναι λύση. Εάν $\vec{\rho}(x) = (x, y(x))$ έχουμε ότι $z(x) = f(\vec{\rho}(x))$. Από κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dz}{dx} = \langle \nabla f(\vec{\rho}(x)), \vec{\rho}'(x) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}.$$

Για $x = 1, y = 2$ παίρνουμε $z'(1) = 8 + 10\left(\frac{-8}{3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}\right)$.

Άσκηση

Η $\eta\mu(x+y) + \eta\mu(y+z) = 1$ ορίζει το z συνάρτηση των x, y δηλαδή $z = f(x, y)$. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Άσκηση

Η $\eta\mu(x+y) + \eta\mu(y+z) = 1$ ορίζει το z συνάρτηση των x, y δηλαδή $z = f(x, y)$. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Λύση

Θέτουμε $F(x, y, z) = \eta\mu(x+y) + \eta\mu(y+z) - 1 = 0$. Τότε έχουμε,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu(y+z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu(y+z)}$$

Επίσης

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu(y+z)} \right)$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sin(x+y) + \sin(y+z)}{\sin(y+z)} \right) \\ &= -\frac{(-\eta\mu(x+y) - \eta\mu(y+z) \frac{\partial z}{\partial x}) \sin(y+z)}{\sin^2(y+z)}\end{aligned}$$

—

Επίσης

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu(y+z)} \right) \\
&= -\frac{(-\eta\mu(x+y) - \eta\mu(y+z) \frac{\partial z}{\partial x}) \sigma\upsilon\nu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu^2(y+z)} \\
&\quad - \frac{-(\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(y+z))(-\eta\mu(y+z) \frac{\partial z}{\partial x})}{\sigma\upsilon\nu^2(y+z)}
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu(y+z)} \right) \\
 &= -\frac{(-\eta\mu(x+y) - \eta\mu(y+z) \frac{\partial z}{\partial x}) \sigma\upsilon\nu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu^2(y+z)} \\
 &\quad - \frac{-(\sigma\upsilon\nu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(y+z))(-\eta\mu(y+z) \frac{\partial z}{\partial x})}{\sigma\upsilon\nu^2(y+z)} \\
 &= \frac{\eta\mu(x+y)\sigma\upsilon\nu^2(y+z) + \sigma\upsilon\nu^2(x+y)\eta\mu(y+z)}{\sigma\upsilon\nu^3(y+z)}
 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sigma\upsilon\nu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu(y+z)}$.

Άσκηση

Μια εταιρία θα κατασκευάσει ένα κουτί όγκου 3m^3 . Αν το κόστος υλικού ανά τετραγωνική μονάδα είναι 1 ευρώ για την πάνω και κάτω πλευρά, 1,5 ευρώ για την δεξιά και αριστερή πλευρά και 2 ευρώ για την εμπρός και πίσω πλευρά, βρείτε τις διαστάσεις που ελαχιστοποιούν το κόστος παραγωγής.

Λύση

Εάν η βάση του αποτελείται από τις πλευρές x, y και το ύψος του είναι z τότε το κόστος είναι

$$K(x, y, z) = (2xy)1 + (2xz)1.5 + (2yz)2 = 2xy + 3xz + 4yz.$$

Επομένως θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $K(x, y, z)$ υπό τον περιορισμό $R(x, y, z) = xyz - 3 = 0$

Σχηματίζουμε το σύστημα

$$\nabla K(x, y, z) = \lambda \nabla R(x, y, z), \quad R(x, y, z) = 0. \quad (3)$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$(2y + 3z, 2x + 4z, 3x + 4y) = \lambda(yz, xz, xy) \Rightarrow$$

$$2y + 3z = \lambda yz, 2x + 4z = \lambda xz, 3x + 4y = \lambda xy.$$

Διαιρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{2y + 3z}{2x + 4z} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2xy + 3zx = 2xy + 4zy \Rightarrow 3x = 4y. \quad (4)$$

Διαιρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{2y + 3z}{2x + 4z} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2xy + 3zx = 2xy + 4zy \Rightarrow 3x = 4y. \quad (4)$$

Διαιρώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{3x + 4y}{2x + 4z} = \frac{y}{z} \Rightarrow 3xz + 4yz = 2xy + 4zy \Rightarrow 3z = 2y. \quad (5)$$

Διαιρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{2y + 3z}{2x + 4z} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2xy + 3zx = 2xy + 4zy \Rightarrow 3x = 4y. \quad (4)$$

Διαιρώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{3x + 4y}{2x + 4z} = \frac{y}{z} \Rightarrow 3xz + 4yz = 2xy + 4zy \Rightarrow 3z = 2y. \quad (5)$$

Από τις (4),(5) αντικαθιστώντας στην $xyz = 3$ παίρνουμε $\frac{4y}{3}y\frac{2y}{3} = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$. Τότε $x = 2$ και $z = 1$.

Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 4$ τα οποία έχουν τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $x + y = 4$.

Λύση

Ας θυμηθούμε ότι η απόσταση σημείου (x, y) από την ευθεία $ax + by = \gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$d(x, y) = \frac{|ax + by - \gamma|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Επομένως θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της $f(x, y) = \frac{x+y-4}{\sqrt{2}}$ υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 4$ τα οποία έχουν τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $x + y = 4$.

Λύση

Ας θυμηθούμε ότι η απόσταση σημείου (x, y) από την ευθεία $ax + by = \gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$d(x, y) = \frac{|ax + by - \gamma|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Επομένως θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της $f(x, y) = \frac{x+y-4}{\sqrt{2}}$ υπό τον περιορισμό $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \quad g(x, y) = 0.$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \lambda(2x, 8y) \Rightarrow 2\lambda x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 8\lambda y \Rightarrow x = 4y.$$

Από την $x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow 20y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 1/\sqrt{5}$. Άρα τα σημεία $x_1 = (\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ και $x_2 = (\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$ είναι τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y)$ περιορισμένη στην έλλειψη. Επειδή

$$|f(x_1)| = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{2}} < \frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = |f(x_2)|$$

το x_2 είναι το σημείο με τη μεγαλύτερη απόσταση και το x_1 το σημείο με την μικρότερη απόσταση από την ευθεία.

Άσκηση

Να βρεθεί το σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ για το οποίο το εμβαδόν που σχηματίζεται από τους θετικούς άξονες και την εφαπτομένη σε αυτό το σημείο να έχει το ελάχιστο εμβαδόν.

Λύση

Η εφαπτομένη της έλλειψης $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ στο σημείο (x_0, y_0) έχει εξίσωση

$$< \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) > = 0 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(a^2/x_0, 0)$ και τον y -άξονα στο σημείο $(0, b^2/y_0)$. Άρα το εμβαδόν που σχηματίζεται από τους θετικούς άξονες και την εφαπτομένη είναι ίσο με $E = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0}$.

Έτσι έχουμε ότι θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο της

$$f(x,y) = \frac{a^2 b^2}{2xy} \text{ υπό τον περιορισμό } g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange σχηματίζουμε το σύστημα

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange σχηματίζουμε το σύστημα

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\left(\frac{-a^2 b^2}{2x^2 y}, \frac{-a^2 b^2}{2xy^2} \right) = \lambda \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right) \Rightarrow -a^4 b^2 = 4\lambda x^3 y, \quad -a^2 b^4 = 4\lambda xy^3.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange σχηματίζουμε το σύστημα

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\left(\frac{-a^2 b^2}{2x^2 y}, \frac{-a^2 b^2}{2x y^2} \right) = \lambda \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right) \Rightarrow -a^4 b^2 = 4\lambda x^3 y, \quad -a^2 b^4 = 4\lambda x y^3.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι κανένας όρος στις παραπάνω ισότητες δεν είναι μηδέν. Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε ότι

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange σχηματίζουμε το σύστημα

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$\left(\frac{-a^2b^2}{2x^2y}, \frac{-a^2b^2}{2xy^2}\right) = \lambda \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right) \Rightarrow -a^4b^2 = 4\lambda x^3y, \quad -a^2b^4 = 4\lambda xy^3.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι κανένας όρος στις παραπάνω ισότητες δεν είναι μηδέν. Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε ότι

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$. Αντικαθιστώντας στην $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ παίρνουμε ότι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2b^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \pm a/\sqrt{2}.$$

Επειδή θέλουμε να βρούμε τα σημεία του πρώτου τεταρτημόριου έχουμε ότι η μοναδική λύση που προκύπτει είναι η $(x,y) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$.