

Γενική Χημεία

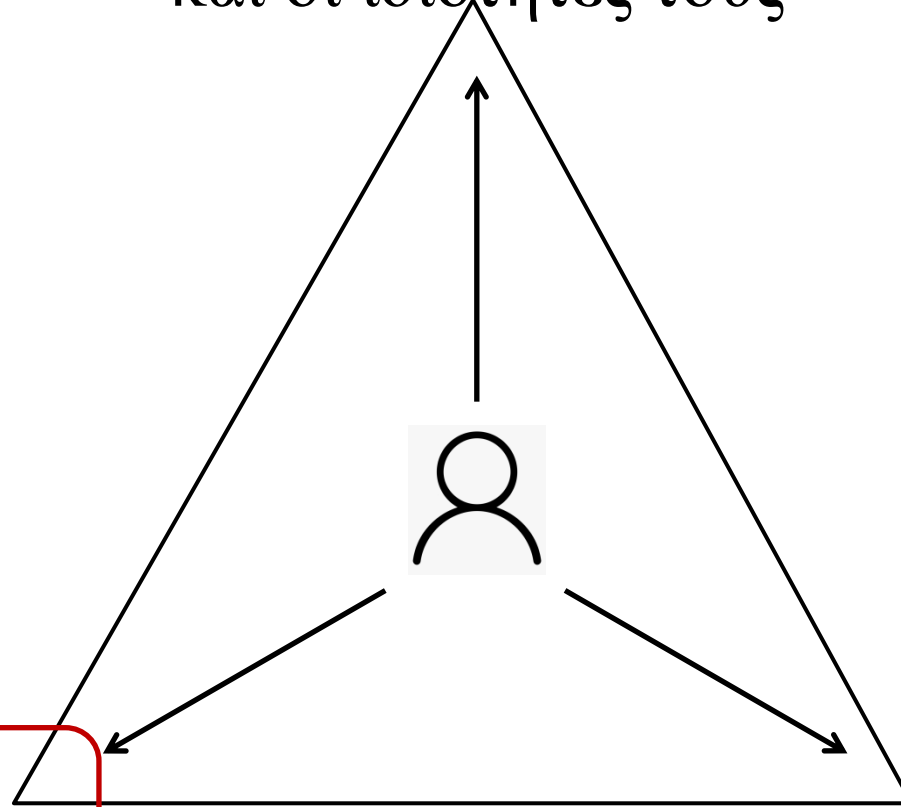
Νίκος Ξεκουκουλωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

Πολυτεχνείο Κρήτης
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Γραφείο Κ2.125, τηλ.: 28210-37772
e-mail: nikosxek@gmail.com

Το τρίγωνο της Χημείας



Μακρόκοσμος:
Τα υλικά σώματα
και οι ιδιότητές τους



Μικρόκοσμος:
Άτομα, μόρια, ιόντα

Σύμβολα:
π.χ. C, O₂, N₂



Περιεχόμενα: 4^ο Κεφάλαιο

- Ταλαντώσεις και κύματα
- Υλοκυματική θεωρία της ύλης
- Στάσιμα κύματα
- Κβάντωση της ενέργειας: Μέρος 2ο
- Αρχή της αβεβαιότητας



Κεφάλαιο 4: Μαθησιακά αποτελέσματα

- Αφού μελετήσετε αυτό το κεφάλαιο, θα πρέπει να είστε σε θέση:
- ✓ Να περιγράφετε την έννοια της κυματοσυνάρτησης ενός κύματος, καθώς και της διαφορικής εξίσωσης κύματος
- ✓ Να υπολογίζετε το μήκος κύματος διαφόρων κινούμενων σωμάτων στο μικρόκοσμο και στο μακρόκοσμο της ύλης
- ✓ Να εξηγείτε γιατί δεν μπορεί να παρατηρηθεί το μήκος κύματος μακροσκοπικών αντικείμενων
- ✓ Να εξηγείτε την κβάντωση της ενέργειας των στάσιμων κυμάτων



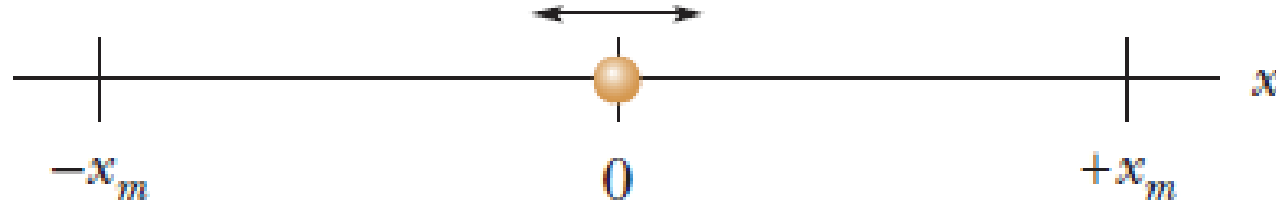
Κεφάλαιο 4: Μαθησιακά αποτελέσματα

- ✓ Με βάση την υλοκυματική θεωρία της ύλης να εξηγείτε:
 - ❖ την κβάντωση της ενέργειας των ατόμων
 - ❖ τη σταθερότητα των ατόμων αλλά και η ικανότητά τους για την πραγματοποίηση χημικών αντιδράσεων
- ✓ Να εξηγείτε πως προκύπτει η αρχή της αβεβαιότητας με βάση την υλοκυματική θεωρία της ύλης
- ✓ Εξηγείτε πως η αρχή της αβεβαιότητας περιορίζει την ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα την ορμή και τη θέση ενός σωματιδίου
- ✓ Να υπολογίζετε την αβεβαιότητα ως προς τη θέση ή την ορμή ενός σωματιδίου



Ταλαντώσεις, απλή αρμονική κίνηση

- Οι **ταλαντώσεις** είναι περιοδικές κινήσεις γύρω από ένα σημείο ισορροπίας.



- Κατά την **απλή αρμονική κίνηση**, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου ως εξής:

Displacement at time t

Phase

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitude

Angular frequency

Time

Phase constant or phase angle

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



Ταλαντώσεις, απλή αρμονική κίνηση

- Η συνάρτηση που δίνει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας προκύπτει ως λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Πράγματι, ισχύει ότι:

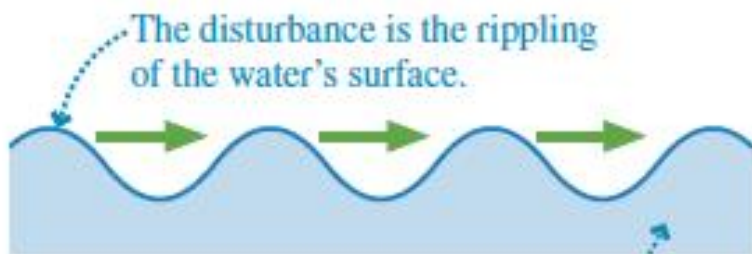
$$\frac{dx}{dt} = x_m \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega x_m \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

Κύματα

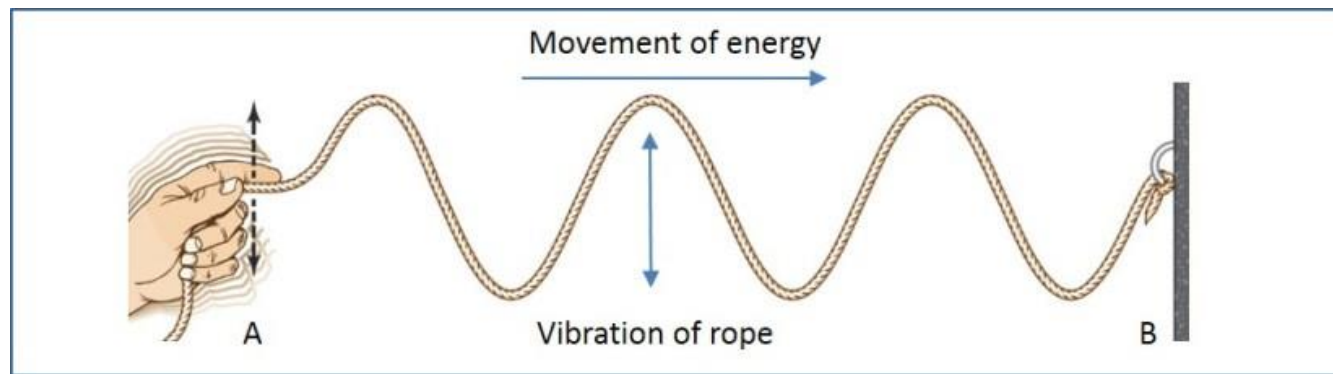
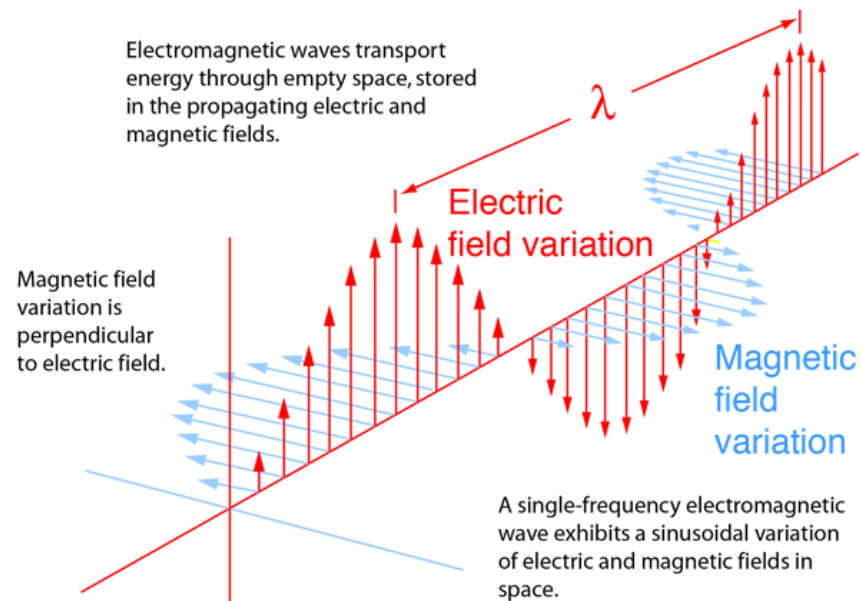


- Το κύμα είναι μία διαταραχή η οποία διαδίδεται στο χώρο.



The water is the medium.

Electromagnetic waves transport energy through empty space, stored in the propagating electric and magnetic fields.

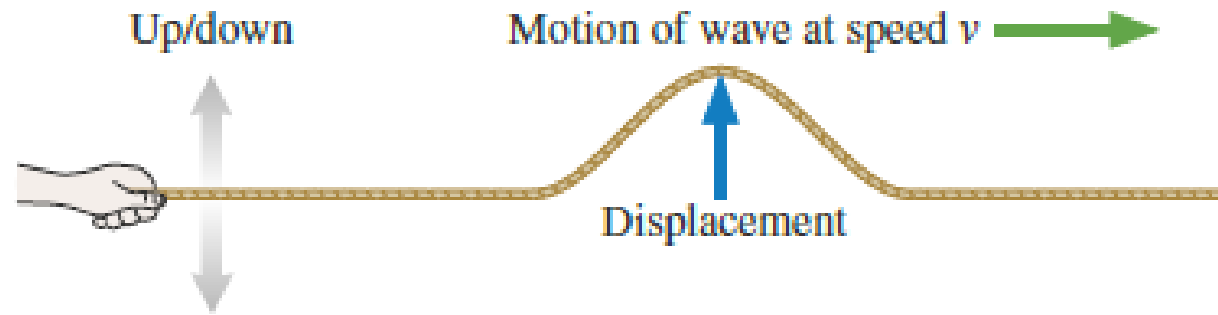


Εγκάρσια και διαμήκη κύματα

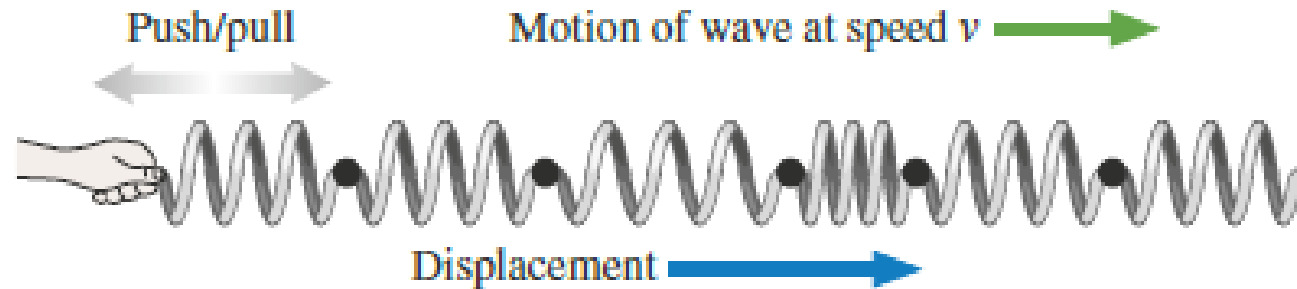


Two types of traveling waves

A transverse wave



A longitudinal wave



Κύματα



- Το κύμα προκαλείται από ένα αρχικό αίτιο (δηλ. μία πηγή διαταραχής) και διαδίδεται στο χώρο με μία ορισμένη ταχύτητα.
- Στα μηχανικά κύματα, η διαταραχή διαδίδεται μέσα σε ένα υλικό σώμα, ενώ στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα η διαταραχή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διαδίδεται στο κενό.
- Το υλικό σώμα μέσα στο οποίο διαδίδεται το κύμα δεν ακολουθεί την κίνηση της διαταραχής.
- **Τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια και ορμή αλλά όχι ύλη.**
- Τα κύματα μεταφέρουν την ενέργεια και την ορμή της αρχικής διαταραχής η οποία προκάλεσε το κύμα.



Κυματοσυνάρτηση

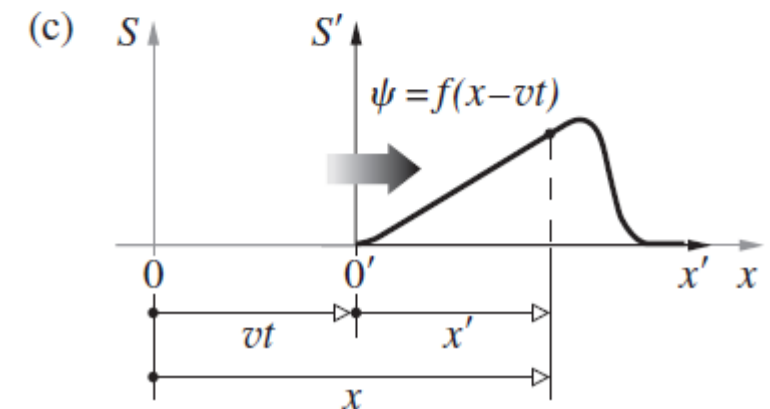
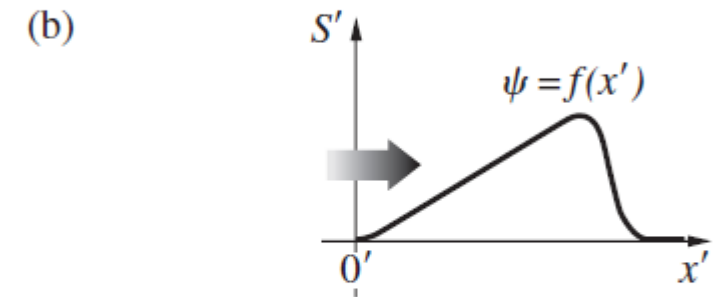
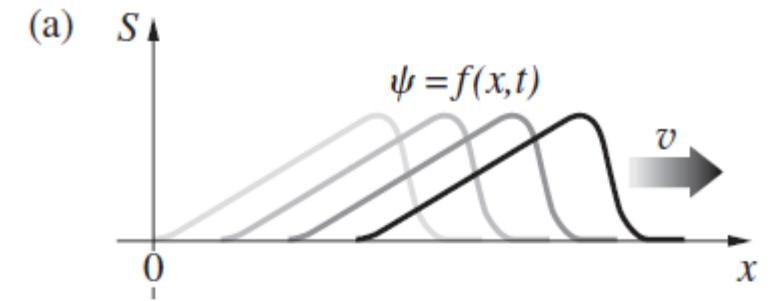
- Η διαταραχή του κύματος είναι μία οργανωμένη κίνηση των σωματιδίων του μέσου: ταλάντωση γύρω από μία θέση ισορροπίας.
- Για να περιγράψουμε μαθηματικά ένα κύμα πρέπει να περιγράψουμε τη θέση όλων των σημείων του υλικού μέσου το οποίο διαταράσσεται συναρτήσει του χρόνου.
- Άρα, η μαθηματική περιγραφή ενός κύματος περιέχει μεταβλητές του **χώρου** (x, y, z) και του **χρόνου** (t).
- Τα κύματα περιγράφονται από μία **συνάρτηση** η οποία ονομάζεται **κυματική συνάρτηση (wave function)** ή **κυματοσυνάρτηση**, $\psi = f(x, y, z, t)$.



Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

- Έστω ένα οδεύον κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά πάνω στον άξονα x με σταθερή ταχύτητα v , σε ένα σύστημα συντεταγμένων S .
- Η κυματοσυνάρτησή του θα εξαρτάται από τη μετατόπιση x και το χρόνο t .

$$\psi(x, t) = f(x, t)$$



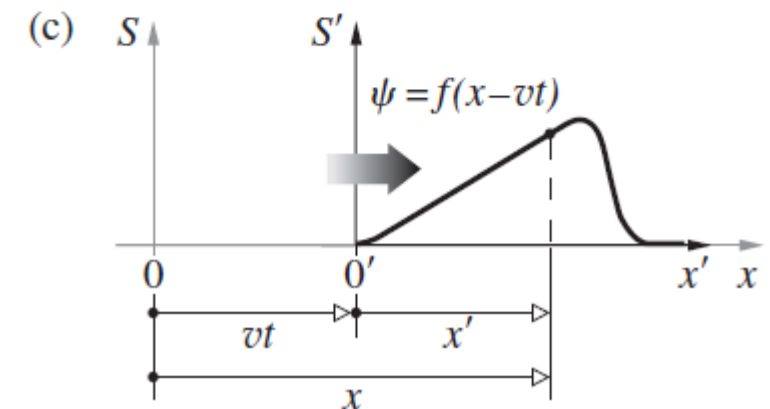
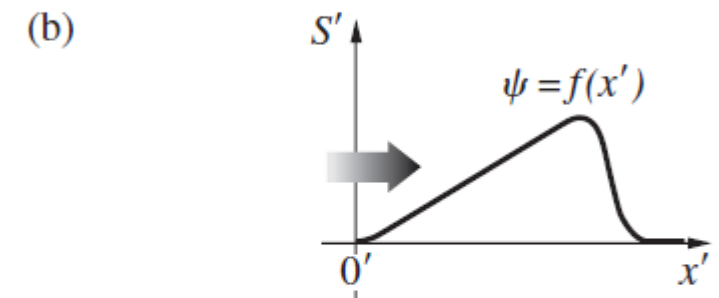
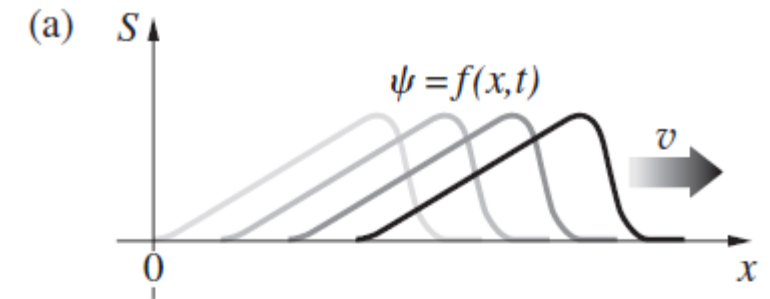


Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

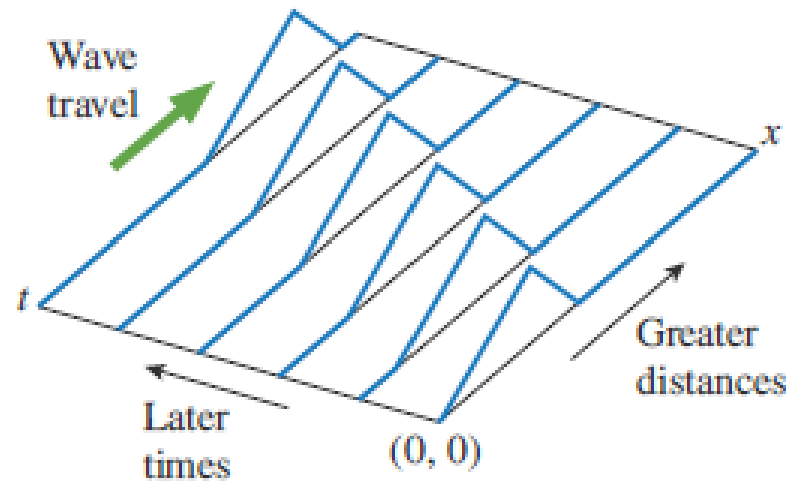
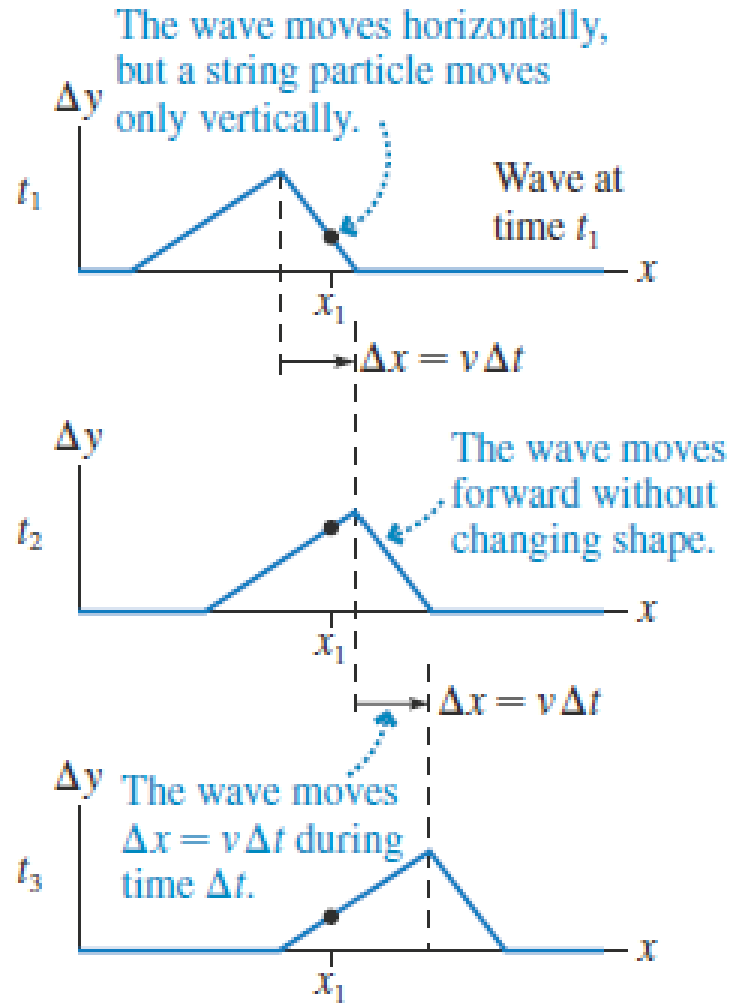
- Το σχήμα της διαταραχής σε οποιαδήποτε στιγμή, έστω $t = 0$, μπορεί να βρεθεί διατηρώντας σταθερό το χρόνο στην τιμή αυτή. $\psi(x, t)|_{t=0} = f(x, 0) = f(x)$

- Αυτό ονομάζεται **στιγμιότυπο** του κύματος.

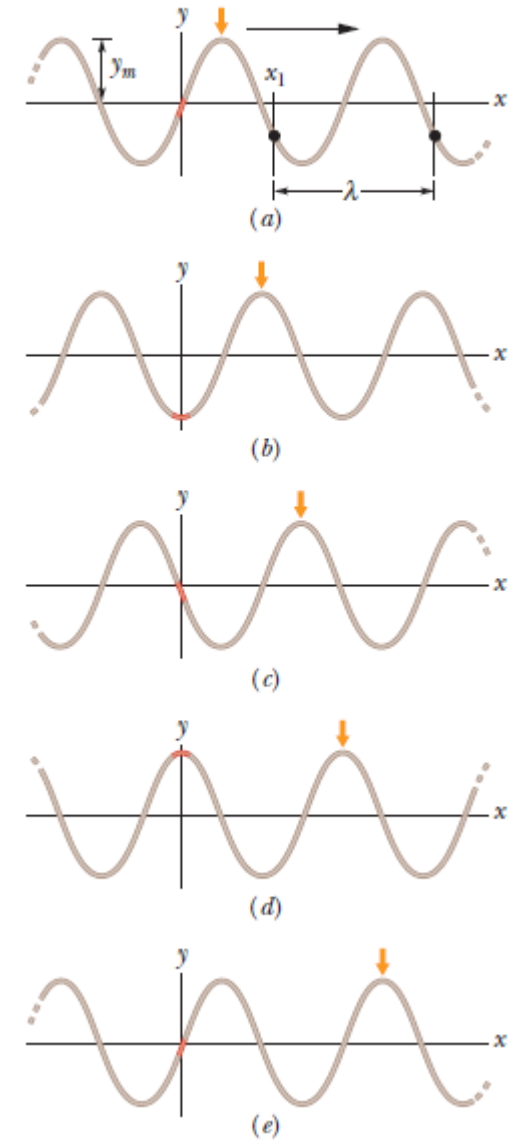
- Μετά από ένα χρόνο t ο παλμός έχει μετακινηθεί κατά μήκος του άξονα x σε απόσταση vt , αλλά παραμένει αναλλοίωτος ως προς τη μορφή του.



Στιγμιότυπο του κύματος



Watch this spot in this series of snapshots.

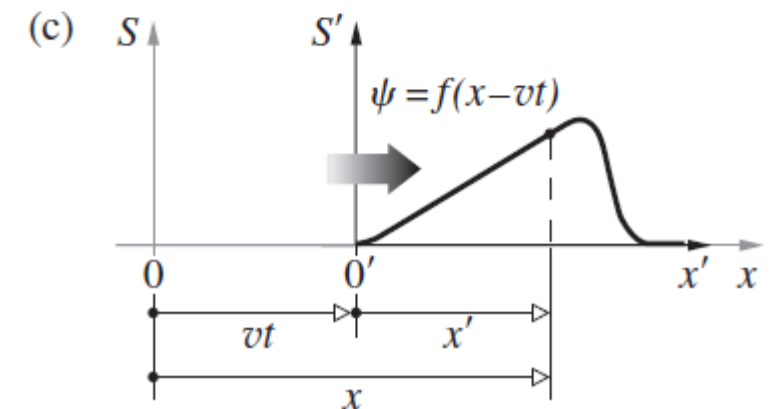
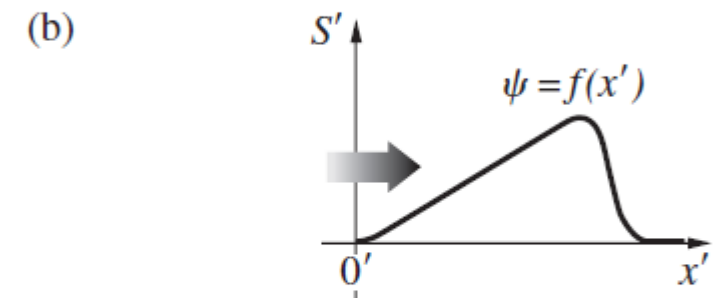
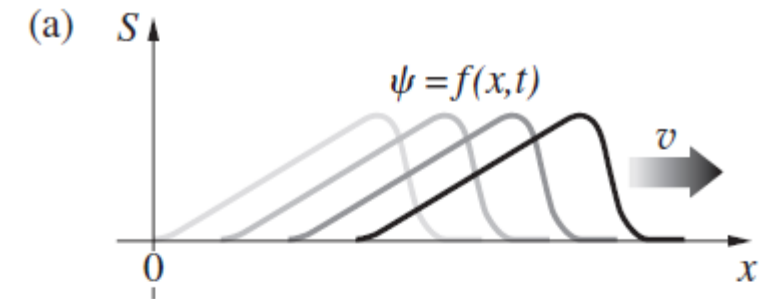




Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

- Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων S' , το οποίο ταξιδεύει μαζί με τον παλμό με ταχύτητα v .
- Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, η κυματοσυνάρτηση ψ δεν είναι πλέον συνάρτηση του χρόνου.
- Καθώς κινούμαστε μαζί με το S' , βλέπουμε ένα σταθερό στιγμιότυπο του κύματος:

$$\psi(x, t)|_{t=0} = f(x, 0) = f(x)$$





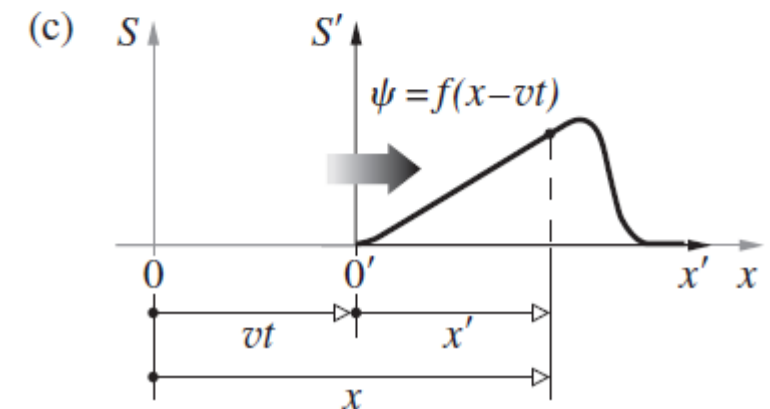
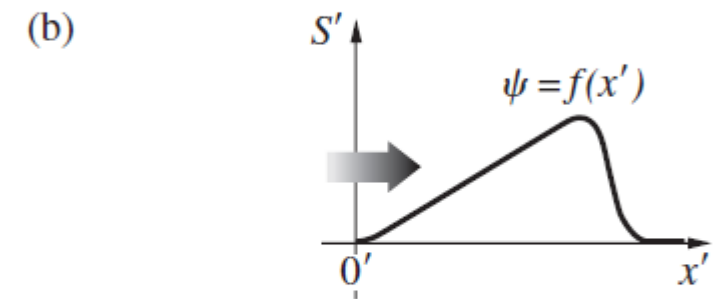
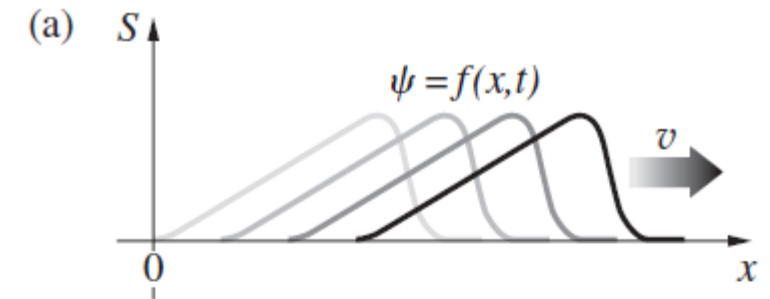
Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

- Στο σύστημα S' η μεταβλητή είναι η x' και όχι η x , έτσι ώστε:

$$\psi = f(x')$$

- Η διαταραχή έχει ακριβώς την ίδια μορφή σε κάθε τιμή του t στο S' όπως είχε στην τιμή $t = 0$ στο S , όταν το S και το S' είχαν κοινή αρχή.
- Ωστόσο, για τη συντεταγμένη x' ισχύει ότι:

$$x' = x - vt$$





Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

- Κατά συνέπεια, προκύπτει ότι:

$$\psi(x, t) = f(x - vt)$$

- Η παραπάνω εξίσωση αντιπροσωπεύει την πιο γενική μορφή της μονοδιάστατης **κυματοσυνάρτησης**.
- Αν επιλέξουμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ και αντικαταστήσουμε όπου x το $(x - vt)$ τότε προκύπτει μία κυματοσυνάρτηση της μορφής $f(x - vt)$.
- Η προκύπτουσα έκφραση περιγράφει ένα κύμα που έχει την επιθυμητή μορφή και κινείται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα v .



Παράδειγμα 4.1

- Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3}{10x^2 - 1}$$

- Από αυτήν προκύπτει η κυματοσυνάρτηση:

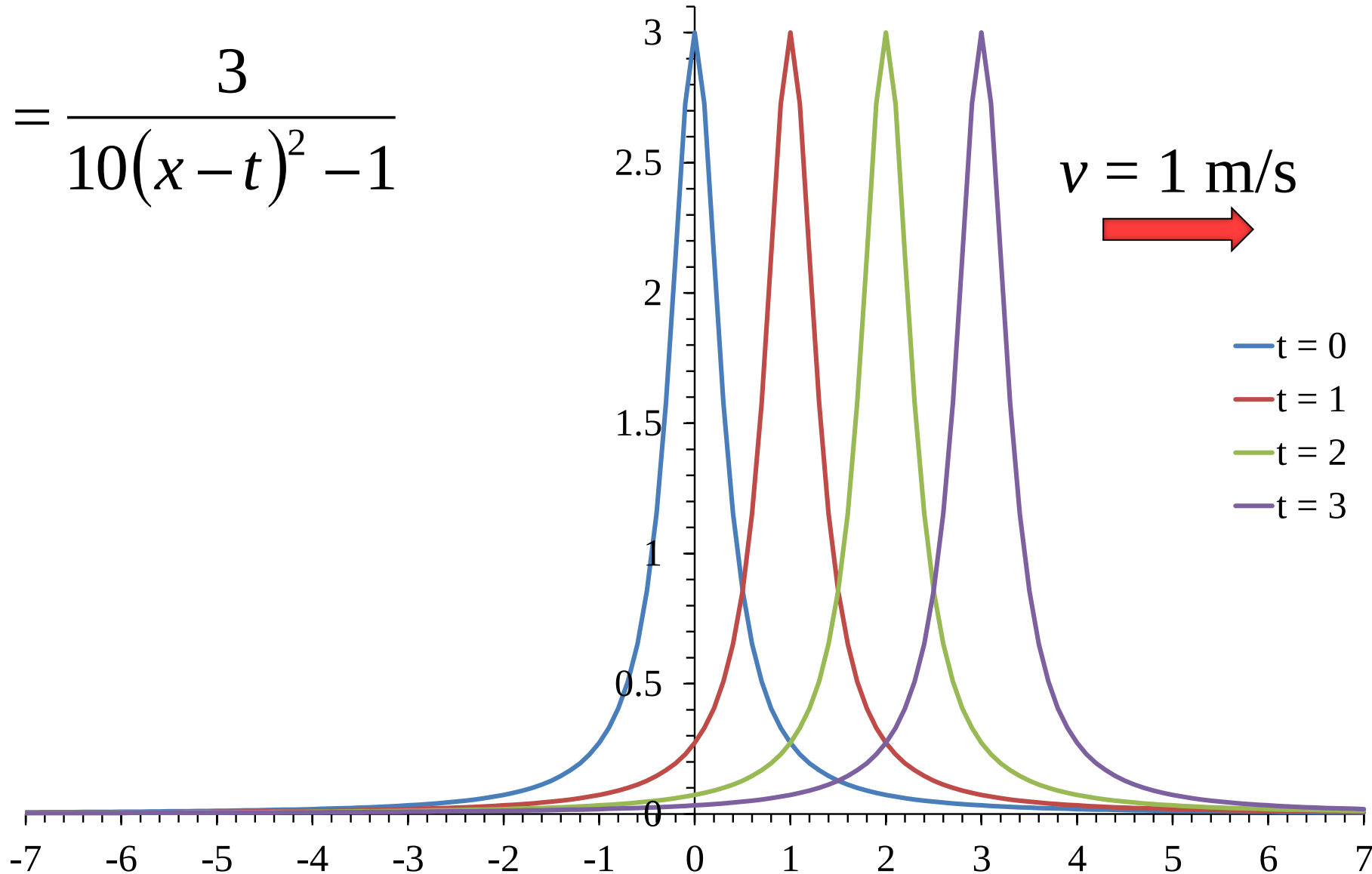
$$f(x) = \frac{3}{10(x-t)^2 - 1}$$

- Η κυματοσυνάρτηση αυτή κινείται προς τα δεξιά του άξονα του x με ταχύτητα $v = 1 \text{ m/s}$.

Στιγμιότυπα της κυματοσυνάρτησης



$$f(x) = \frac{3}{10(x-t)^2 - 1}$$

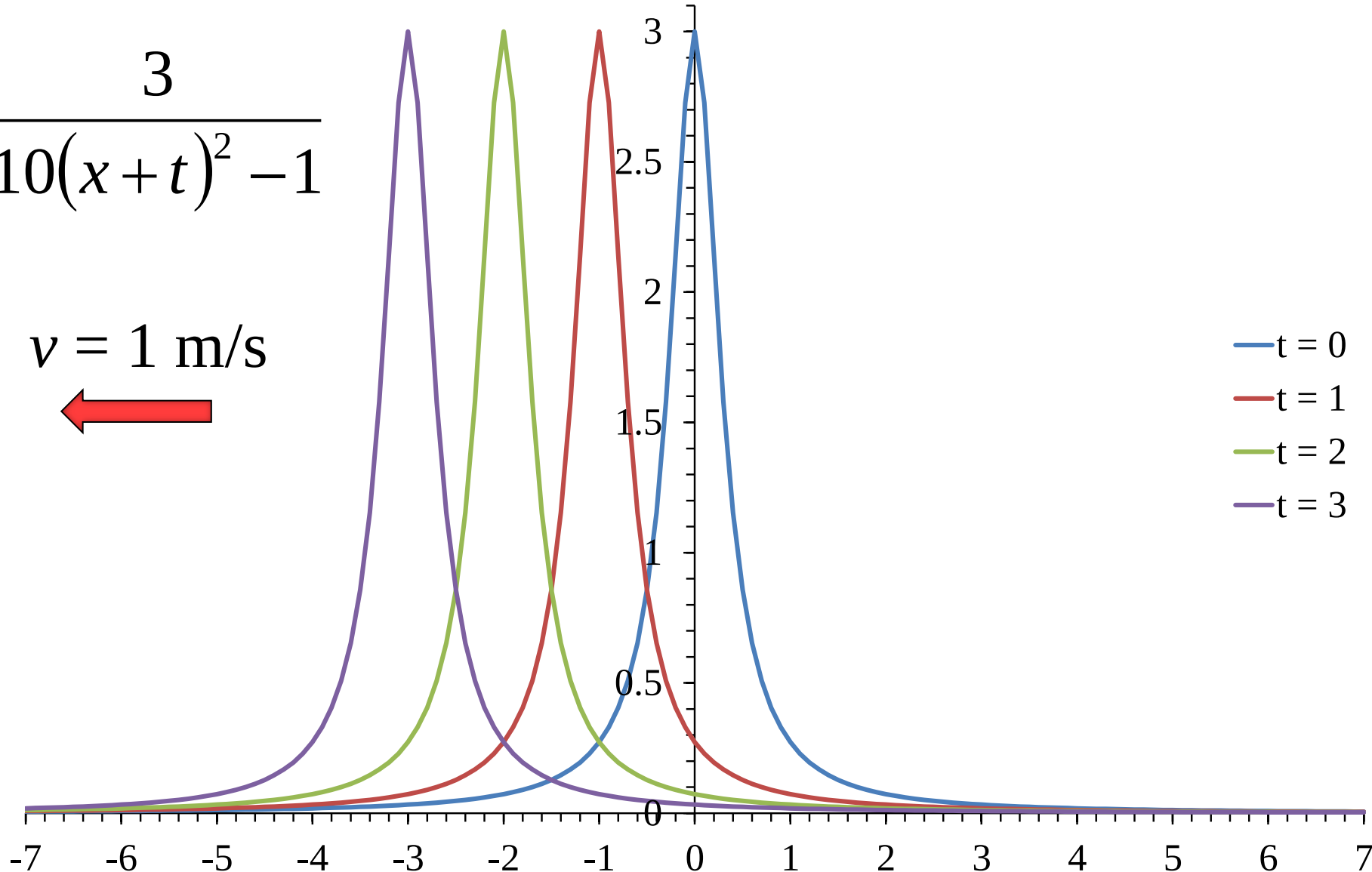


Στιγμιότυπα της κυματοσυνάρτησης



$$f(x) = \frac{3}{10(x+t)^2 - 1}$$

$$v = 1 \text{ m/s}$$





Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

- Κατά συνέπεια, η κυματοσυνάρτηση ενός κύματος το οποίο οδεύει προς τα αριστερά του άξονα x (αρνητική κατεύθυνση του x) θα έχει κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(x, t) = f(x + vt)$$

- Άρα, η μονοδιάστατη κυματοσυνάρτηση, στη γενικότερη μορφή της δίνεται από την εξίσωση:

$$\psi(x, t) = f(x \pm vt)$$



Διαφορική εξίσωση κύματος

- Το 1747 ο Γάλλος Μαθηματικός Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) για την μαθηματική περιγραφή των κυμάτων εισήγαγε την επονομαζόμενη **διαφορική εξίσωση κύματος (differential wave equation)**:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

- Η διαφορική εξίσωση κύματος είναι μία από τις σημαντικότερες εξισώσεις της Φυσικής!





Διαφορική εξίσωση κύματος στις τρεις διαστάσεις

- Στις τρεις διαστάσεις, μία κυματοσυνάρτηση $\psi(x, y, z, t)$ θα αποτελεί λύση της τρισδιάστατης διαφορικής εξίσωσης κύματος:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

- Τελεστής Laplace: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- Άρα, η διαφορική εξίσωση γράφεται: $\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$



Διαφορική εξίσωση κύματος

- Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη κυμάτων (μηχανικά, ηλεκτρομαγνητικά) το καθένα με τη δική του κυματοσυνάρτηση.
- **Όλες οι κυματοσυναρτήσεις αποτελούν λύση της διαφορικής εξίσωσης κύματος.**
- Σε κάθε περίπτωση, η κυματοσυνάρτηση ψ είναι:
- μηχανικά κύματα που διαδίδονται σε νήμα $\rightarrow \psi$: εγκάρσια μετατόπιση
- ηχητικά κύματα $\rightarrow \psi$: μεταβολή πίεσης ή πυκνότητας του αερίου
- ηλεκτρομαγνητικά κύματα $\rightarrow \psi$: μεταβολή του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου

Αρμονικά κύματα



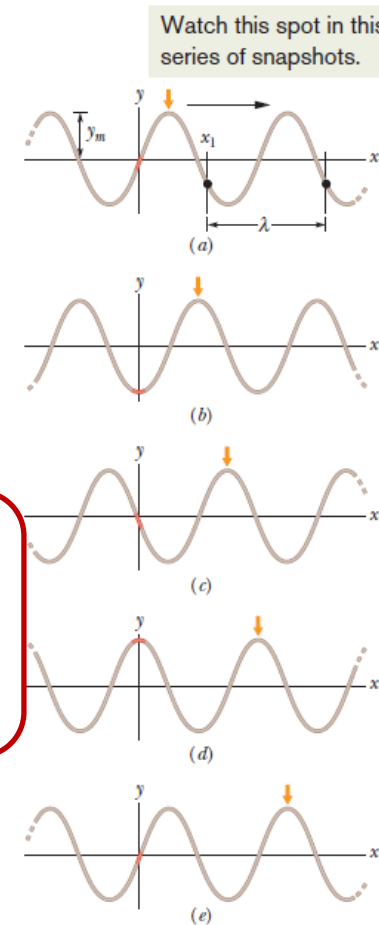
- Η κυματοσυνάρτηση ενός αρμονικού (ημιτονοειδούς) κύματος δίνεται από την εξίσωση:

$$\psi = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

$$\Leftrightarrow \psi = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{T} t \right) \Leftrightarrow \psi = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \psi = A \sin(kx - \omega t)$$

- όπου $k = 2\pi/\lambda$ γωνιακός κυματικός αριθμός (angular wave number) ή κυματαριθμός.



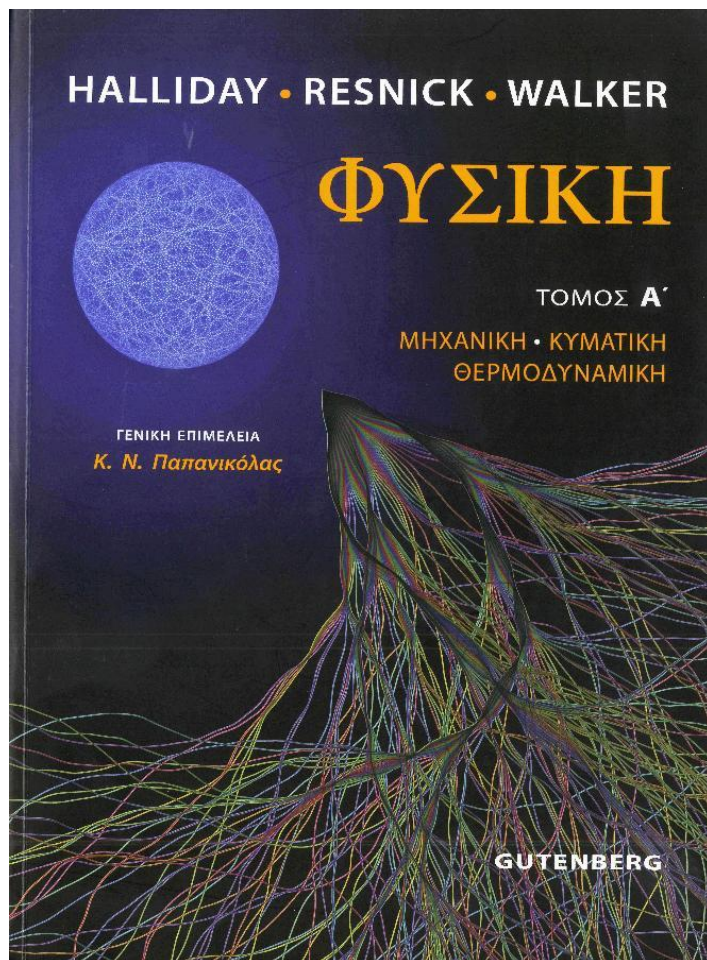


Άσκηση 4.1

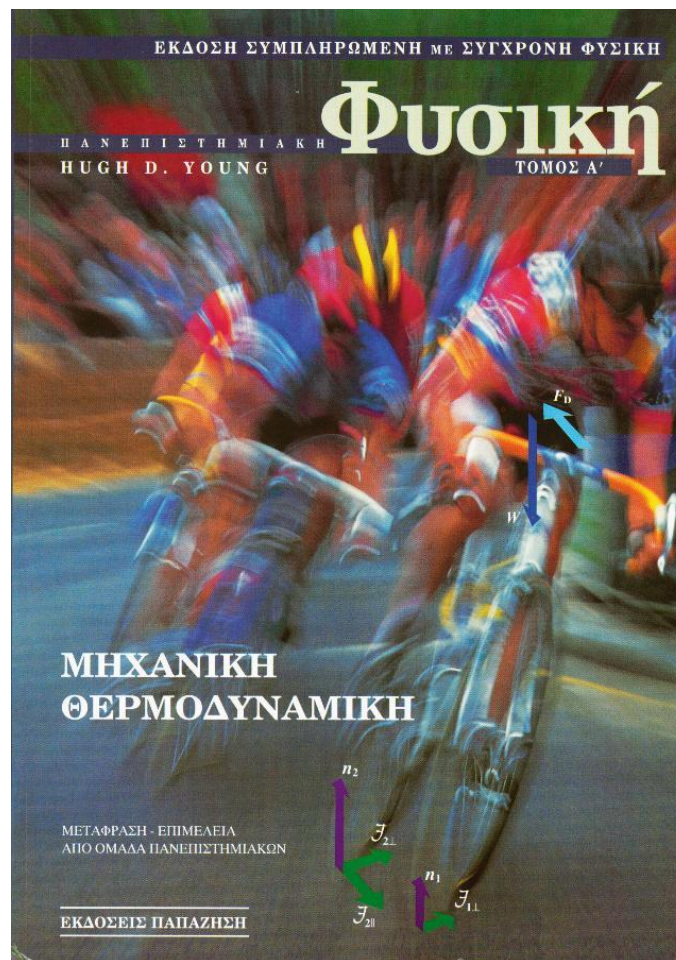
- Να δείξετε ότι η κυματοσυνάρτηση ενός αρμονικού (ημιτονοειδούς) κύματος, $\psi = A \sin(kx - \omega t)$, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης κύματος:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

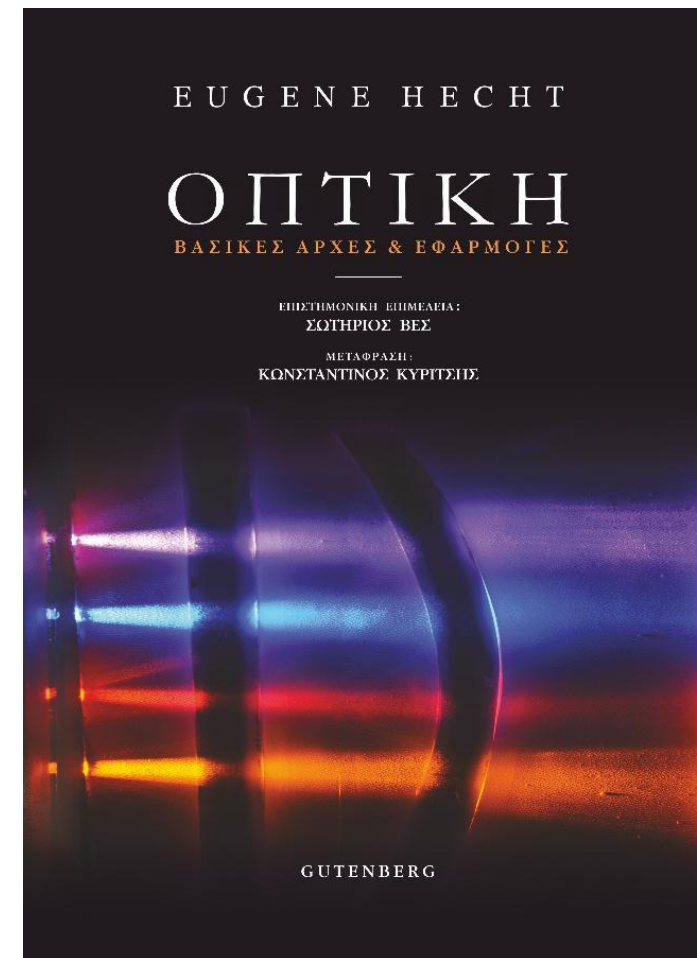
Επανάληψη, Κύματα



Κεφάλαιο 16



Κεφάλαιο 19



Κεφάλαιο 2



Κυματωματιδιακός δυισμός των φωτονίων

➤ Τα φωτόνια έχουν τόσο κυματικές όσο και σωματιδιακές ιδιότητες.

➤ Ενέργεια φωτονίων: $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$

➤ Ορμή φωτονίων: $p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$



Κυματωματιδιακός δυισμός της ύλης

- Το 1924 ο Γάλλος Louis de Broglie (1892-1987, βραβείο Nobel Φυσικής 1929) διατύπωσε την υπόθεση ότι **τα κινούμενα υλικά σώματα συμπεριφέρονται και ως κύματα**.
- Τα κύματα αυτά ονομάστηκαν **υλικά κύματα** ή υλοκύματα (matter waves).
- Ο de Broglie έθεσε το ερώτημα: εάν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συμπεριφέρεται ως σωματίδιο (φωτόνια), θα μπορούσε άραγε και η ύλη να έχει κυματικές ιδιότητες;





Υπόθεση de Broglie

- Ο de Broglie διατύπωσε την υπόθεση ότι ένα ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται γύρω από τον πυρήνα ενός ατόμου με ταχύτητα v και ορμή p συμπεριφέρεται ως ένα κύμα με μήκος κύματος, λ , το οποίο δίνεται από την εξίσωση:

$$p = \frac{h}{\lambda} \Leftrightarrow mv = \frac{h}{\lambda} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$$

- ✓ όπου p είναι η ορμή του σωματιδίου
- ✓ m είναι η μάζα του σωματιδίου
- ✓ h είναι η σταθερά του Planck
- ✓ v είναι η ταχύτητα του σωματιδίου

Υπόθεση de Broglie



➤ Κατ' αντιστοιχία, για την ενέργεια του σωματιδίου ισχύει:

$$E = hf \Leftrightarrow f = \frac{E}{h}$$



Κυματική θεωρία της ύλης

- Η υπόθεση του de Broglie ισχύει για όλα τα υλικά σώματα.
- Άρα, οποιοδήποτε αντικείμενο μάζας m και ταχύτητας v θα δημιουργεί ένα υλικό κύμα με χαρακτηριστικό μήκος κύματος.
- Η εξίσωση των υλικών κυμάτων δείχνει ότι το μήκος κύματος ενός αντικείμενο συνηθισμένου μεγέθους (π.χ. μπάλα ποδοσφαίρου) είναι τόσο μικρό ώστε να είναι πρακτικά αδύνατο να ανιχνευτεί.
- Αυτό δεν συμβαίνει για το ηλεκτρόνιο λόγω της πολύ μικρής μάζας του και της μεγάλης ταχύτητάς του.



Παράδειγμα 4.2

- i. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie μίας μπάλας ποδοσφαίρου μάζας 0,45 kg η οποία κινείται με ταχύτητα 90 km/h.
- ii. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie ενός ηλεκτρονίου μάζας $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg το οποίο κινείται με ταχύτητα $4,19 \cdot 10^6$ m/s.



➤ **Απάντηση:**

- i. Μετατρέπουμε την ταχύτητα από km/h σε m/s:

$$90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 25 \text{ m/s}$$



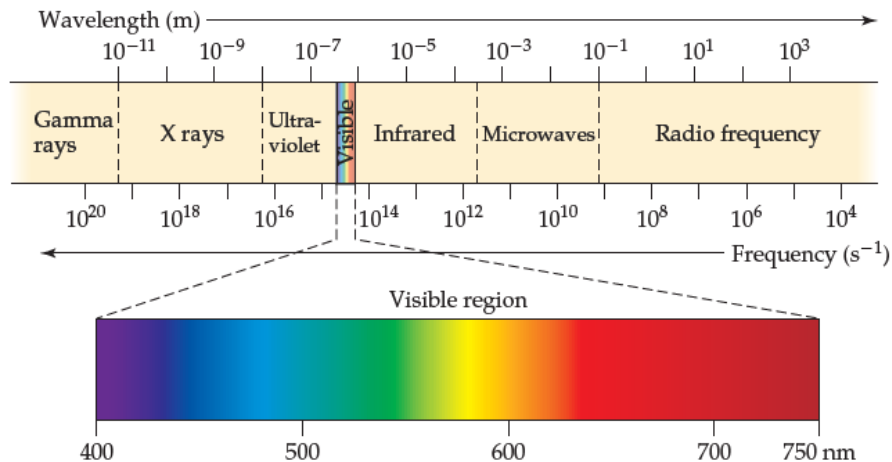
Παράδειγμα 4.2: Απάντηση

➤ Αντικαθιστούμε στην εξίσωση των υλικών κυμάτων:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{(0,45 \text{ kg}) \cdot (25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})} \Leftrightarrow \lambda = 5,9 \times 10^{-35} \text{ m}$$

ii. Ομοίως, αντικαθιστούμε στην εξίσωση των υλικών κυμάτων:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (4,19 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})} \Leftrightarrow \lambda = 1,74 \times 10^{-10} \text{ m}$$



$$\text{ή } \lambda = 174 \text{ pm}$$

Το μήκος κύματος αυτό βρίσκεται στην περιοχή των ακτίνων X

Μήκη κύματος de Broglie διαφόρων αντικειμένων



Table 7.1

The de Broglie Wavelengths of Several Objects

Substance	Mass (g)	Speed (m/s)	λ (m)
Slow electron	9×10^{-28}	1.0	7×10^{-4}
Fast electron	9×10^{-28}	5.9×10^6	1×10^{-10}
Alpha particle	6.6×10^{-24}	1.5×10^7	7×10^{-15}
1-gram mass	1.0	0.01	7×10^{-29}
Baseball	142	40.0	1×10^{-34}
Earth	6.0×10^{27}	3.0×10^4	4×10^{-63}

Πειραματική επιβεβαίωση των υλικών κυμάτων



- Η υπόθεση του de Broglie επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1927 από τους Clinton Davisson (1881 – 1958, βραβείο Nobel στη Φυσική το 1937), Lester Germer (1896 – 1971) και George Paget Thomson (1892 – 1975, βραβείο Nobel στη Φυσική το 1937) πραγματοποιώντας πειράματα **περίθλασης ηλεκτρονίων**.



Clinton Davisson



Davisson και Germer

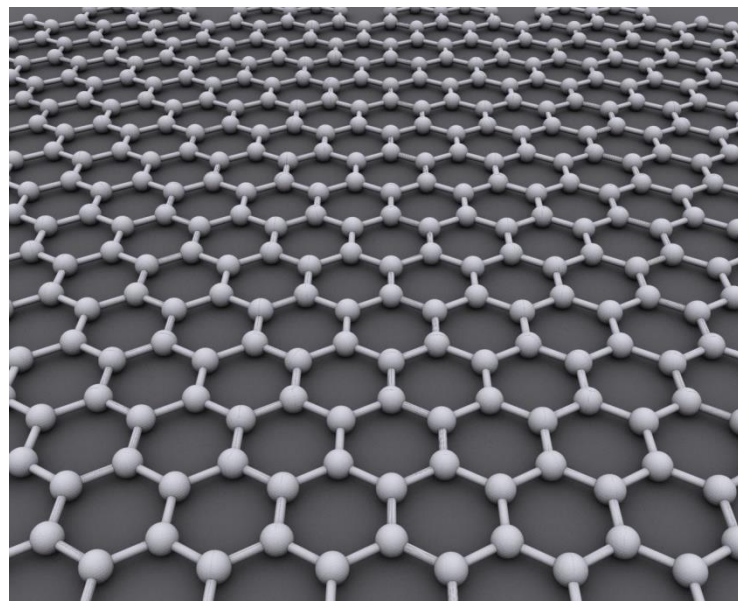
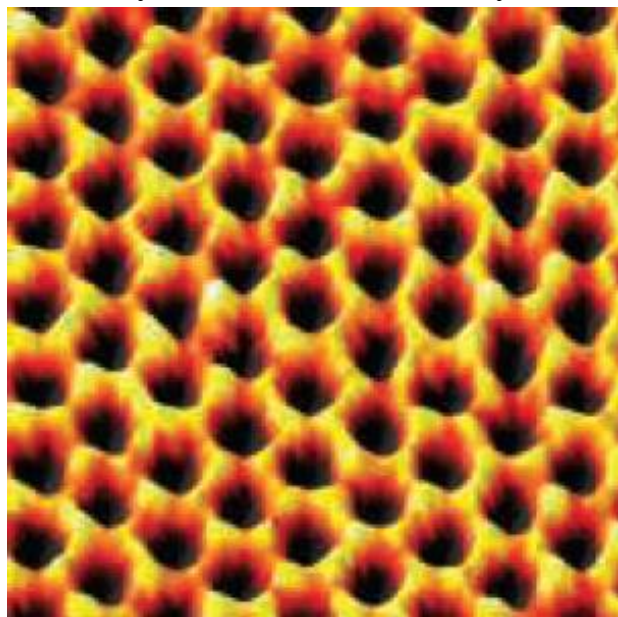


George Thomson

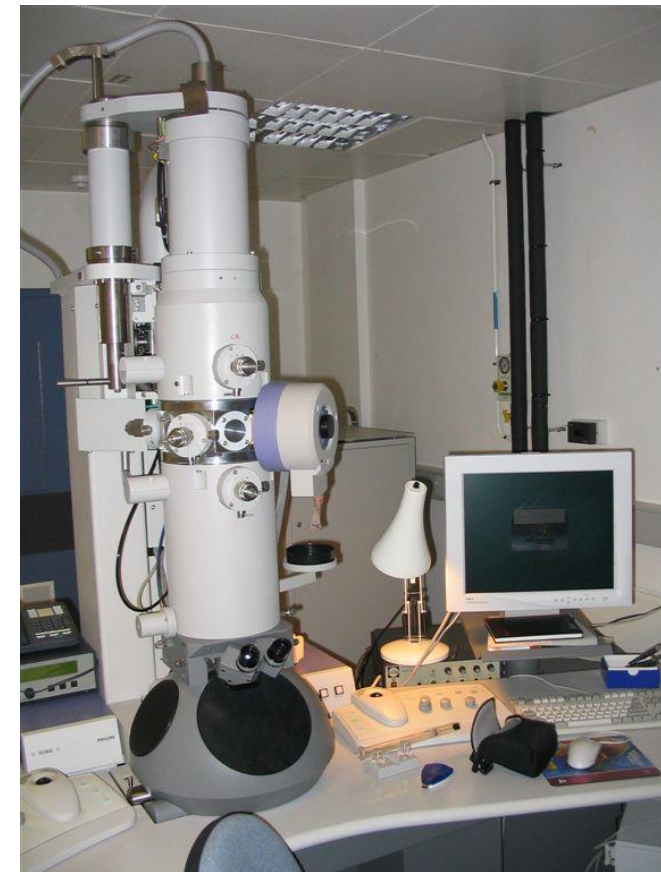
Ηλεκτρονικό μικροσκόπιο



- Τα πειράματα περίθλασης ηλεκτρονίων οδήγησαν στην ανακάλυψη του **ηλεκτρονικού μικροσκοπίου** το οποίο αξιοποιεί τις κυματικές ιδιότητες των ηλεκτρονίων για την παρατήρηση αντικειμένων ατομικής κλίμακας.

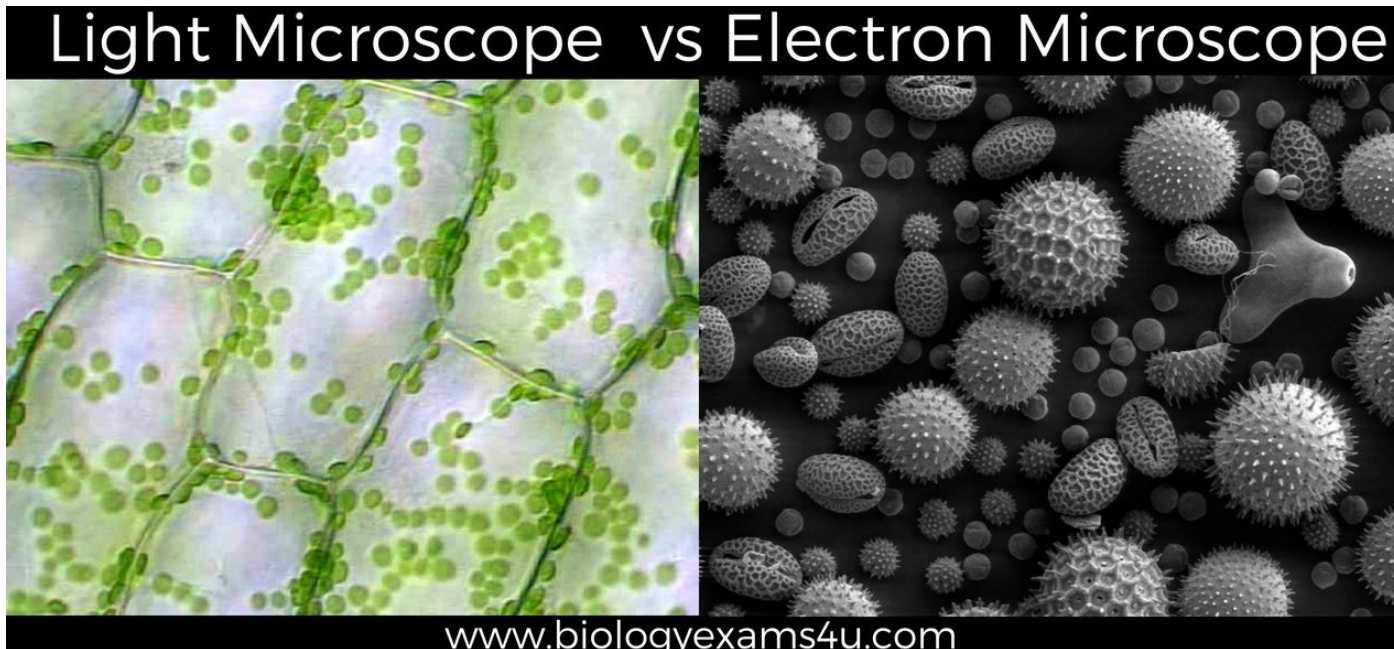


γραφένιο

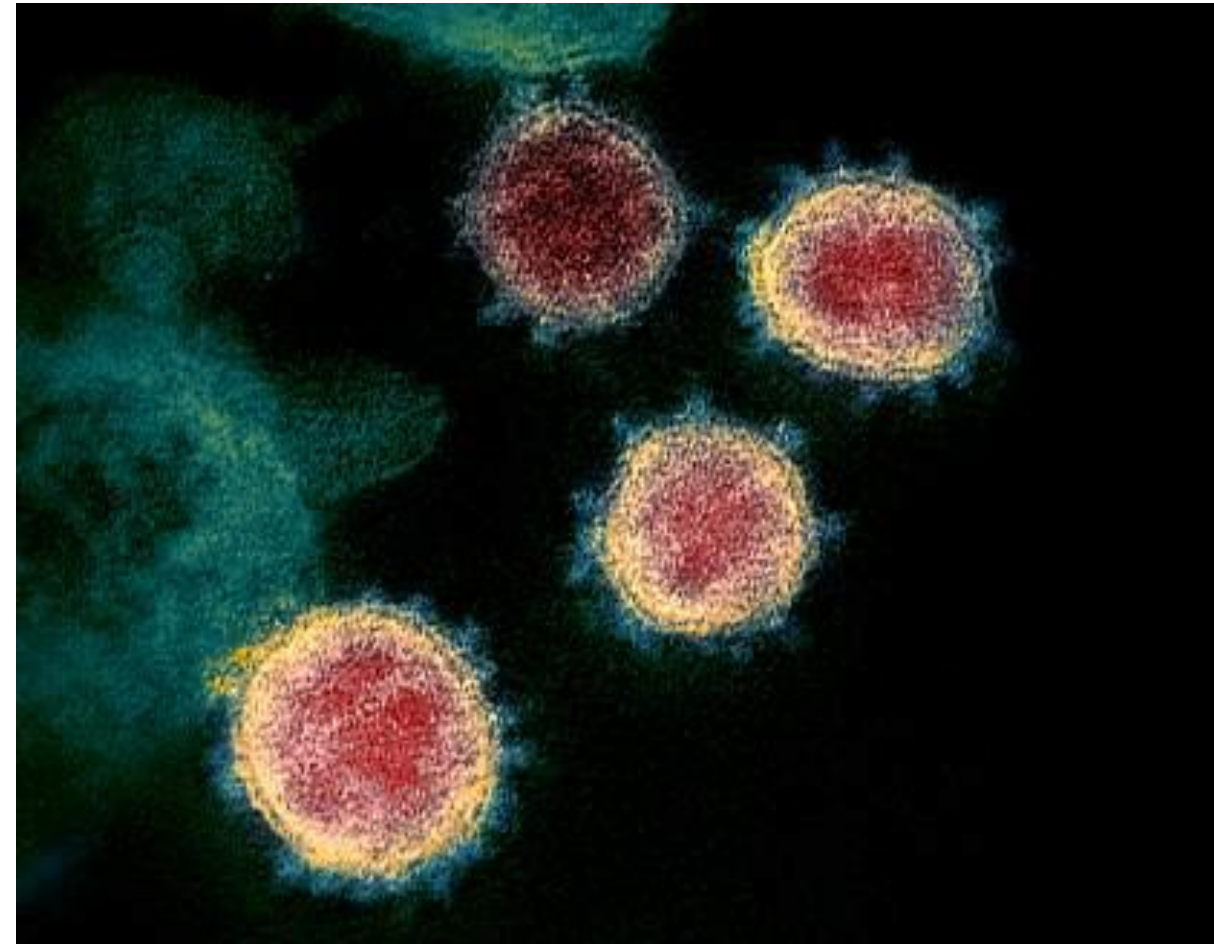
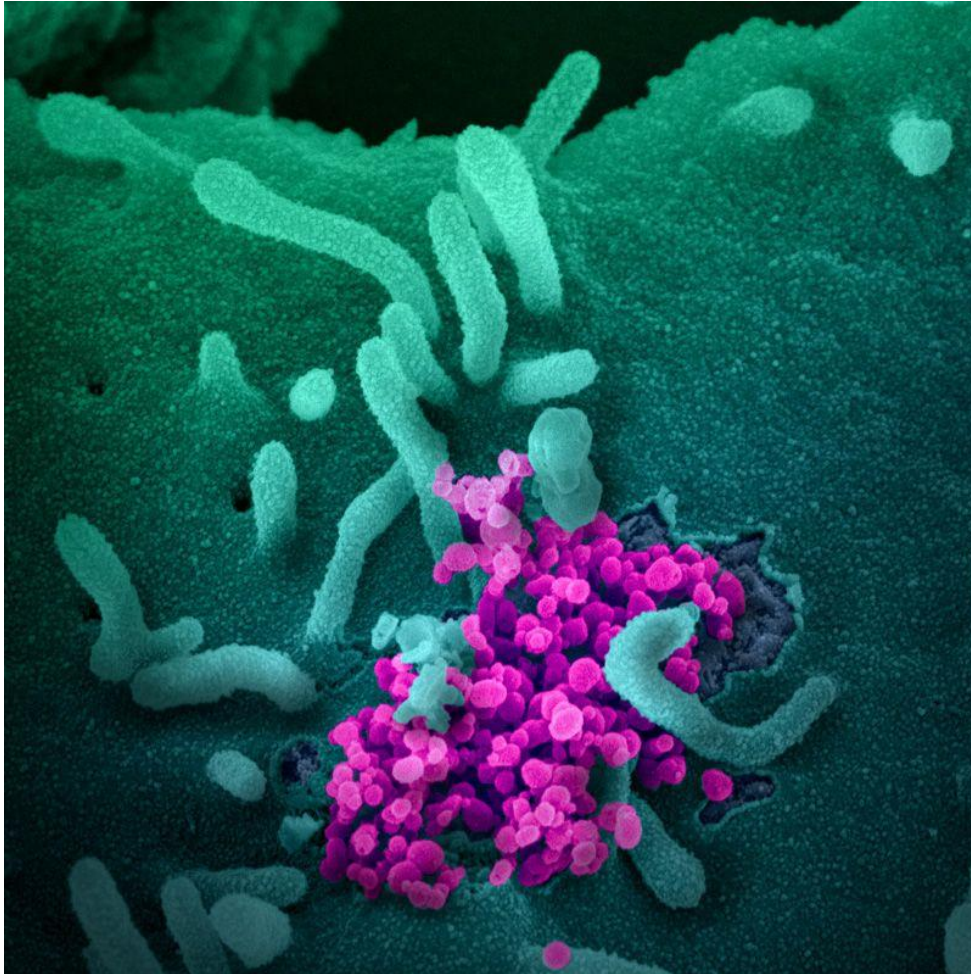


Ηλεκτρονικό μικροσκόπιο

- Τα ηλεκτρονικά μικροσκόπια επιτυγχάνουν μεγέθυνση ενός αντικειμένου περίπου 3×10^6 φορές, ενώ τα οπτικά μικροσκόπια μεγεθύνουν περίπου 1000 φορές.
- Αυτό συμβαίνει γιατί το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος του ορατού φωτός.



Εικόνες του SARS-CoV-2 από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο



- <https://www.nature.com/articles/d41586-020-00639-8>
- <https://www.nih.gov/news-events/nih-research-matters/novel-coronavirus-structure-reveals-targets-vaccines-treatments>



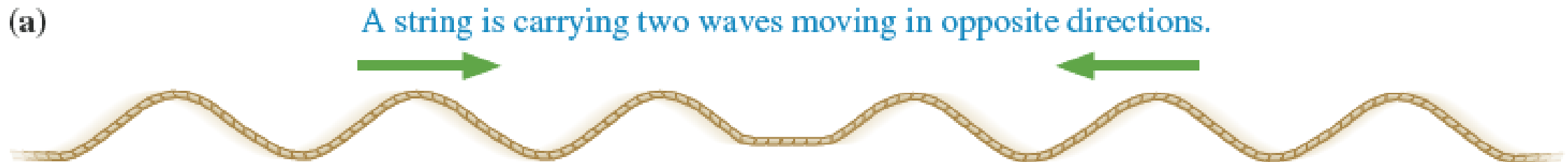
Κβάντωση της ενέργειας και της ύλης

- Η ενέργεια με τη μορφή ακτινοβολιών είναι κβαντισμένη.
- Το γεγονός ότι η ύλη έχει κυματικές ιδιότητες έχει βαθύτατες συνέπειες.
- Συνεπάγεται ότι η ενέργεια της ύλης, όπως αυτή των ακτινοβολιών, είναι κβαντισμένη!!!



Στάσιμα κύματα

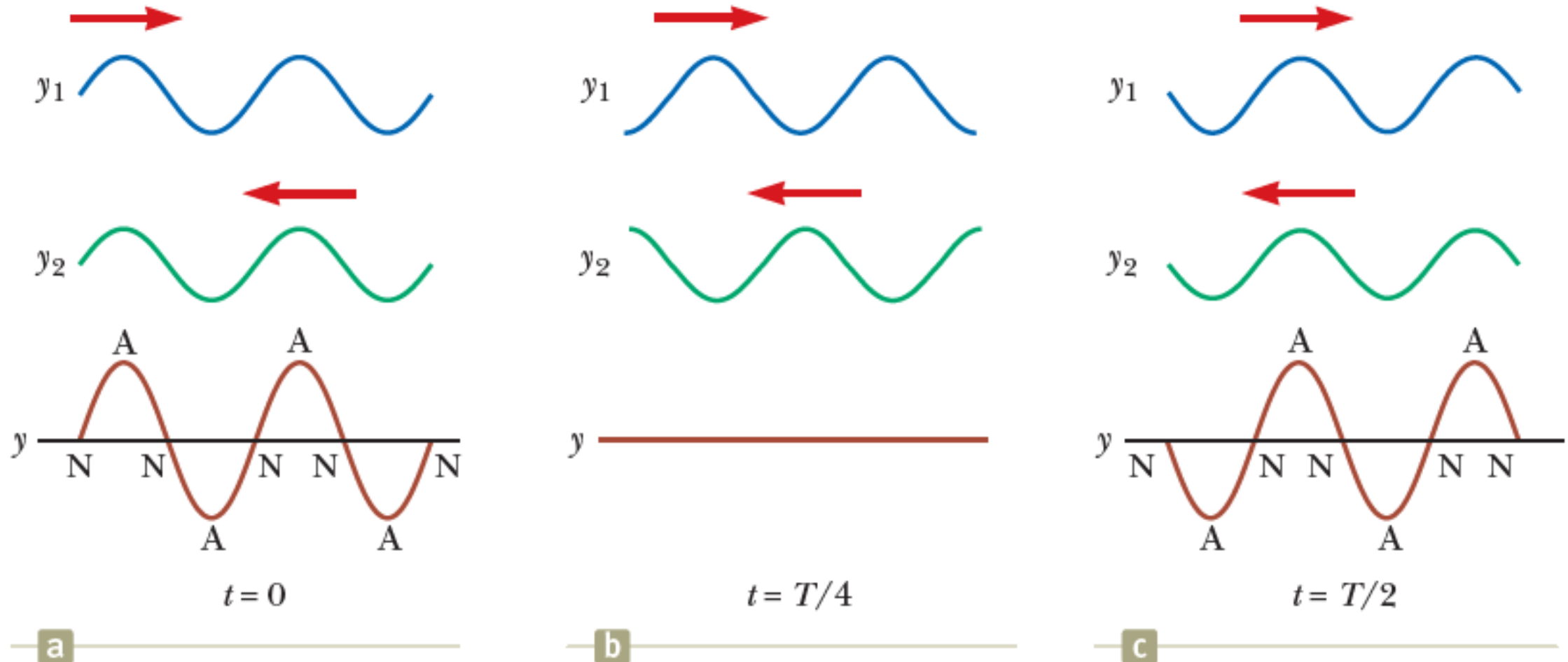
- **Στάσιμο κύμα (standing wave)** ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας, του ίδιου μήκους κύματος και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις.
- Έστω ένα σχοινί ή ένα νήμα ή μία χορδή στην οποία δύο κύματα της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους διαδίδονται προς την αντίθετη κατεύθυνση:



Στάσιμα κύματα



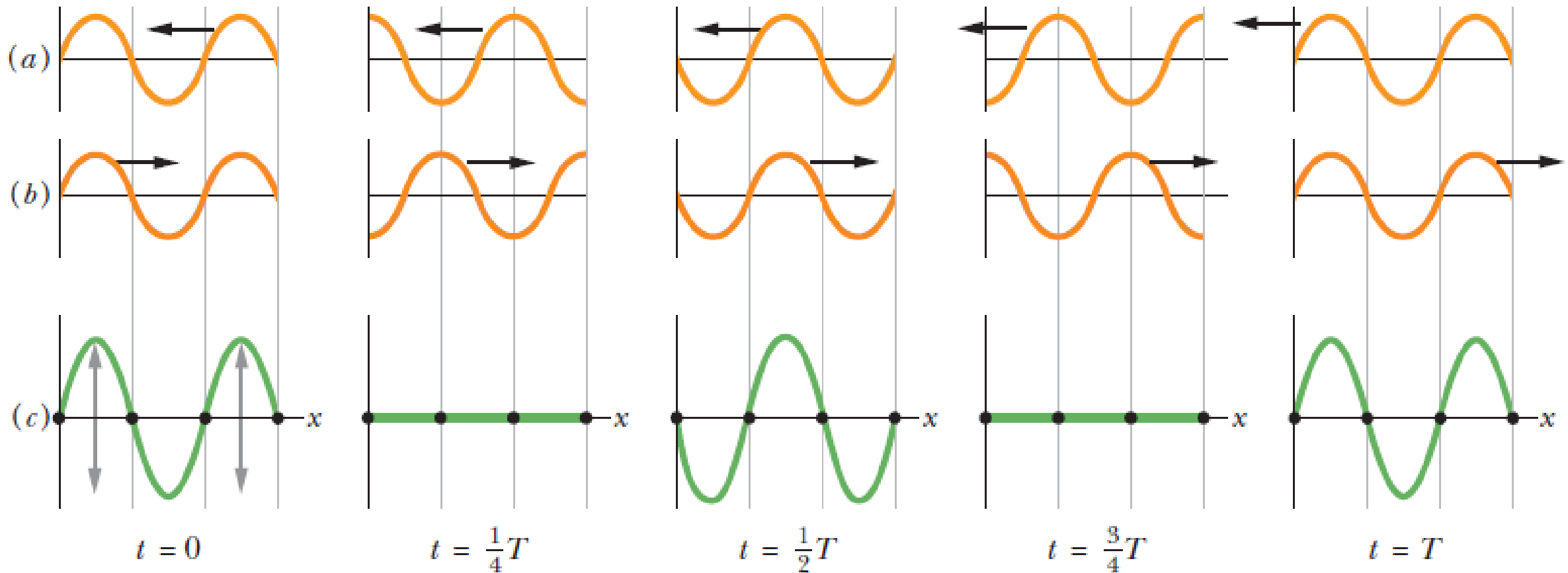
- Κατά τη συμβολή των δύο αντίθετα κινούμενων κυμάτων σχηματίζεται ένα στάσιμο κύμα.



Στάσιμα κύματα



- Κατά τη συμβολή των δύο αντίθετα κινούμενων κυμάτων σχηματίζεται ένα στάσιμο κύμα.





Δεσμοί και κοιλίες των στάσιμων κυμάτων

- Τα σημεία στο σχοινί τα οποία παραμένουν συνεχώς ακίνητα (έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης) ονομάζονται **δεσμοί (nodes)**.
- Τα σημεία τα οποία έχουν μέγιστο πλάτος ταλάντωσης και βρίσκονται στο μέσο της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ονομάζονται **κοιλίες** ή **αντιδεσμοί (antinodes)**.
- Η κυματοσυνάρτηση των στάσιμων κυμάτων είναι της μορφής:
$$\psi(x, t) = (2A \sin kx) \cos \omega t$$
- Η κυματοσυνάρτηση αυτή δεν είναι συνάρτηση του $x \pm vt$, κατά συνέπεια τα στάσιμα κύματα δεν είναι οδεύοντα κύματα.



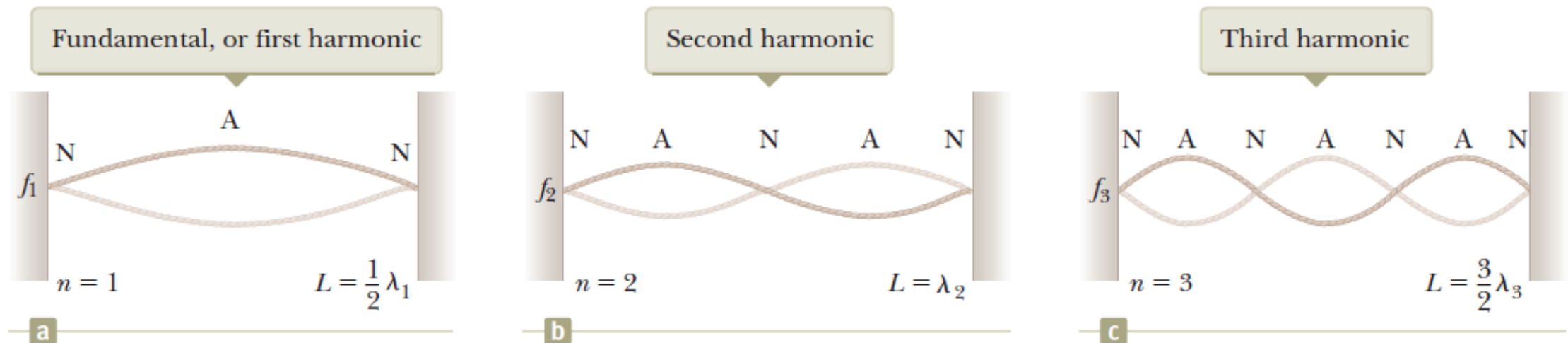
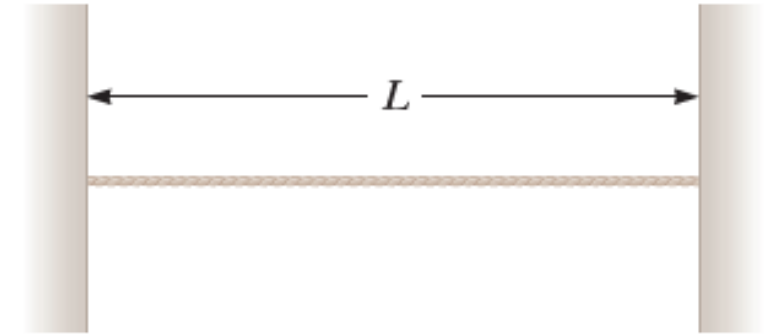
Στάσιμα κύματα

- Ένα στάσιμο κύμα αποτελείται από δύο οδεύοντα κύματα που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.
- Κατά συνέπεια, τα δύο κύματα που το αποτελούν μεταφέρουν ίσες ποσότητες ενέργειας σε αντίθετες κατευθύνσεις.
- Ως εκ τούτου, **τα στάσιμα κύματα, σε αντίθεση με τα οδεύοντα κύματα, δεν μεταφέρουν ενέργεια από το ένα άκρο του νήματος στο άλλο.**
- Η ενέργεια του κάθε σημείου παραμένει σταθερή.
- Σε κάθε σημείο, η μέση ταχύτητα μεταφοράς ενέργειας είναι μηδέν.



Χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα

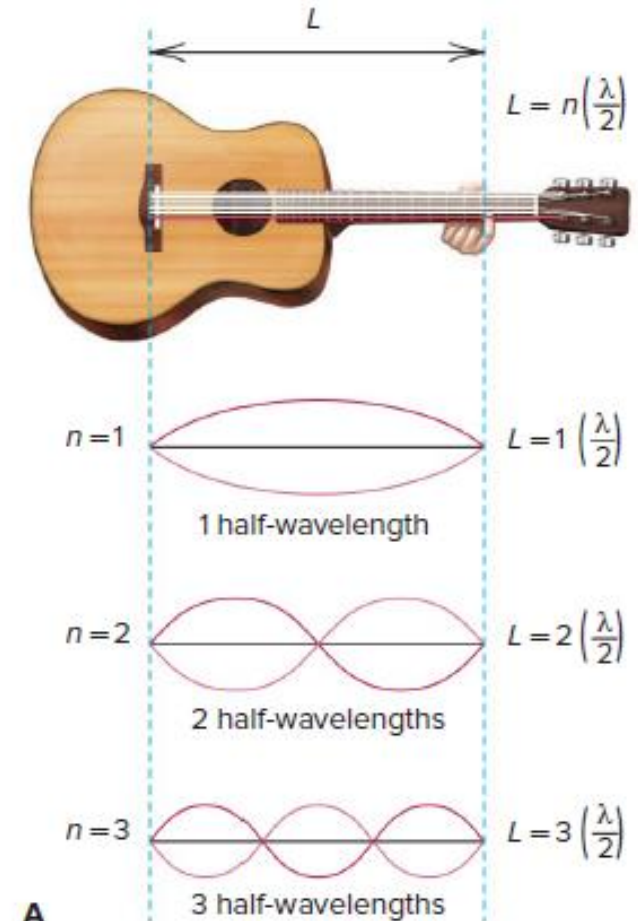
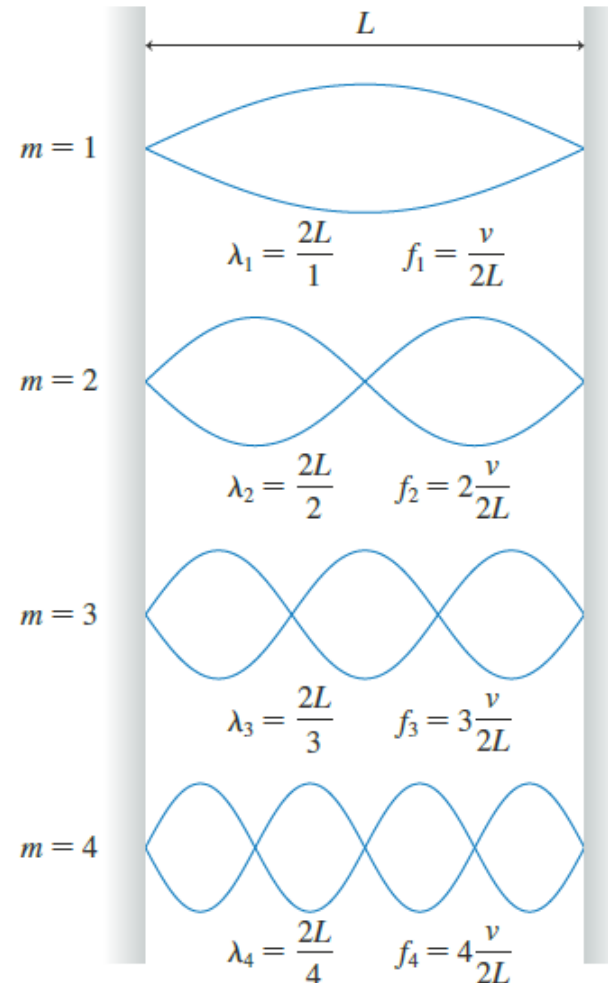
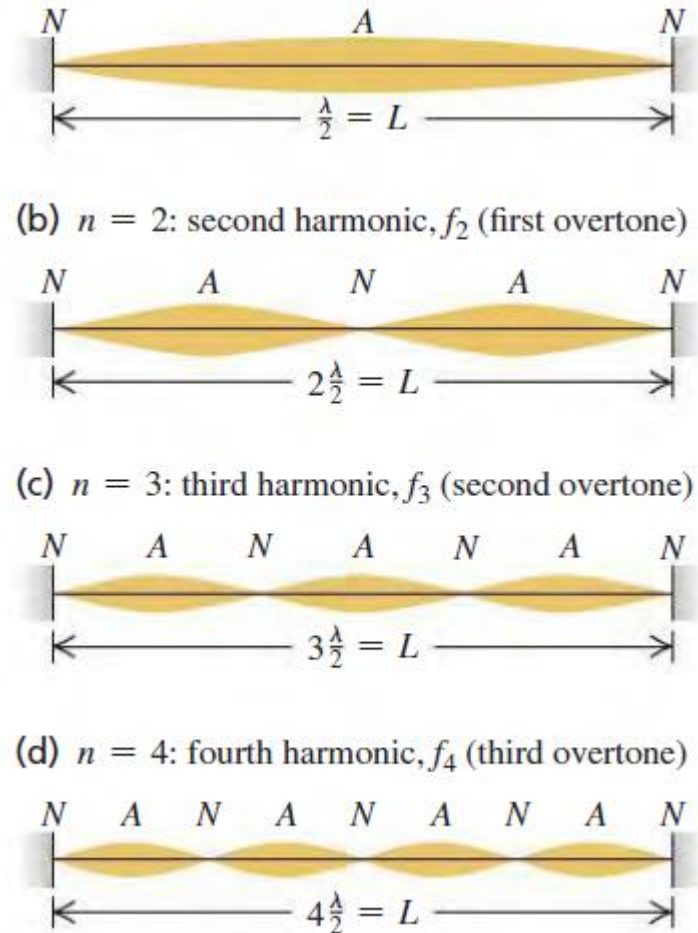
- Όταν μία χορδή μήκους L είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της και πάλλεται τότε δημιουργούνται στάσιμα κύματα.
- Η χορδή μπορεί να ταλαντωθεί σχηματίζοντας μόνο μερικά σχήματα ταλάντωσης.





Χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα

- Η χορδή μπορεί να ταλαντωθεί σχηματίζοντας μόνο μερικά σχήματα ταλάντωσης.



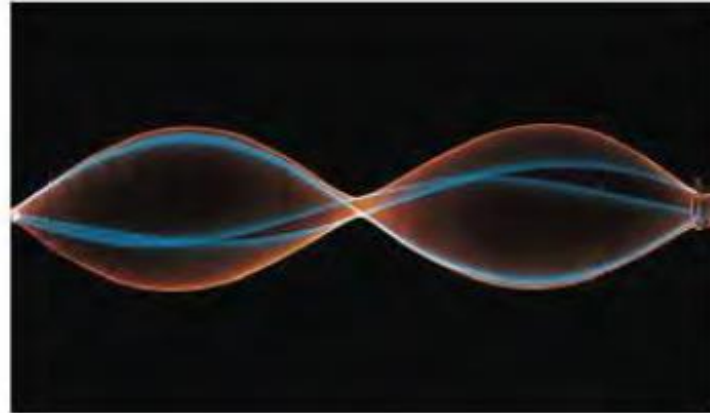
Χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα



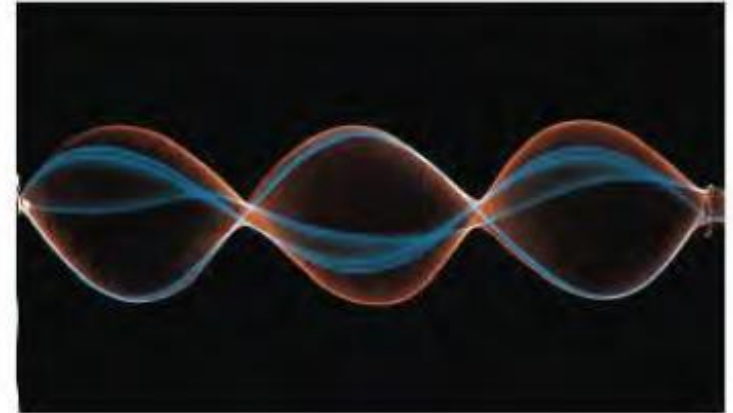
(a) String is one-half wavelength long.



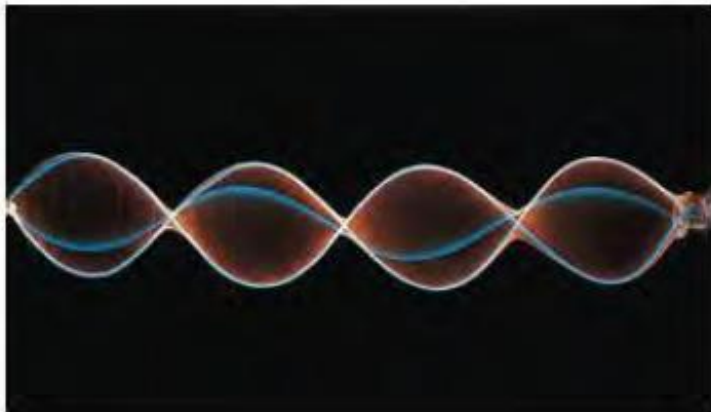
(b) String is one wavelength long.



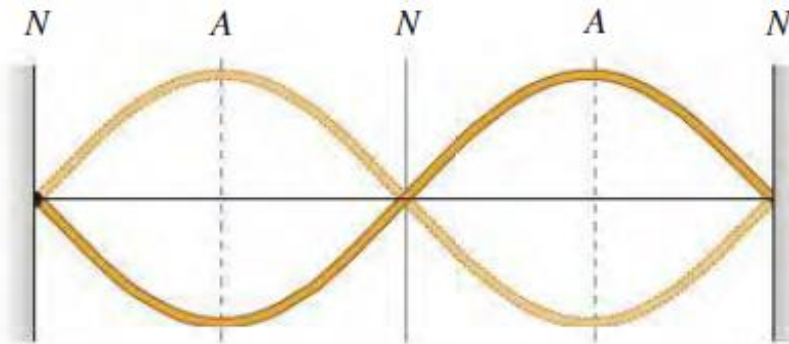
(c) String is one and a half wavelengths long.



(d) String is two wavelengths long.



(e) The shape of the string in (b) at two different instants



N = **nodes**: points at which the string never moves

A = **antinodes**: points at which the amplitude of string motion is greatest



Χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα

- Το σύστημα της στερεωμένης χορδής έχει μία **οριακή συνθήκη** (boundary condition).
- Επειδή τα άκρα της χορδής είναι σταθερά, θα έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης και ως εκ τούτου θα είναι εξ ορισμού δεσμοί.
- Η προϋπόθεση ότι και τα δύο άκρα της χορδής πρέπει να είναι δεσμοί καθορίζει το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος.
- Τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται είναι τέτοια ώστε το μήκος της χορδής (L) να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος του στάσιμου κύματος:

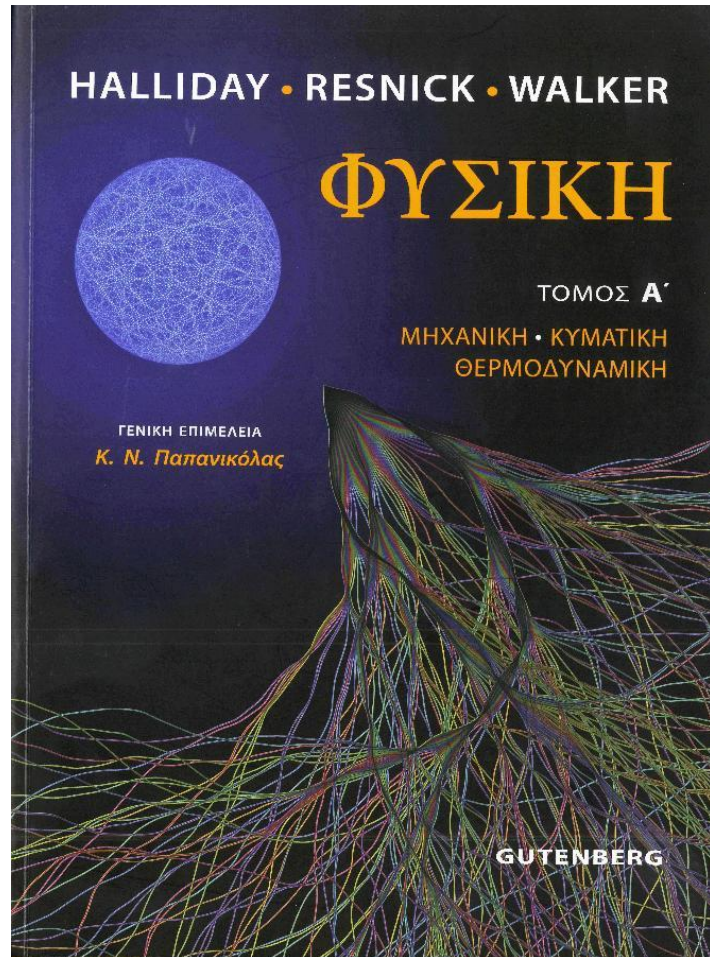
$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{όπου } n = 1, 2, 3, \dots$$



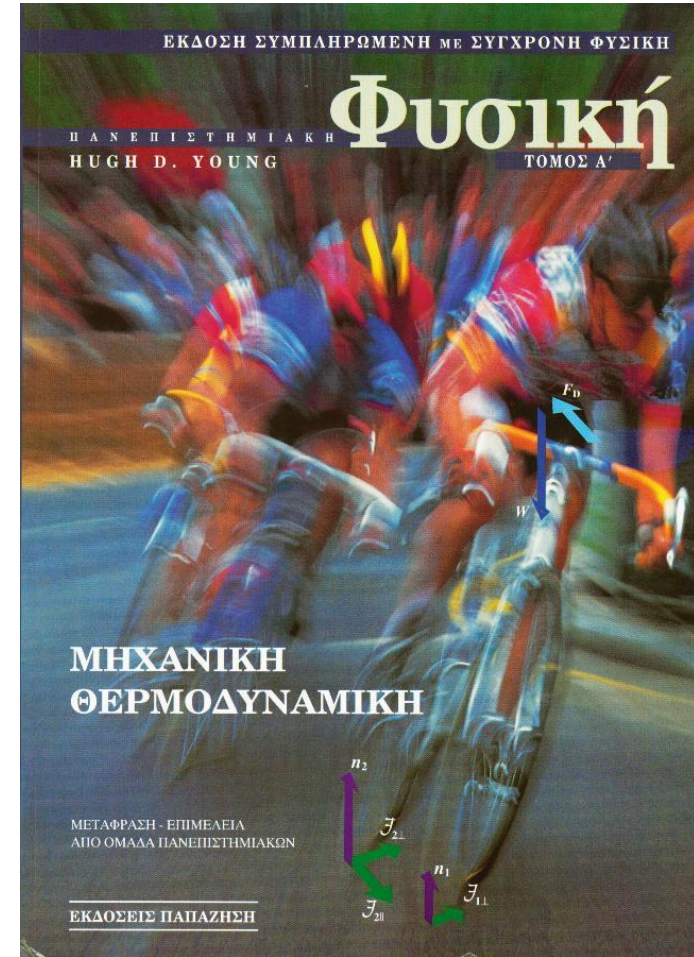
Χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα

- Το μήκος κύματος (και κατά συνέπεια και η συχνότητα) των στάσιμων κυμάτων είναι **κβαντισμένα!!!**
- Δηλαδή, μπορούν να πάρουν μόνο ορισμένες διακριτές τιμές.
- Η κβάντωση των μηκών κύματος προκύπτει λόγω της ύπαρξης της οριακής συνθήκης.
- Αν δεν υπήρχε οριακή συνθήκη δεν θα υπήρχε κβάντωση.
- Η οριακή συνθήκη αναγκάζει το σύστημα να πάρει ορισμένες μόνο τιμές για το μήκος κύματος.
- **Δεν υπάρχει κβάντωση χωρίς οριακές συνθήκες!!!**

Επανάληψη, Στάσιμα Κύματα



Κεφάλαιο 16



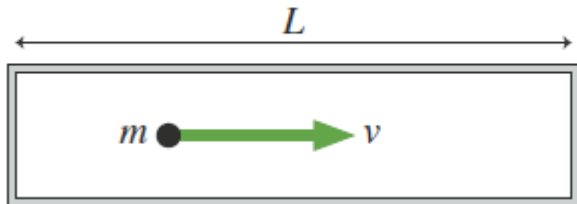
Κεφάλαιο 20

Σωματίδιο εγκλωβισμένο σε κιβώτιο (particle in a box)

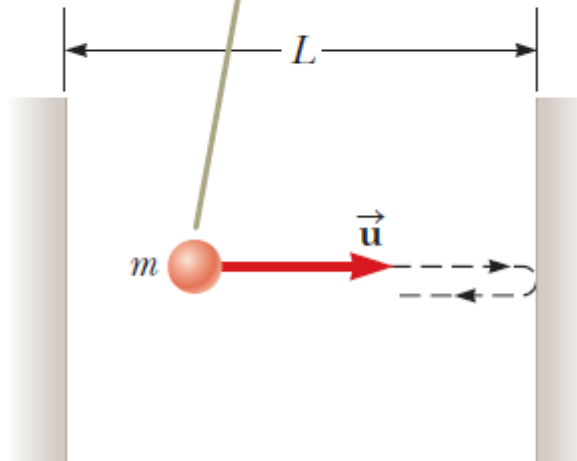


- Έστω ένα σώμα το οποίο κινείται πάνω στον άξονα x ανακλώμενο ελαστικά μπρος-πίσω από δύο αδιαπέραστα τοιχώματα.

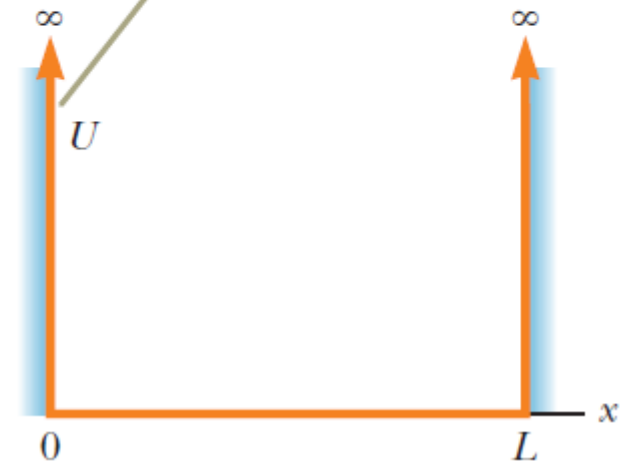
(a) A classical particle bounces back and forth.



This figure is a *pictorial representation* showing a particle of mass m and speed u bouncing between two impenetrable walls separated by a distance L .



This figure is a *graphical representation* showing the potential energy of the particle-box system. The blue areas are classically forbidden.





Σωματίδιο εγκλωβισμένο σε κιβώτιο

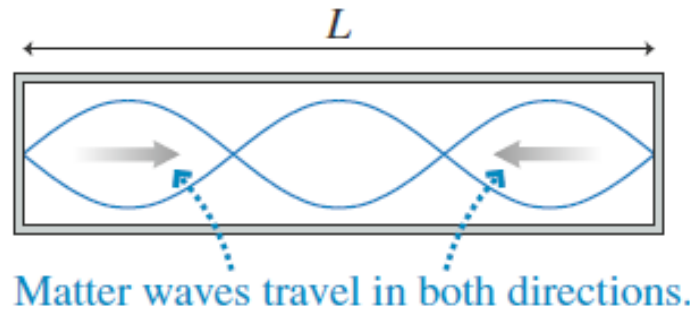
- Το πλάτος δεν μας ενδιαφέρει, οπότε θεωρούμε το κιβώτιο ως μονοδιάστατο.
- Το μονοδιάστατο κιβώτιο με μήκος L αντιστοιχεί σε ένα πηγάδι δυναμικού του οποίου τα τοιχώματα είναι απείρως υψηλά.
- Δηλαδή, για $x \leq 0$ και $x \geq L$ ισχύει ότι $U(x) = \infty$, ενώ για $0 < x < L$ ισχύει ότι $U(x) = 0$.
- Το σωματίδιο κινείται με ταχύτητα v και έχει μόνο κινητική ενέργεια.
- Οι συγκρούσεις με τα τοιχώματα του δοχείου είναι πλήρως ελαστικές, οπότε η ενέργεια του σωματιδίου δεν αλλάζει ποτέ.



Σωματίδιο εγκλωβισμένο σε κιβώτιο

- Σύμφωνα με την κλασσική φυσική, δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ταχύτητα ή την ενέργεια του σωματιδίου.
- Αλλά αν η ύλη έχει κυματικές ιδιότητες, τότε πρέπει να θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο μέσα στο κιβώτιο είναι ένα κύμα που αντανακλάται εμπρός και πίσω μεταξύ των άκρων του κιβωτίου.
- Κατά συνέπεια, δημιουργούνται **στάσιμα υλικά κύματα!!!**

(b) A reflected wave creates a standing wave.





Σωματίδιο εγκλωβισμένο σε κιβώτιο

- Τα στάσιμα αυτά υλικά κύματα, έχουν μήκος κύματος το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{όπου } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Το μήκος κύματος των υλικών κυμάτων είναι **κβαντισμένο!!!**
- Επιπλέον, το μήκος κύματος de Broglie ισούται με $\lambda = h/mv$, άρα:

$$\lambda_n = \frac{h}{mv} = \frac{2L}{n} \Leftrightarrow v_n = \frac{h}{2Lm} n$$



Σωματίδιο εγκλωβισμένο σε κιβώτιο

- Κατά συνέπεια, είναι κβαντισμένη και η ενέργεια!!!

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{h^2}{8L^2 m} n^2 \quad \text{όπου } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Η υπόθεση του de Broglie σχετικά με τις κυματικές ιδιότητες της ύλης μας οδηγεί στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα: **ένα σωματίδιο περιορισμένο σε ένα κιβώτιο** (ή σε ένα πηγάδι δυναμικού με άπειρο βάθος) **μπορεί να έχει μόνο ορισμένες τιμές μήκους κύματος, ταχύτητας και ενέργειας.**



Σωματίδιο εγκλωβισμένο σε κιβώτιο

- Αν το σωματίδιο δεν ήταν εγκλωβισμένο στο κιβώτιο, αλλά μπορούσε να κινηθεί ελεύθερα, τότε πάλι θα σχημάτιζε στάσιμο υλικό κύμα, το οποίο όμως θα μπορούσε να πάρει μια οποιαδήποτε τιμή μήκους κύματος, άρα και ενέργεια.
- Δηλαδή, δεν θα ήταν κβαντισμένο.
- Η κβάντωση τους μήκους κύματος και της ενέργειας προκύπτει από τον περιορισμό ότι το σωματίδιο μπορεί να κινηθεί μόνο μέσα στο κιβώτιο.



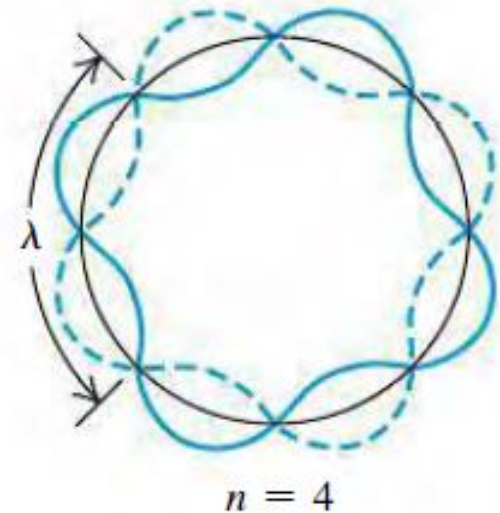
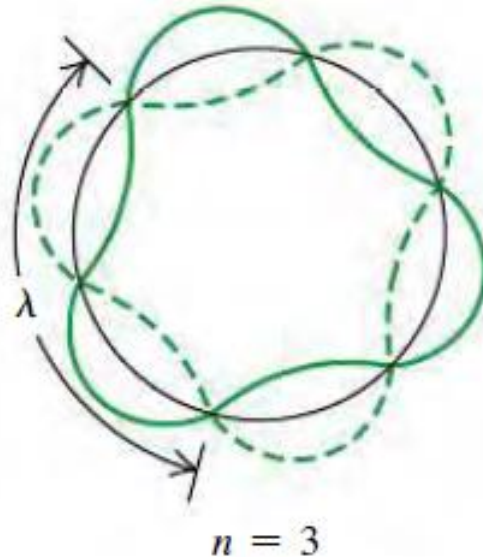
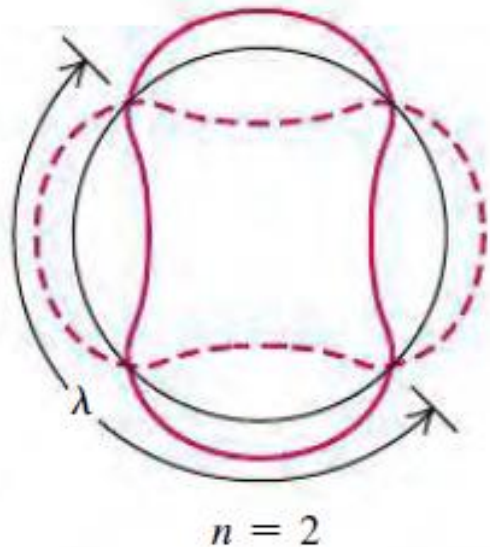
Στάσιμα κύματα στο άτομο

- Ας επεκτείνουμε την ιδέα αυτή στα άτομα, αφού και στα άτομα τα ηλεκτρόνια είναι εξαναγκασμένα να κινούνται γύρω από τον πυρήνα.
- Αντί να θεωρήσουμε το ηλεκτρόνιο ως σωματίδιο που κινείται γύρω από τον πυρήνα σε κυκλική τροχιά, θα το θεωρήσουμε ως ένα **στάσιμο κύμα με μήκος κύματος λ που εκτείνεται στην περιφέρεια του κύκλου**.
- Ένα ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο πρέπει να είναι ένα είδος **τρισδιάστατου στάσιμου κύματος** και, όπως το σωματίδιο σε ένα κιβώτιο, πρέπει να έχει κβαντισμένες ενέργειες.



Στάσιμα κύματα στο άτομο

- Στην περιφέρεια της κυκλικής τροχιάς του ηλεκτρονίου σχηματίζονται στάσιμα κύματα.
- Για να μπορεί το ηλεκτρόνιο να σχηματίσει ένα στάσιμο κύμα θα πρέπει η περιφέρεια του κύκλου $2\pi r$ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους του στάσιμου κύματος, λ .





Στάσιμα κύματα στο άτομο

$$2\pi r = n\lambda_n \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2\pi r}{n}$$

- Ταυτόχρονα, ισχύει και η εξίσωση των υλικών κυμάτων του de Broglie: $\lambda = h/mv$.
- Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\lambda_n = \frac{2\pi r}{n} = \frac{h}{mv} \Leftrightarrow mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

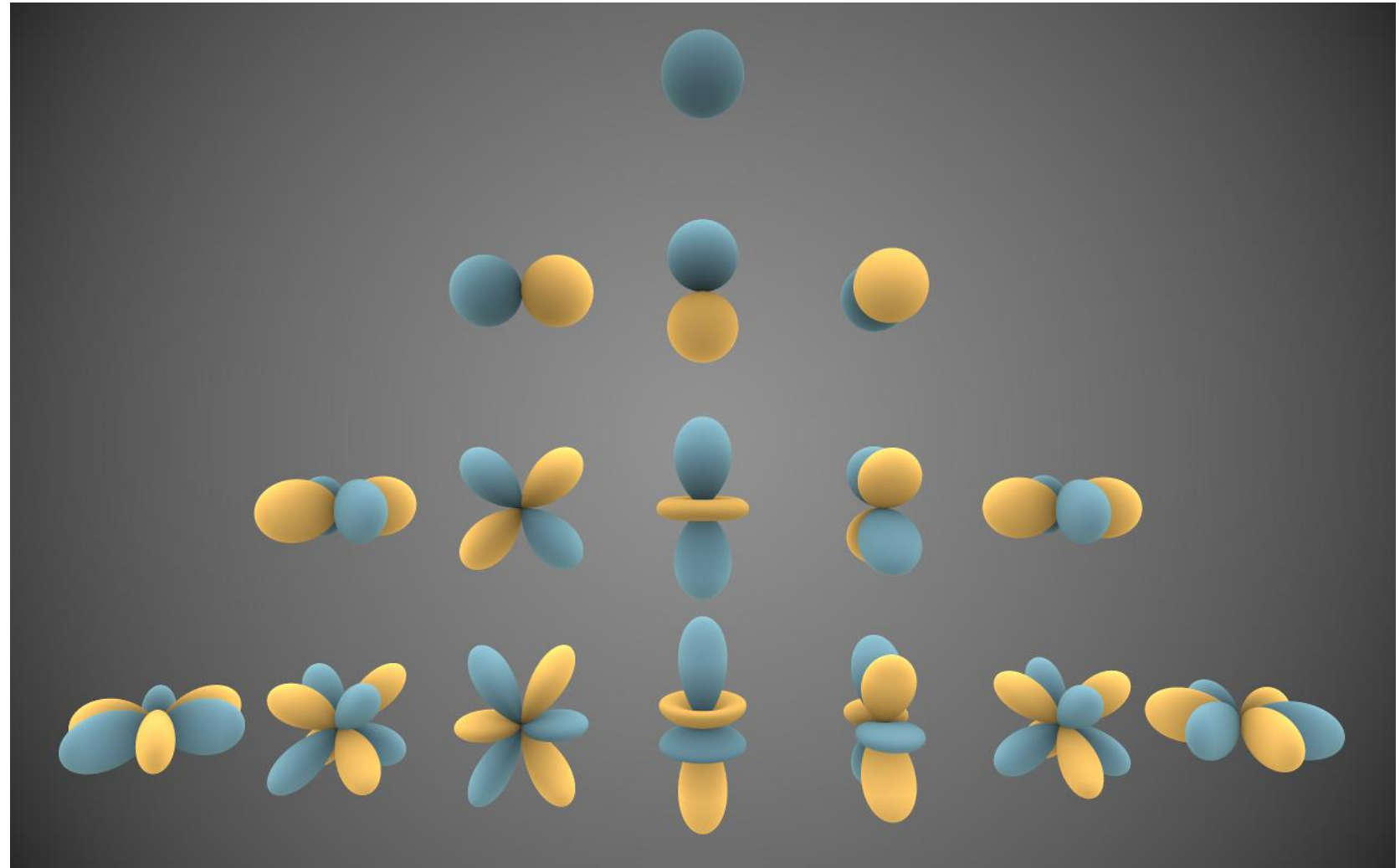
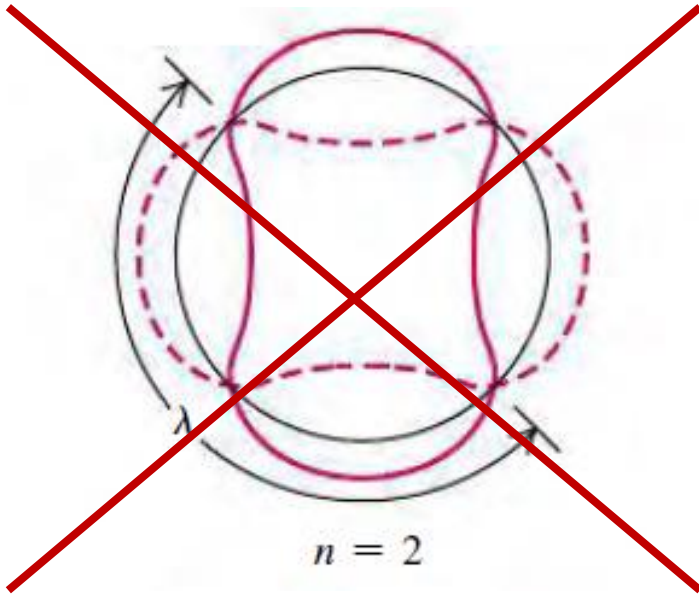
- Αυτή είναι όμως η **1^η συνθήκη του Bohr**: η στροφορμή του ηλεκτρονίου, mvr , είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck, $\hbar$ ($= h/2\pi$)!!!



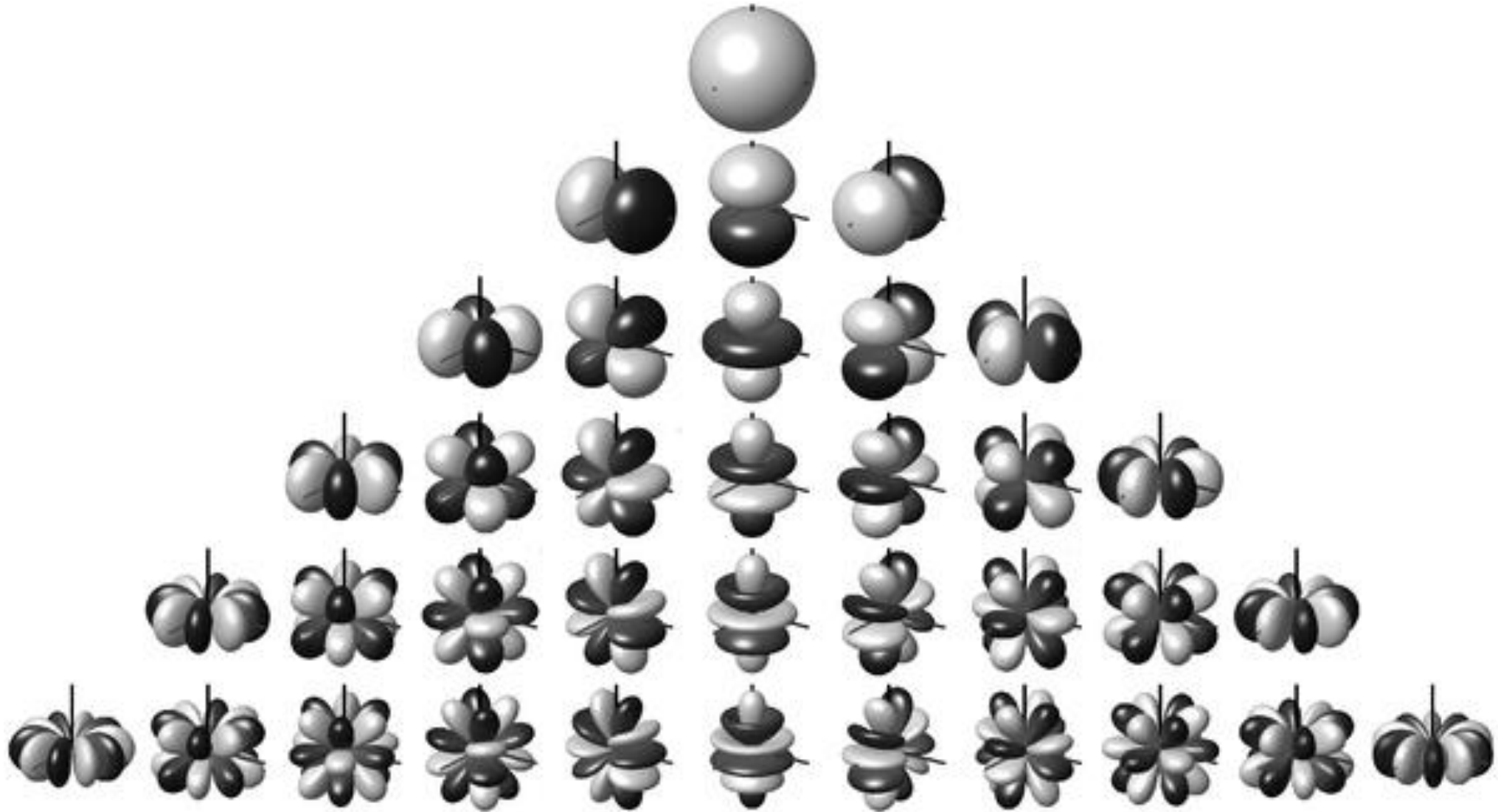
Στάσιμα κύματα στο άτομο

- Κατά συνέπεια, η υπόθεση de Broglie εξηγεί την ύπαρξη διακριτών ενεργειακών καταστάσεων στα άτομα, δηλαδή την κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων.
- Όλες οι επιτρεπτές ενεργειακές καταστάσεις του ηλεκτρονίου είναι στάσιμα κύματα, το καθένα με τη δική του ενέργεια και μήκος κύματος.
- Η 1^η συνθήκη του Bohr (δηλαδή, η ύπαρξη κβαντισμένων ενεργειακών καταστάσεων) είναι επί της ουσίας η συνθήκη δημιουργίας **τρισδιάστατων στάσιμων κυμάτων** στο άτομο του υδρογόνου.

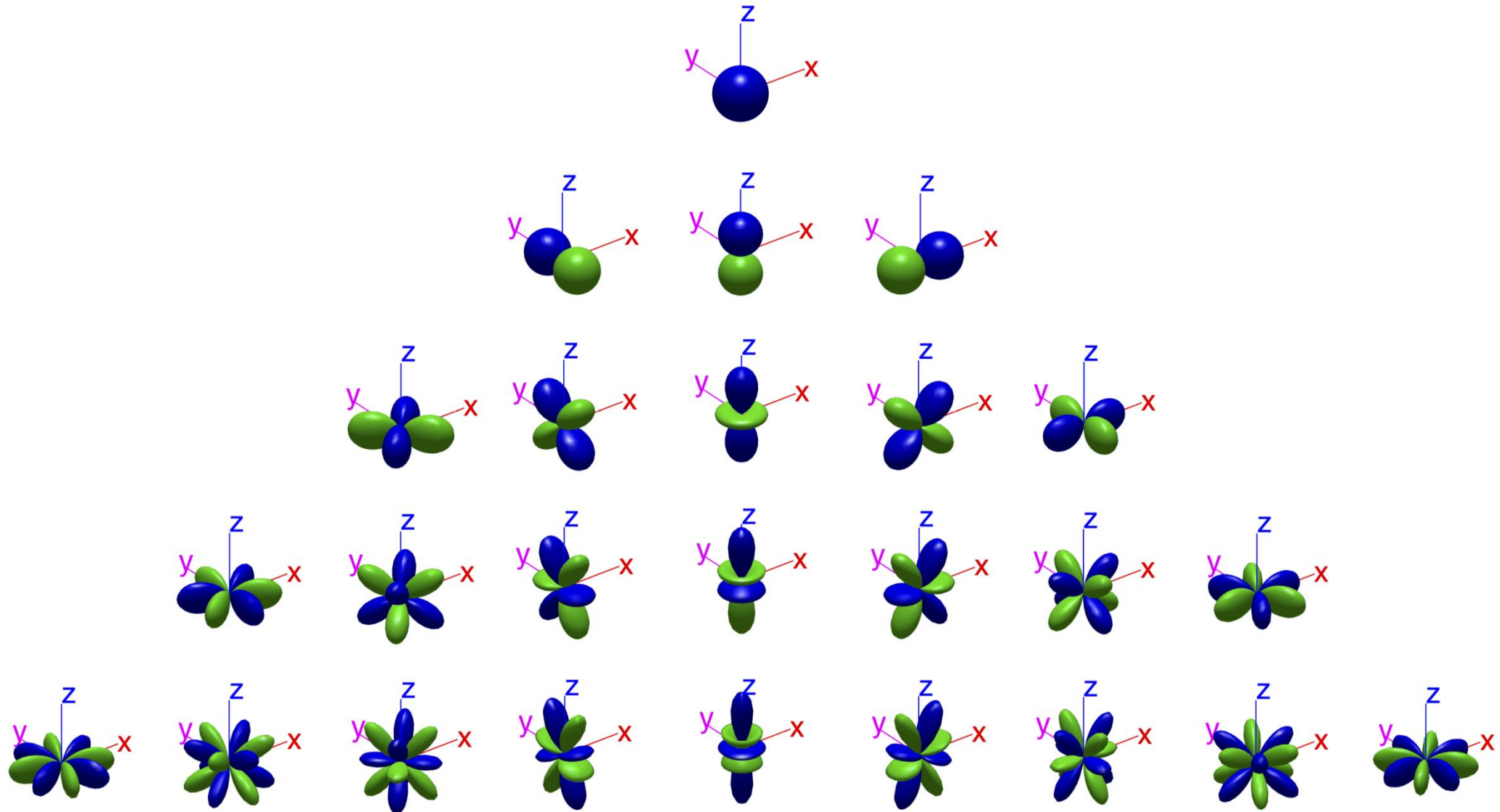
Προσοχή στα στάσιμα κύματα!!!



Προσοχή στα στάσιμα κύματα!!!



Προσοχή στα στάσιμα κύματα!!!





Παράδειγμα 4.3

- Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie ενός ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου.

- Απάντηση:

$$\lambda_n = \frac{2\pi r}{n}$$

- Στη θεμελιώδη κατάσταση ισχύει ότι $n = 1$ και $r = a_0$.

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m k e^2} = 0,0529 \text{ nm} = 0,529 \text{ Å}$$

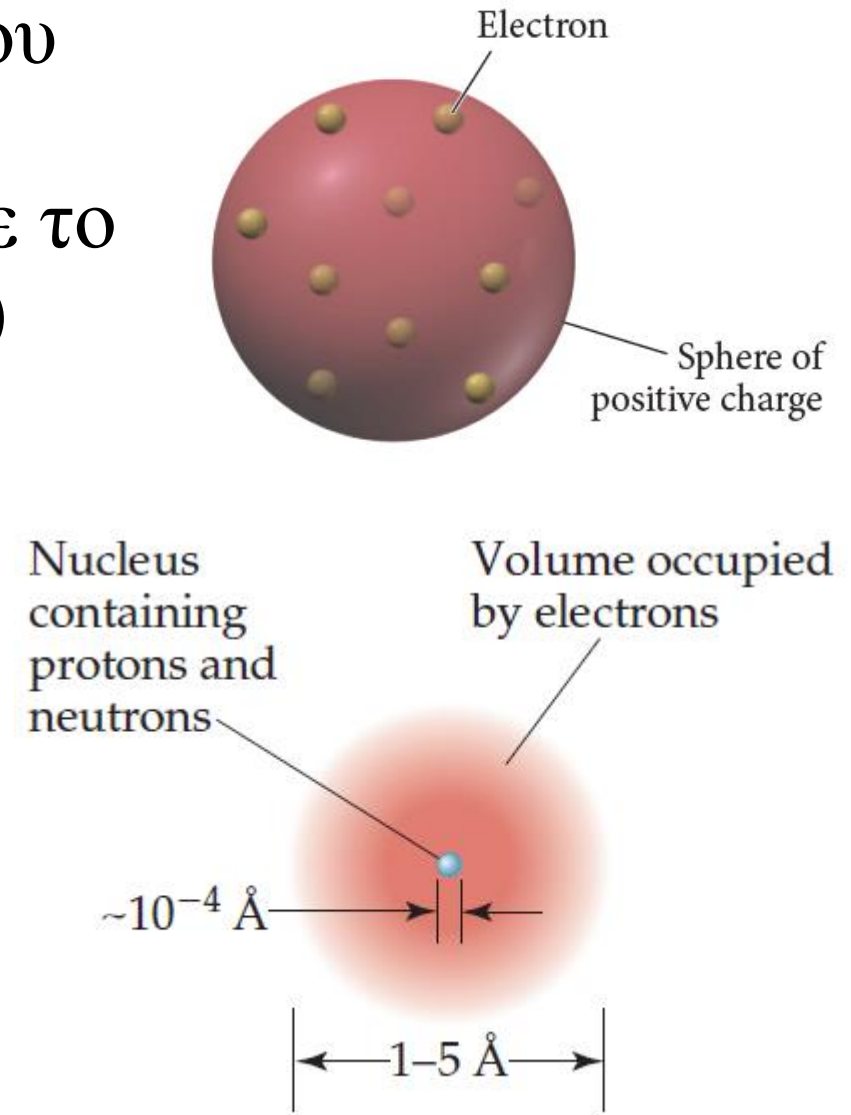
- Άρα:

$$\lambda_1 = 2\pi a_0 = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,0529 \text{ nm} = 0,332 \text{ nm} = 3,32 \text{ Å}$$



Μοντέλο δομής του ατόμου κατά Rutherford

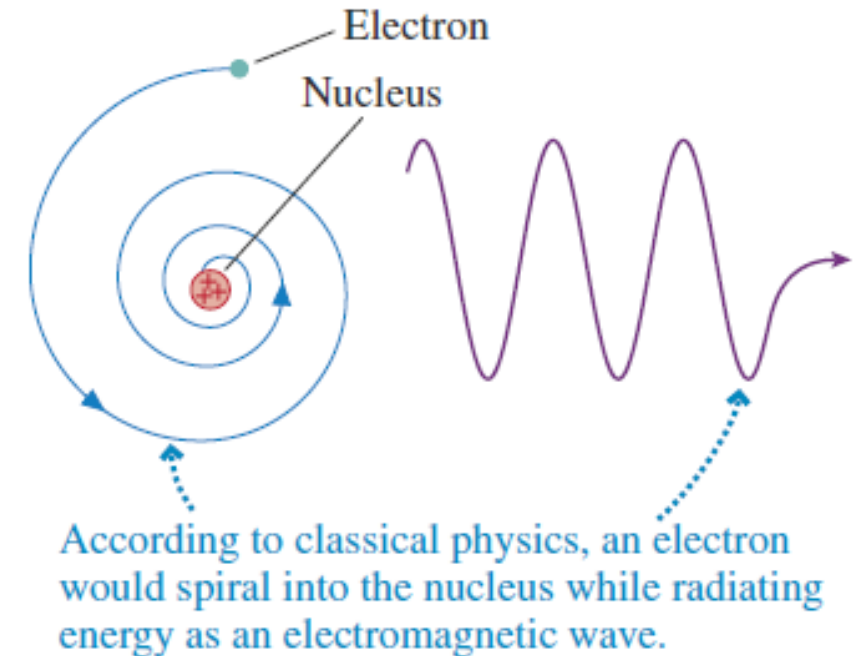
- Μετά την απόρριψη του μοντέλου δομής του ατόμου του Thomson (μοντέλο του «σταφιδόψωμου»), ο Rutherford διατύπωσε το λεγόμενο **πυρηνικό μοντέλο** (ή πλανητικό) δομής του ατόμου:
- ✓ όλη σχεδόν η μάζα του ατόμου και το θετικό φορτίο βρίσκονται συγκεντρωμένα στον **πυρήνα**
- ✓ γύρω από τον πυρήνα κινούνται τα αρνητικά φορτισμένα **ηλεκτρόνια**



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο



- Σύμφωνα με την κλασική θεωρία το άτομο δεν θα έπρεπε να είναι σταθερό λόγω:
 1. Της εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας εξαιτίας της περιφοράς του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα.
- Ως εκ τούτου, το ηλεκτρόνιο θα έπρεπε να διαγράφει σπειροειδή κίνηση και να συγκρούεται με το πρωτόνιο σε περίπου 10^{-10} s.



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο



2. Αν η ενέργεια του ηλεκτρονίου μπορούσε να πάρει οποιεσδήποτε τιμές (δηλαδή, αν δεν ήταν κβαντισμένη) τότε το άτομο δεν θα έπρεπε να είναι σταθερό λόγω των συγκρούσεων των ατόμων μεταξύ τους στην αέρια φάση.
- Λόγω της θερμικής κίνησης, τα άτομα ενός αερίου κινούνται συνεχώς και άτακτα προς όλες τις κατευθύνσεις και συγκρούονται μεταξύ τους.
 - Η πυκνότητα ενός αερίου είναι περίπου 10^{20} άτομα/cm³.
 - Σε συνηθισμένες θερμοκρασίες (περίπου 300 K) η μέση ταχύτητα κίνησή τους είναι της τάξης του 1 km/s!!!



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο

- Η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι της τάξης του μm (10^{-6} m)!!!
- Η συχνότητα των συγκρούσεων είναι της τάξης των $10^9/\text{s}$, δηλαδή περίπου 1 δισεκατομμύριο συγκρούσεις το δευτερόλεπτο!!!
- Οι συγκρούσεις λόγω της θερμικής κίνησης, σε θερμοκρασία περιβάλλοντος (π.χ. περίπου $T = 300 \text{ K}$), μεταφέρουν ενέργεια της τάξεως των 10^{-2} eV .
- Αν το άτομο μπορούσε να αποκτήσει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας, τότε:
 - ✓ η ενέργεια του θα άλλαζε συνεχώς και δεν θα ήτανε πότε το ίδιο
 - ✓ δεν θα είχε ποτέ τις ίδιες φυσικές και χημικές ιδιότητες.



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο

- Τα δύο αυτά θεμελιώδη προβλήματα της κλασικής θεωρίας αντιμετωπίστηκαν από τον Bohr με τη διατύπωση δύο αξιωμάτων ή συνθηκών:
- **Συνθήκη 1^η**: Επιτρεπτές είναι οι τροχιές εκείνες για τις οποίες η στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck, $\hbar$ ($= h/2\pi$).
- Κατά συνέπεια, οι τροχιές και οι ενέργειες του ηλεκτρονίου είναι κβαντισμένες, δηλαδή μπορούν να πάρουν μόνο κάποιες επιτρεπτές τιμές.



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο

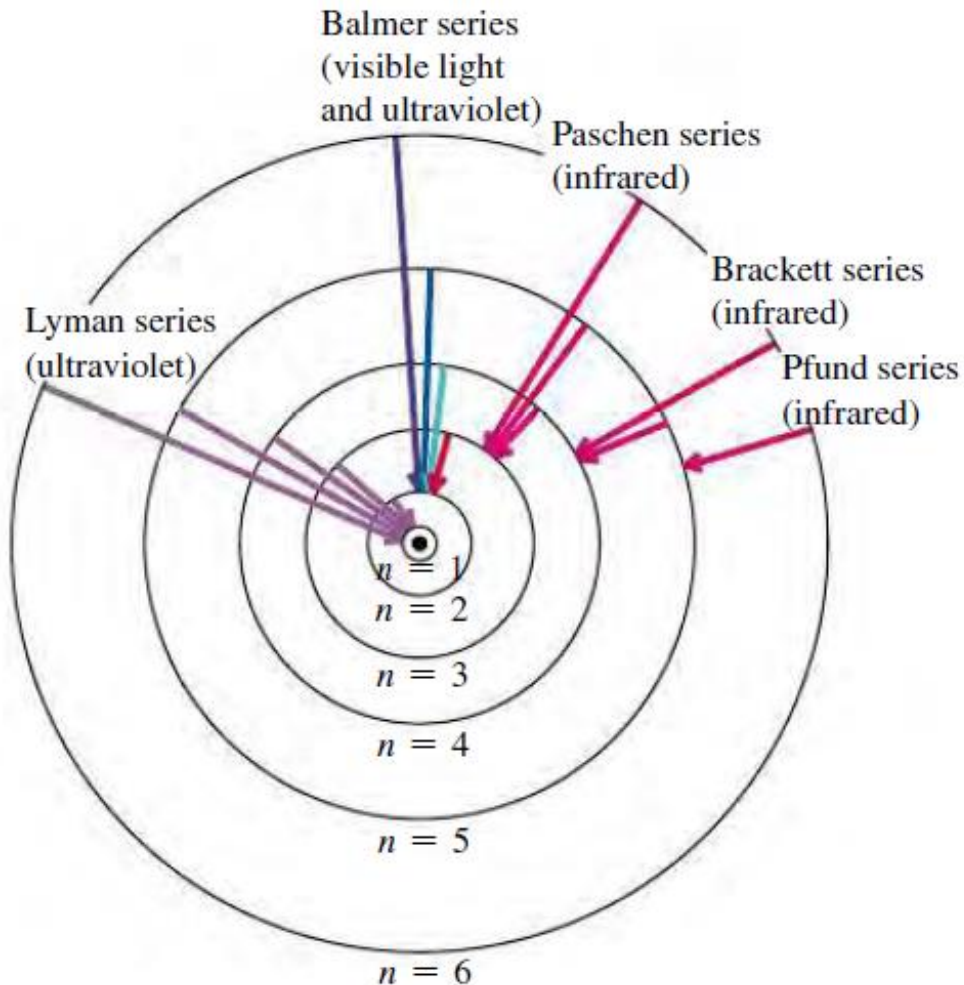
- Η συνθήκη ή το αξίωμα αυτό του Bohr εξηγείται αβίαστα με τη θεωρία των υλοκυμάτων:
- το ηλεκτρόνιο σχηματίζει τρισδιάστατα στάσιμα κύματα κατά την κίνησή του του γύρω από τον πυρήνα του ατόμου.
- Άρα, είναι κβαντισμένη:
 - ✓ η στροφορμή
 - ✓ η ενέργεια

$$E = -\frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{2,180 \times 10^{-18}}{n^2} \text{ J} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

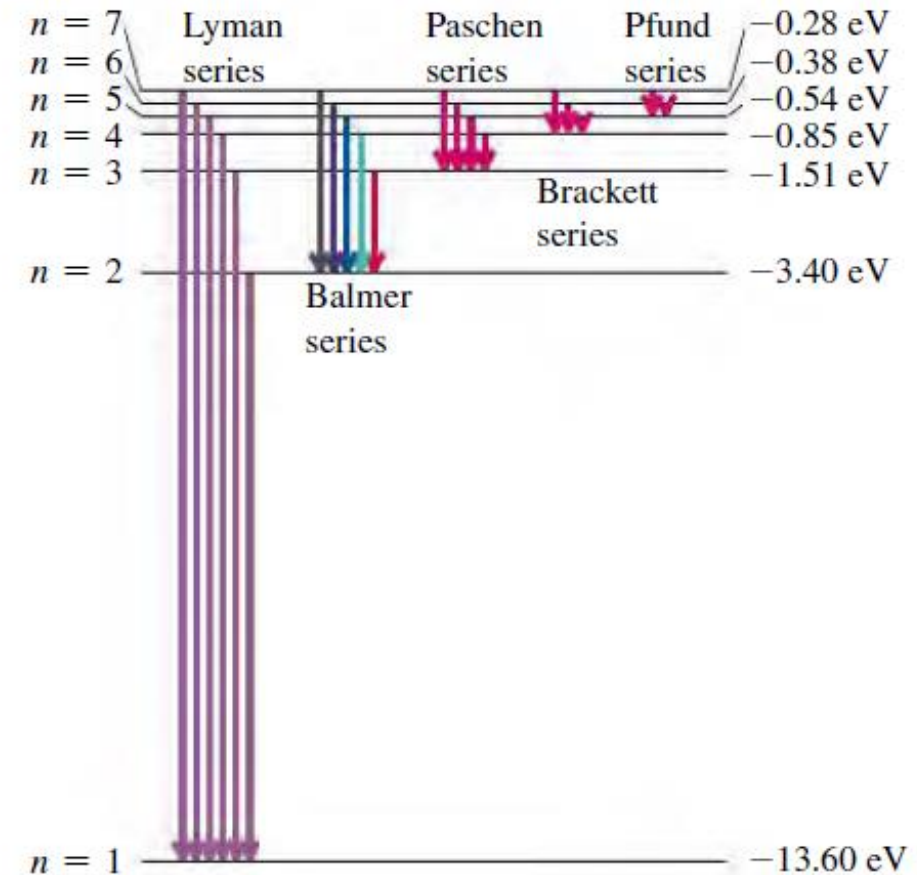
Επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες



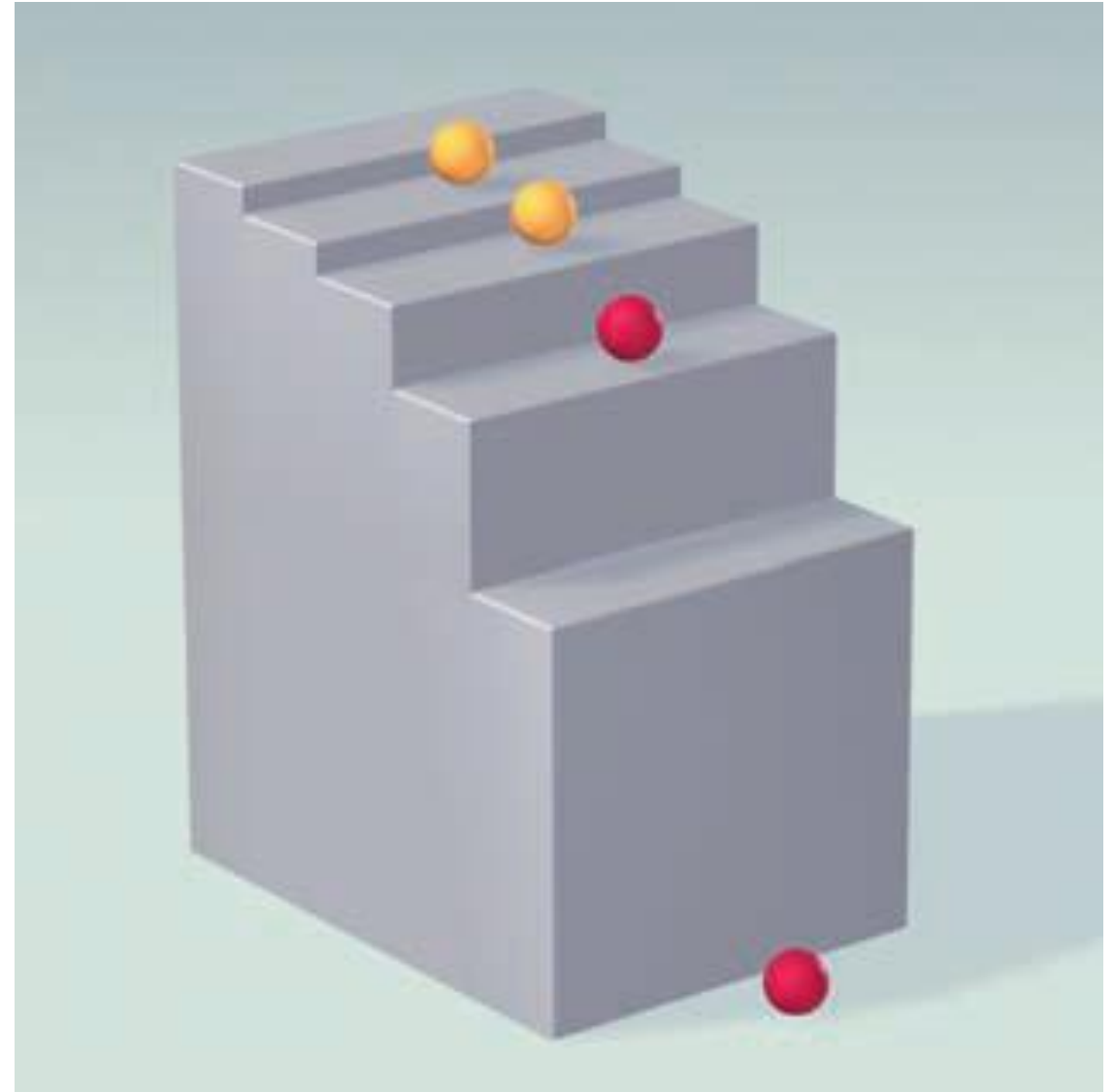
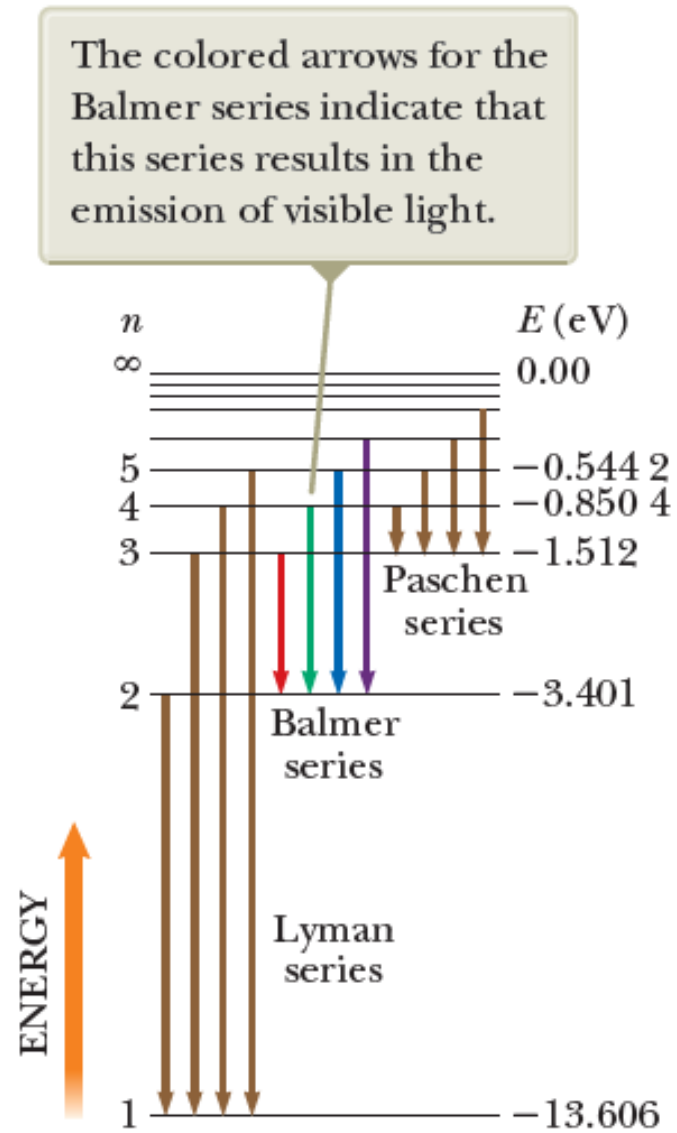
(a) Permitted orbits of an electron in the Bohr model of a hydrogen atom (not to scale). Arrows indicate the transitions responsible for some of the lines of various series.



(b) Energy-level diagram for hydrogen, showing some transitions corresponding to the various series



Επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες





Σταθερότητα λόγω κβάντωσης

- Με βάση τη θεωρία του Bohr, τα άτομα στη βασική ενεργειακή τους κατάσταση είναι σταθερά ως προς τις μεταξύ τους συγκρούσεις επειδή:
- ✓ δεν μπορούν να αποκτήσουν μικρότερη ενέργεια, αφού δεν υπάρχει επιτρεπτή τροχιά χαμηλότερης ενέργειας
- ✓ αιτείται αρκετά υψηλή ενέργεια (10,2 eV για το άτομο του υδρογόνου, με αντίστοιχες τιμές και για τα υπόλοιπα άτομα) για να μεταβούν από τη βασική ενεργειακή τους κατάσταση στην πρώτη διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση



Σταθερότητα λόγω κβάντωσης

- Η ενέργεια που προσφέρουν οι μεταξύ τους συγκρούσεις λόγω της άτακτης θερμικής κίνησης είναι της τάξης των 10^{-2} eV και ως εκ τούτου δεν επαρκεί για τη διέγερση των ατόμων.
- Λόγω της κβάντωσης της ενέργειας, δεν μπορούν να γίνουν βαθμιαίες αλλαγές αλλά μόνο «κβαντικά άλματα» με καθορισμένη διαφορά ενέργειας.
- Το ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να πάρει σταδιακά την ενέργεια που χρειάζεται για να διεγερθεί, π.χ. 0,01 eV από κάθε σύγκρουση και με περίπου 100 συγκρούσεις να αποκτήσει την ενέργεια που χρειάζεται για να διεγερθεί.
- **Απαιτούνται 10,2 eV μονομιάς: όλα ή τίποτα!!!**



Σταθερότητα λόγω κβάντωσης

- Κατά συνέπεια, παρά τις συχνές συγκρούσεις λόγω της άτακτης θερμικής κίνησης, τα άτομα είναι σταθερά σε ένα μεγάλο εύρος θερμοκρασιών.
- Επίσης, λόγω της κβάντωσης της ενέργειας, όταν τα άτομα διεγείρονται ενεργειακά με διάφορους τρόπους (π.χ. θερμικά ή φωτοχημικά) επιστρέφουν πάντα στην ίδια αρχική κατάσταση.
- Επιπλέον, όταν προσφερθεί η κατάλληλη ενέργεια, είτε θερμικά, είτε φωτοχημικά, τα άτομα (και κατ' επέκταση τα μόρια) υφίστανται χημικές αντιδράσεις με καθορισμένο και επαναλήψιμο τρόπο.



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο

- Συνθήκη 2^η: Το ηλεκτρόνιο δεν εκπέμπει ακτινοβολία κατά την παραμονή του σε μία επιτρεπτή ενεργειακή κατάσταση.
- Το ηλεκτρόνιο εκπέμπει ακτινοβολία μόνο κατά τη μετάβασή του από μία επιτρεπτή τροχιά μεγαλύτερη ενέργειας σε μία άλλη επιτρεπτή τροχιά χαμηλότερης ενέργειας.
- Το ηλεκτρόνιο απορροφά ακτινοβολία κατά τη μετάβασή του από μία επιτρεπτή τροχιά χαμηλότερης ενέργειας σε μία άλλη τροχιά υψηλότερης ενέργειας.
- Σε κάθε περίπτωση, η ενέργεια του φωτονίου ισούται με:

$$|\Delta E| = |E_f - E_i| = hf$$



Μοντέλο του Bohr και Κβάντωση, Μέρος 2^ο

- Τα ηλεκτρόνια δεν εκπέμπουν ακτινοβολία κατά την κίνησή τους γύρω από τον πυρήνα γιατί σχηματίζουν τρισδιάστατα στάσιμα κύματα.
- Τα στάσιμα κύματα δεν μεταφέρουν ενέργεια!!!
- Ως εκ τούτου, η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι σταθερή και το ηλεκτρόνιο δεν εκπέμπει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.
- Η θεωρία των υλοκυμάτων του de Broglie εξηγεί αβίαστα και τις δύο συνθήκες του Bohr!!!



Κυματική θεωρία της ύλης

- Τα υλικά σώματα έχουν τόσο σωματιδιακές όσο και κυματικές ιδιότητες.
- Η ενέργεια με τη μορφή ακτινοβολιών έχει τόσο κυματικές όσο και σωματιδιακές ιδιότητες.
- **Τόσο η ύλη όσο και η ενέργεια με τη μορφή ακτινοβολιών έχουν διττή φύση: σωματιδιακή και κυματική.**
- **Η κυματική και η σωματιδιακή θεωρία της ύλης και της ενέργειας με τη μορφή ακτινοβολιών αλληλοσυμπληρώνονται.**



Αρχή της αβεβαιότητας

- Το ηλεκτρόνιο έχει διττή φύση: είναι ταυτόχρονα σωματίδιο αλλά έχει και κυματικές ιδιότητες.
- **Δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε ταυτόχρονα τόσο τη σωματιδιακή όσο και την κυματική φύση του ηλεκτρονίου.**
- Δεν πρόκειται για δική μας αδυναμία ή ανικανότητα μέτρησης, αλλά για ένα **εγγενές χαρακτηριστικό της Φύσης!!!**
- Η σωματιδιακή και η κυματική φύση του ηλεκτρονίου είναι **συμπληρωματικές ιδιότητες.**
- Οι συμπληρωματικές ιδιότητες αποκλείουν η μία την άλλη: όσο περισσότερο γνωρίζουμε τη μία τόσο λιγότερο γνωρίζουμε την άλλη.



Αρχή της αβεβαιότητας

- Οι συμπληρωματικές ιδιότητες που παρατηρούμε εξαρτώνται από το πείραμα που παρατηρούμε: η παρατήρηση ενός γεγονότος επηρεάζει το αποτέλεσμα του!!!
- Σύμφωνα με την εξίσωση του de Broglie, η **ορμή** του ηλεκτρονίου συνδέεται με την **κυματική του φύση**, ενώ η **θέση** του ηλεκτρονίου συνδέεται με τη **σωματιδιακή του φύση**.
- Τα σωματίδια έχουν πλήρως καθορισμένη θέση αλλά τα κύματα όχι.



Αρχή της αβεβαιότητας

- Κατά συνέπεια, η ανικανότητα μας να παρατηρήσουμε το ηλεκτρόνιο τόσο ως σωματίδιο όσο και ως κύμα σημαίνει ότι **είναι αδύνατον να προσδιοριστεί ταυτόχρονα και με απεριόριστη ακρίβεια η θέση και η ορμή του ηλεκτρονίου.**
- Η αρχή αυτή ονομάστηκε **αρχή της αβεβαιότητας ή της απροσδιοριστίας (uncertainty principle).**



- Διατυπώθηκε το 1927 από το Γερμανό Φυσικό Werner Heisenberg (1901– 1976, βραβείο Nobel Φυσικής 1932).



Αρχή της αβεβαιότητας

- Είναι αδύνατο να μετρήσουμε με την ίδια ακρίβεια ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου.
- Εάν η μέτρηση της θέσης ενός σωματιδίου έχει γίνει με αβεβαιότητα Δx και μία ταυτόχρονη μέτρηση της ορμής έχει γίνει με αβεβαιότητα Δp , τότε ισχύει:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \Leftrightarrow \Delta x \cdot \Delta(mv) \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

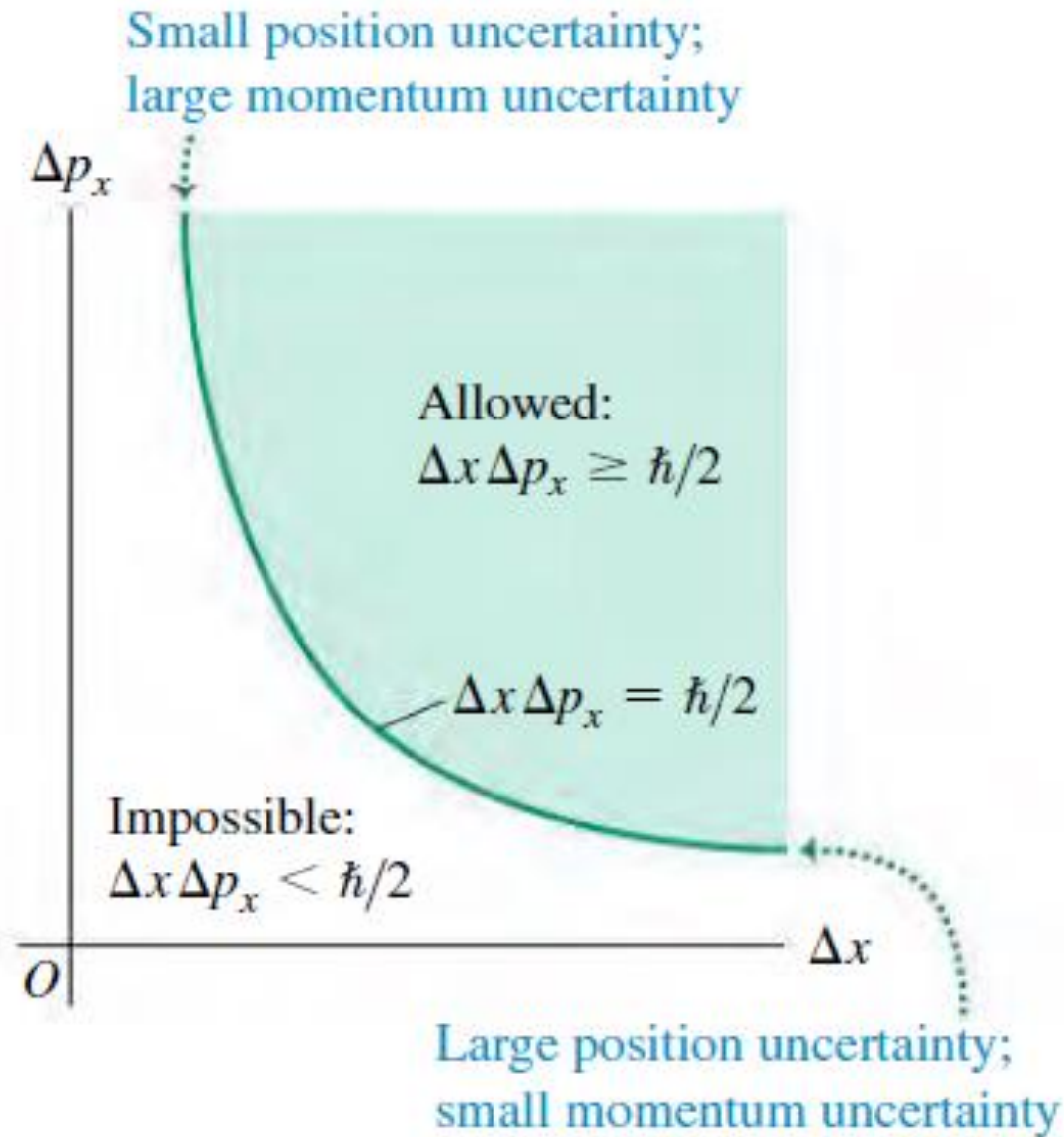




Αρχή της αβεβαιότητας

- Με άλλα λόγια, με όσο μεγαλύτερη ακρίβεια γνωρίζουμε τη θέση ενός ηλεκτρονίου (μικρότερο Δx), με τόσο μικρότερη ακρίβεια γνωρίζουμε την ορμή του (μεγαλύτερο Δp) και αντίστροφα.
- Η συμπληρωματικότητα της κυματικής και της σωματιδιακής φύσης του ηλεκτρονίου έχει ως αποτέλεσμα τη συμπληρωματικότητα ως προς την ακρίβεια μέτρησης της ορμής και της θέσης του ηλεκτρονίου.

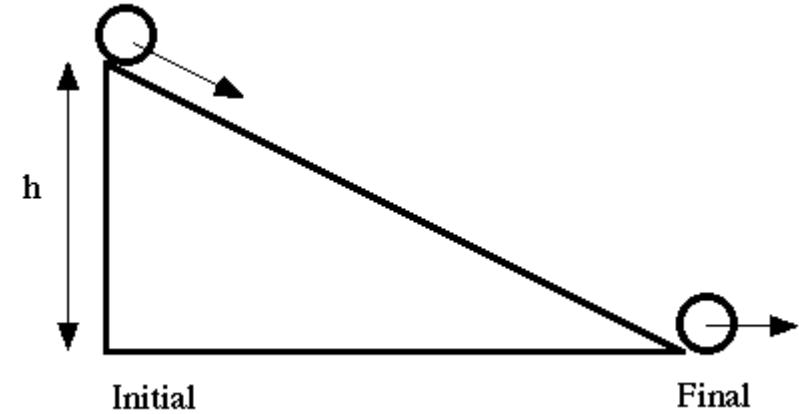
Αρχή της αβεβαιότητας





Αρχή της αβεβαιότητας

- Σύμφωνα με την κλασική Φυσική, αν έχουμε ένα υλικό σώμα το οποίο κινείται (π.χ. μία μπάλα η οποία κυλάει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση της μπάλας, την κατεύθυνση της κίνησης και την ταχύτητα σε μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή.
- Δεν μπορούμε όμως να κάνουμε το ίδιο και για ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο εμφανίζει κυματικές ιδιότητες!!!





Αρχή της αβεβαιότητας

- Τα κύματα εκτείνονται στο χώρο και ως εκ τούτου, η θέση τους δεν μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια.
- Επομένως, είναι αδύνατον να προσδιορίσουμε επακριβώς πού εντοπίζεται ένα ηλεκτρόνιο σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
- Ο Heisenberg πρότεινε ότι η διττή φύση της ύλης θέτει ένα θεμελιώδη περιορισμό ως προς την ακρίβεια με την οποία μπορούμε να γνωρίζουμε τόσο τη θέση όσο και την ορμή ενός σωματιδίου σε μία δεδομένη χρονική στιγμή.



Αρχή της αβεβαιότητας

- Ο περιορισμός αυτός αποκτά σημασία μόνο όταν αναφερόμαστε στο μικρόκοσμο της ύλης, δηλαδή σε σωματίδια με τόσο μικρή μάζα όσο η μάζα του ηλεκτρονίου.
- Η αδυναμία ταυτόχρονου προσδιορισμού της θέσης και της ορμής ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε τυχόν πειραματικά σφάλματα ή πειραματική αδυναμία μέτρησης.
- Είναι ένας εγγενής περιορισμός τον οποίο θέτει η διττή φύση της ύλης και της ακτινοβολίας.



Παράδειγμα 4.4

- Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου κινείται με ταχύτητα 5×10^6 m/s. Αν η αβεβαιότητα κατά τη μέτρηση της ταχύτητας του είναι 1% να υπολογίσετε την αβεβαιότητα κατά τη μέτρηση της θέσης του.

➤ Απάντηση:

$$\Delta x \cdot \Delta(mv) \geq \frac{h}{4\pi} \Leftrightarrow \Delta x \geq \frac{h}{4\pi m \Delta v}$$
$$\Leftrightarrow \Delta x \geq \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi \cdot 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,01 \cdot 5 \times 10^6 \text{ m/s}}$$
$$\Leftrightarrow \Delta x \geq 1,2 \times 10^{-9} \text{ m} = 1,2 \text{ nm} = 12 \text{ Å}!!!$$



Αρχή της αβεβαιότητας

- Η διάμετρος του ατόμου του υδρογόνου είναι περίπου $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.
- Άρα, η αβεβαιότητα κατά τη μέτρηση της θέσης του ηλεκτρονίου είναι 10 φορές (μία τάξη μεγέθους) μεγαλύτερη από το μέγεθος του ατόμου του υδρογόνου!!!
- Άρα επί της ουσίας, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε επακριβώς που βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου!!!
- Συνεπώς, δεν είναι σωστό να θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο κινείται γύρω από τον πυρήνα σε μια καλά καθορισμένη τροχιά, όπως στο μοντέλο του Bohr.



Αρχή της αβεβαιότητας

- Αντίθετα, στο μακρόκοσμο της ύλης, η αβεβαιότητα κατά τη μέτρηση της θέσης ενός αντικειμένου συνηθισμένης μάζας, όπως μία μπάλα του τένις, θα ήταν τόσο μικρή που θα ήταν πρακτικά ασήμαντη.
- Στην περίπτωση αυτή, το m είναι μεγάλο και το Δx είναι εκτός της δυνατότητας μέτρησης και επομένως δεν έχει καμία απολύτως πρακτική συνέπεια.



Αρχή της αβεβαιότητας

- Αν και η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg μπορεί να φαίνεται αινιγματική, στην πραγματικότητα λύνει ένα πολύ μεγάλο γρίφο.
- Χωρίς την αρχή της αβεβαιότητας, πλανάται ένα παράδοξο ερώτημα: πώς μπορεί να είναι κάτι ταυτόχρονα και σωματίδιο αλλά και κύμα;
- Τηρουμένων των αναλογιών, το να λέμε ότι ένα αντικείμενο είναι τόσο σωματίδιο όσο και κύμα είναι σαν να λέμε ότι ένα αντικείμενο είναι ταυτόχρονα κύκλος αλλά και τετράγωνο, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση.



Αρχή της αβεβαιότητας

- Ο Heisenberg έλυσε το αντιφατικό από πρόβλημα εισάγοντας την έννοια της συμπληρωματικότητας: ένα ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται είτε ως σωματίδιο είτε ως κύμα, αλλά ποτέ και τα δύο ταυτόχρονα.
- Η θεωρία των υλοκυμάτων του de Broglie, καθώς και η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg άλλαξαν ριζικά τον τρόπο προσέγγισης της ηλεκτρονικής δομής του ατόμου.
- Εγκαταλείφθηκε πλήρως η προσπάθεια να βρεθεί επακριβώς ταυτόχρονα η ορμή και η θέση του ηλεκτρονίου.



Κβαντική μηχανική

- Η περιγραφή της κίνησης του ηλεκτρονίου βασίστηκε στην κυματική του συμπεριφορά.
- Προέκυψε μία νέα θεωρία η οποία περιγράφει επακριβώς την ενέργεια του ηλεκτρονίου, ενώ η θέση του περιγράφεται με βάση την **πιθανότητα εύρεσής του στο χώρο**.
- Η θεωρία αυτή ονομάστηκε **κβαντική μηχανική (quantum mechanics)** ή κυματική μηχανική (wave mechanics).



Κεφάλαιο 4: Μαθησιακά αποτελέσματα

- Αφού μελετήσετε αυτό το κεφάλαιο, θα πρέπει να είστε σε θέση:
- ✓ Να περιγράφετε την έννοια της κυματοσυνάρτησης ενός κύματος, καθώς και της διαφορικής εξίσωσης κύματος
- ✓ Να υπολογίζετε το μήκος κύματος διαφόρων κινούμενων σωμάτων στο μικρόκοσμο και στο μακρόκοσμο της ύλης
- ✓ Να εξηγείτε γιατί δεν μπορεί να παρατηρηθεί το μήκος κύματος μακροσκοπικών αντικείμενων
- ✓ Να εξηγείτε την κβάντωση της ενέργειας των στάσιμων κυμάτων



Κεφάλαιο 4: Μαθησιακά αποτελέσματα

- ✓ Με βάση την υλοκυματική θεωρία της ύλης να εξηγείτε:
 - ❖ την κβάντωση της ενέργειας των ατόμων
 - ❖ τη σταθερότητα των ατόμων αλλά και η ικανότητά τους για την πραγματοποίηση χημικών αντιδράσεων
- ✓ Να εξηγείτε πως προκύπτει η αρχή της αβεβαιότητας με βάση την υλοκυματική θεωρία της ύλης
- ✓ Εξηγείτε πως η αρχή της αβεβαιότητας περιορίζει την ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα την ορμή και τη θέση ενός σωματιδίου
- ✓ Να υπολογίζετε την αβεβαιότητα ως προς τη θέση ή την ορμή ενός σωματιδίου

Άσκηση 4.2



- Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:
- a. ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα ίση με το 10% της ταχύτητας του φωτός
 - b. μία μπάλα του τένις μάζας 55 g που κινείται με ταχύτητα 35 m/s



Άσκηση 4.3

- Η περίθλαση νετρονίων (neutron diffraction) χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της δομής των μορίων.
- a. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie ενός νετρονίου το οποίο κινείται με ταχύτητα ίση με το 1,00% της ταχύτητας του φωτός.
- b. Να υπολογίσετε την ταχύτητα ενός νετρονίου με μήκος κύματος 75 pm.



Άσκηση 4.4

- Ένα σωματίδιο έχει ταχύτητα ίση με το 90% της ταχύτητας του φωτός.
- Αν το μήκος κύματος του σωματιδίου είναι $1,5 \times 10^{-15} \text{ m}$, ποια είναι η μάζα του σωματιδίου;

Άσκηση 4.5



- Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των ηλεκτρονίων με μήκη κύματος de Broglie $1,0 \times 10^2$ nm και 1,0 nm.

Άσκηση 4.6



- Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie (εκφρασμένο σε pm και σε Å) το οποίο σχετίζεται με ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα ίση με $2,19 \cdot 10^6$ m/s.

Άσκηση 4.7



- Πόσο είναι το μήκος κύματος ενός νετρονίου που κινείται με ταχύτητα $4,15 \text{ km/s}$;

Άσκηση 4.8



- Πόσο είναι το μήκος κύματος ενός πρωτονίου που κινείται με ταχύτητα $6,21 \text{ km/s}$;

Άσκηση 4.9



- Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται ένα νετρόνιο για να έχει μήκος κύματος $10,6 \text{ pm}$;

Άσκηση 4.10



- Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται ένα ηλεκτρόνιο για να έχει μήκος κύματος $10,0 \text{ pm}$;

Άσκηση 4.11



- Να υπολογίσετε την ταχύτητα ενός νετρονίου του οποίου το μήκος του υλικού κύματος είναι 505 pm.



Άσκηση 4.12

- Έστω τα παρακάτω τρία κινούμενα σώματα:
- i. μία μπάλα του γκολφ με μάζα 45,9 g η οποία κινείται με ταχύτητα 50,0 m/s
 - ii. ένα ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται με ταχύτητα $3,50 \times 10^5$ m/s
 - iii. ένα νετρόνιο το οποίο κινείται με ταχύτητα $2,3 \times 10^2$ m/s.
- Να ταξινομήσετε τα αντικείμενα κατά σειρά αυξανόμενου (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο) μήκους κύματος de Broglie.

(a) i<iii<ii

(b) ii<iii<i

(c) iii<ii<i

(d) i<ii<iii

(e) iii<i<ii



Άσκηση 4.13

- Ποιο είναι το μήκος κύματος de Broglie ενός αυτοκινήτου μάζας 1150 kg που κινείται με ταχύτητα 110 km/h.
- Να συγκρίνετε το μήκος αυτό με τη διάμετρο ενός ατόμου (περίπου 1 Å)

Άσκηση 4.14



- Να υπολογίσετε την ταχύτητα ενός νετρονίου η οποία απαιτείται ώστε το νετρόνιο να έχει μήκος κύματος de Broglie ίσο με $1,25 \text{ \AA}$.



Άσκηση 4.15

- Το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο χρησιμοποιείτε ευρύτατα για τη λήψη εικόνων με πολύ μεγάλη μεγέθυνση διαφόρων υλικών.
- Κατά την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων στο μικροσκόπιο, αυτά αποκτούν ταχύτητα $9,47 \times 10^6$ m/s.
 - a. Ποιο είναι το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων;
 - b. Είναι το μήκος κύματος αυτό συγκρίσιμο με το μέγεθος των ατόμων;



Άσκηση 4.16

- Η διακριτική ικανότητα (resolution) ενός μικροσκοπίου είναι περίπου ίση με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται για την παραγωγή της εικόνας.
- Τα ηλεκτρονικά μικροσκόπια χρησιμοποιούν μια δέσμη ηλεκτρονίων (στη θέση των φωτονίων) για να παράγουν εικόνες με διακριτική ικανότητα στα σύγχρονα όργανα περίπου 0,20 nm.
- Υποθέτοντας ότι η διακριτική ικανότητα ενός ηλεκτρονικού μικροσκοπίου είναι ίση με το μήκος κύματος de Broglie των ηλεκτρονίων που χρησιμοποιούνται, σε ποια ταχύτητα πρέπει να επιταχυνθούν τα ηλεκτρόνια για να επιτευχθεί διακριτική ικανότητα 0,20 nm;



Άσκηση 4.17

- Να υπολογίσετε το μήκος κύματος de Broglie των παρακάτω αντικειμένων:
- a. ενός ανθρώπου μάζας 85 kg ο οποίος κάνει σκι στην πλαγιά ενός χιονισμένου βουνού και κινείται με ταχύτητα 50 km/h.
 - b. μίας σφαίρας μάζας 10,0 g η οποία κινείται με ταχύτητα 250 m/s.
 - c. ενός ατόμου λιθίου το οποίο κινείται με ταχύτητα 2.5×10^5 m/s.
 - d. ενός μορίου όζοντος O_3 το οποίο βρίσκεται στην ανώτερη ατμόσφαιρα της Γης και κινείται με ταχύτητα 550 m/s.



Άσκηση 4.18

- Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνεται μέσω ενός ηλεκτρικού πεδίου και αποκτά κινητική ενέργεια ίση με $2,15 \times 10^{-15} \text{ J}$.
- Να μετατρέψετε την ενέργεια αυτή σε eV.
 - Ποιο είναι το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου;

Άσκηση 4.19



- Ποια είναι η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου το οποίο έχει μήκος κύματος de Broglie περίπου ίσο με το μήκος ενός χημικού δεσμού (περίπου $1,2 \text{ \AA}$);

Άσκηση 4.20



- Ένα ηλεκτρόνιο έχει αβεβαιότητα ως προς τη θέση του 552 pm .
- Ποια είναι η αβεβαιότητα ως προς την ταχύτητά του;



Άσκηση 4.21

- Ένα ηλεκτρόνιο το οποίο κινείται με ταχύτητα $3,7 \times 10^5 \text{ m/s}$ έχει αβεβαιότητα ως προς την ταχύτητά του ίση με $1,88 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- Ποια είναι η αβεβαιότητα ως προς τη θέση του;

Άσκηση 4.22



- Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, να υπολογίσετε την αβεβαιότητα ως προς τη θέση:
- a. ενός κουνουπιού μάζας 1,50 mg το οποίο κινείται με ταχύτητα 1,40 m/s αν η ταχύτητα είναι γνωστή με ακρίβεια $\pm 0,01$ m/s.
 - b. ενός πρωτονίου το οποίο κινείται με ταχύτητα $(5,00 \pm 0,01) \times 10^4$ m/s.

Άσκηση 4.23



- Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, να υπολογίσετε την αβεβαιότητα ως προς τη θέση:
- a. ενός ηλεκτρονίου το οποίο κινείται με ταχύτητα $(3,00 \pm 0,01) \times 10^5$ m/s.
 - b. ενός νετρονίου το οποίο κινείται με την ίδια ταχύτητα.
 - c. με βάση τις απαντήσεις σας στα (a) και (b), ποιανού σωματιδίου γνωρίζουμε με περισσότερη ακρίβεια τη θέση: του ηλεκτρονίου ή του νετρονίου;



Άσκηση 4.24

- Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, να υπολογίσετε το Δv για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:
 - a. ένα ηλεκτρόνιο με $\Delta v = 0,100 \text{ m/s}$
 - b. μία μπάλα μάζας 145 g με $\Delta v = 0,100 \text{ m/s}$
- Πώς συγκρίνεται η απάντηση στο ερώτημα (a) με το μέγεθος ενός ατόμου υδρογόνου;
- Πώς συγκρίνεται η απάντηση στο ερώτημα (b) με το μέγεθος της μπάλας;



Άσκηση 4.25

- Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg μπορεί επίσης να γραφτεί ως εξής:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

- όπου E είναι η ενέργεια και t είναι ο χρόνος.
- Να δείξετε ότι η παραπάνω σχέση έχει τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τη σχέση:

$$\Delta x \cdot \Delta(mv) \geq \frac{h}{4\pi}$$



Άσκηση 4.26

- Στη σειρά επιστημονικής φαντασίας *Star Trek*, η συσκευή διακτίνισης είναι μία ακτίνα τηλεμεταφοράς που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά μέσω ακτινοβολίας διαφόρων προσώπων από το διαστημόπλοιο *Enterprise* σε μία άλλη τοποθεσία, όπως για παράδειγμα στην επιφάνεια ενός πλανήτη.
- Οι συγγραφείς της σειράς έχουν τοποθετήσει έναν «αντισταθμιστή Heisenberg» (Heisenberg compensator) στο μηχανισμό της συσκευής διακτίνισης. Εξηγήστε γιατί ένας τέτοιος αντισταθμιστής (ο οποίος είναι εντελώς φανταστικός) θα ήταν απαραίτητος για να ξεπεραστούν τα προβλήματα τηλεμεταφοράς που θέτει η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg.

Μάζες και φορτία υποατομικών σωματιδίων



Σωματίδιο	Μάζα (kg)	Μάζα (amu)	Φορτίο (C)	Φορτίο (e)
Πρωτόνιο	$1,67262 \times 10^{-27}$	1,00727	$+1,60218 \times 10^{-19}$	1+
Νετρόνιο	$1,67493 \times 10^{-27}$	1,00866	0	0
Ηλεκτρόνιο	$9,10938 \times 10^{-31}$	$5,486 \times 10^{-4}$	$-1,60218 \times 10^{-19}$	1–

➤ Τιμές των θεμελιωδών φυσικών σταθερών:

✓ <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>