

1. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

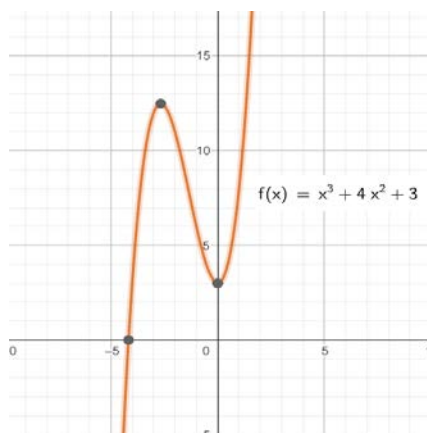
Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις συναρτήσεις:

$$(i) f_1(x) = x^3 + 4x^2 + 3 \quad (ii) f_2(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} \quad (iii) f_3(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 9}$$

Λύση

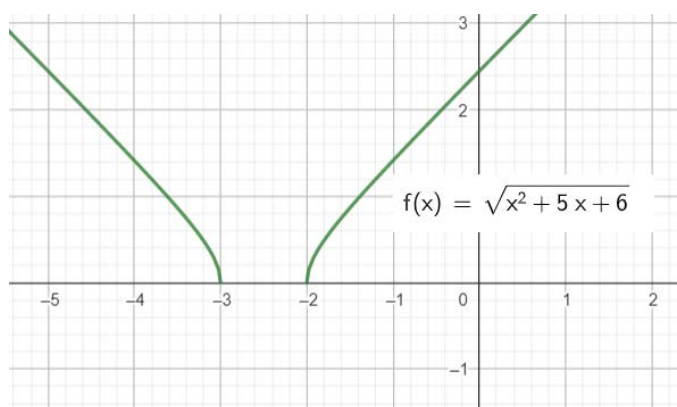
- (i) Η συνάρτηση f_1 είναι πολυωνυμική, άρα το πεδίο ορισμού της είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή το $\mathbb{R}$.



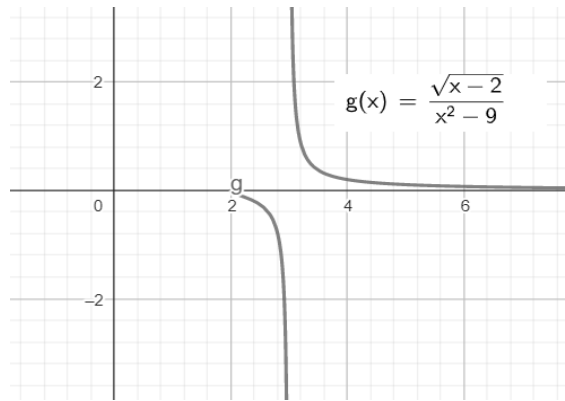
- (ii) Για να ορίζεται η $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ θα πρέπει $x^2 + 5x + 6 \geq 0$. Αλλά το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ έχει ρίζες τις $x = -3$, $x = -2$ και ο πίνακας πρόσημου του είναι:

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$x^2 + 5x + 6$	+	0	0	+
		-		

οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f_2 είναι $(-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$.



- (iii) Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$, θα πρέπει $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Ακόμα θα πρέπει $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f_3 θα είναι ίσο με: $\{x / x \geq 2, x \neq \pm 3\} = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

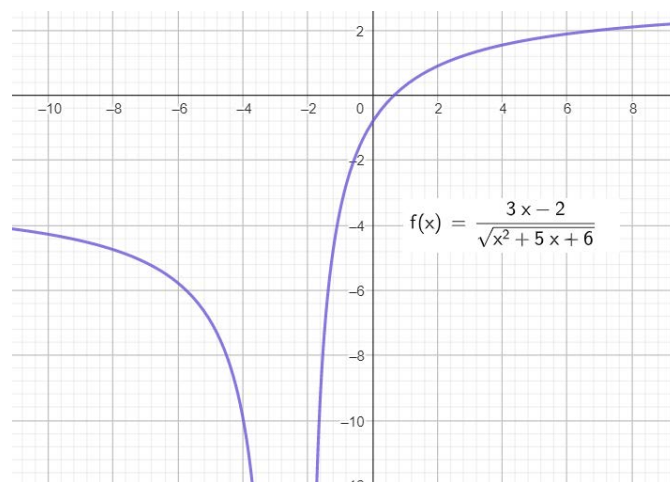


Παράδειγμα 2

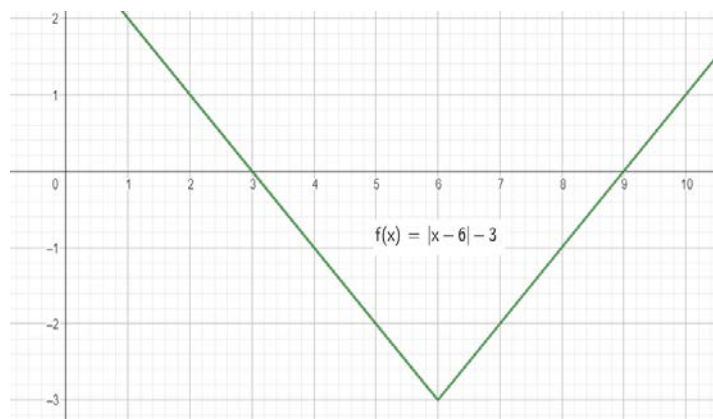
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{(3x-2)}{\sqrt{x^2+5x+6}}$, και το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών για την $g(x) = |x-6| - 3$.

Λύση

(α) Για να ορίζεται η $f(x)$ θα πρέπει $\sqrt{x^2+5x+6} > 0$, αλλά το τριώνυμο έχει ρίζες τις $x = -3, x = -2$. Από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα είναι $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$.



(β) Ο τύπος της συνάρτησης $g(x)$ περιέχει την απόλυτη τιμή. Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή θα είναι είτε θετική είτε μηδέν. Στην περίπτωση μας η απόλυτη τιμή θα είναι μηδέν όταν $x = 6$, οπότε το μέρος της συνάρτησης με την απόλυτη τιμή θα είναι πάντα μεγαλύτερο ίσο από το μηδέν. Αφαιρώντας το 3 από το μέρος της συνάρτησης με τα απόλυτο προκύπτει ότι η τιμή της συνάρτησης θα παίρνει τιμές μεγαλύτερες ίσες του -3. Άρα το πεδίο τιμών της $g(x)$ θα είναι το διάστημα $[-3, \infty)$. Το πεδίο ορισμού θα είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών $(-\infty, \infty)$.



■

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} f_1(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\text{ii)} f_2(x) = e^{\frac{1-x}{x^2-5x+6}} + \ln(x-1)$$

Λύση

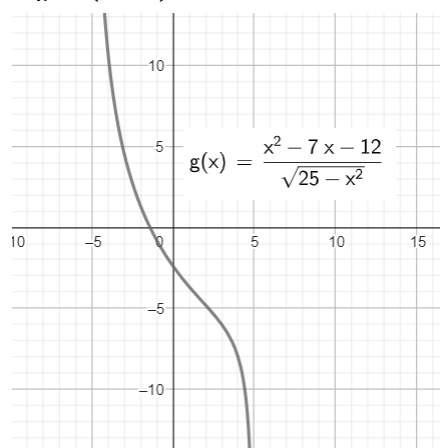
i) Για να ορίζεται η $f_1(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{\sqrt{25 - x^2}}$ θα πρέπει: ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, δηλ.

$$\sqrt{25 - x^2} \neq 0 \Leftrightarrow 25 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (5 - x)(5 + x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ και } x \neq -5 \quad (1)$$

και η υπόριζη ποσότητα μη αρνητική, δηλ.

$$25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 5] \quad (2)$$

Με συναλήθευση των (1) και (2) βρίσκουμε τελικά ότι το πεδίο ορισμού της $f_1(x)$ είναι το ανοικτό διάστημα $(-5, 5)$.



ii) Για να ορίζεται η $f_2(x) = e^{\frac{1-x}{x^2-5x+6}} + \ln(x-1)$ θα πρέπει: ο παρονομαστής του κλάσματος $\frac{1-x}{x^2-5x+6}$ να είναι διάφορος του μηδενός, δηλ.

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ και } x \neq 2 \quad (1)$$

και το όρισμα του λογαρίθμου να είναι θετικό, δηλ.

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \quad (2)$$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς **(1)** και **(2)** βρίσκουμε τελικά ότι το πεδίο ορισμού της $f_2(x)$ είναι: $x \in (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

■

Σύνθεση συναρτήσεων

Παράδειγμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 5x + 7$. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι τύποι των συναρτήσεων: (i) $f \circ g$ (ii) $g \circ f$.

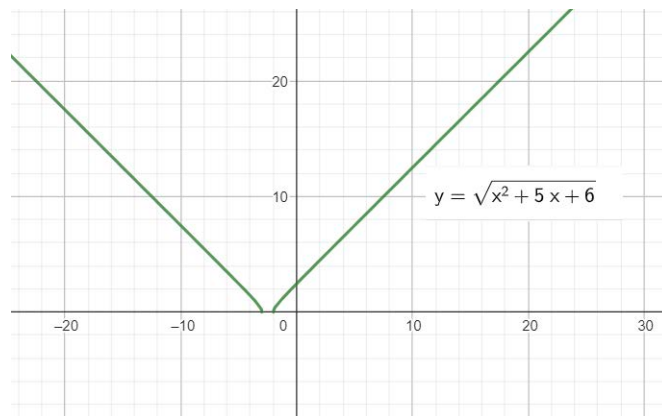
Λύση

Το πεδίο ορισμού της g (σαν πολωνυμική) είναι το $\mathbb{R}$, ενώ της f είναι το $[1, +\infty)$. Το Π.Ο της $f \circ g$ είναι εκείνα τα στοιχεία του Π.Ο. της g έτσι ώστε οι εικόνες του μέσω της g να ανήκουν στο Π.Ο. της f δηλαδή:

$$\{x / x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 5x + 7 \geq 1\} = \{x / x^2 + 5x + 6 \geq 0\} = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$$

Για την $f \circ g$ έχουμε:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{x^2 + 5x + 7 - 1} = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

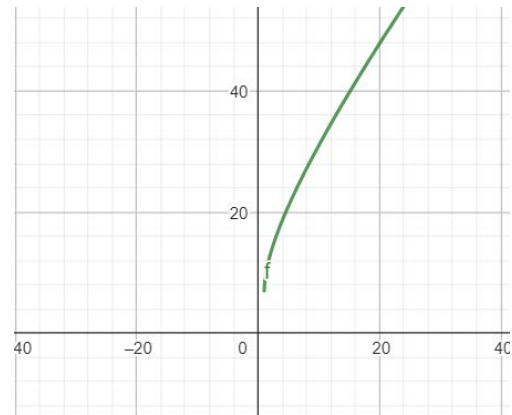
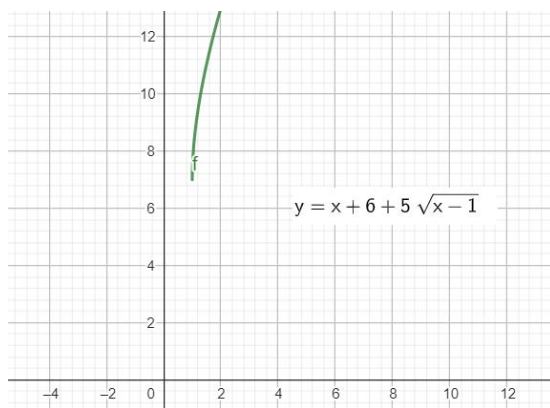


Ακόμα, το Π.Ο της $g \circ f$ είναι εκείνα τα στοιχεία του Π.Ο. της f έτσι ώστε οι εικόνες του μέσω της f να ανήκουν στο Π.Ο. της g δηλαδή:

$$\{x / x \geq 1, f(x) = \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = \{x / x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

Για την $g \circ f$ έχουμε:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 + 5f(x) + 7 = (\sqrt{x-1})^2 + 5\sqrt{x-1} + 7 = x - 1 + 5\sqrt{x-1} + 7 = x + 5\sqrt{x-1} + 6$$



Παράδειγμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-9}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος των συναρτήσεων $f \circ g$, $g \circ f$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού για την $f(x)$ ορίζεται το σύνολο $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$ και το πεδίο ορισμού για την $g(x)$ το σύνολο

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3, x \geq 3\}.$$

Το πεδίο ορισμού για την συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται ως εξής

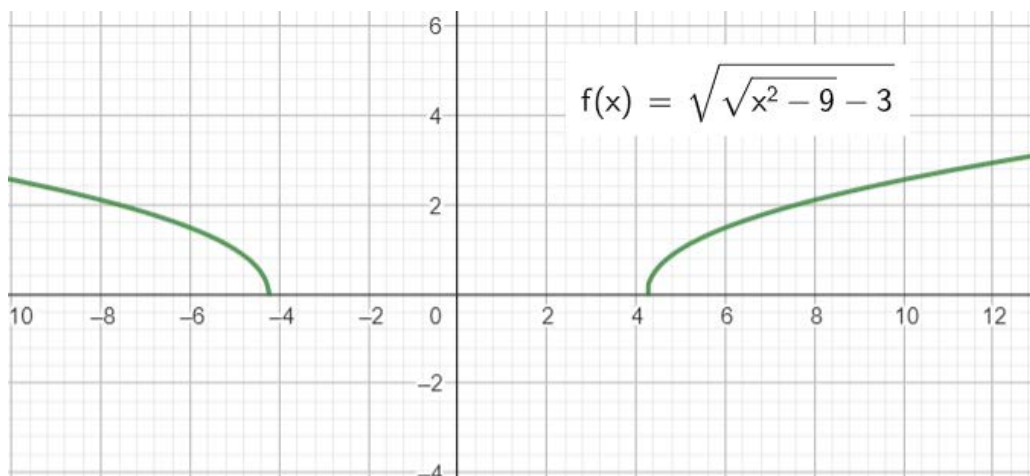
$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \leq -3, x \geq 3 : \sqrt{x^2-9} \in D(f)\}$$

Αλλά

$$\sqrt{x^2-9} \in D(f) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} \geq 3 \Leftrightarrow x^2-9 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 \geq 18 \Leftrightarrow x \leq -3\sqrt{2}, x \geq 3\sqrt{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ θα είναι $(-\infty, -3\sqrt{2}] \cup [3\sqrt{2}, \infty)$. Ο τύπος της $f \circ g$ ορίζεται

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-3} = \sqrt{\sqrt{x^2-9}-3}$$



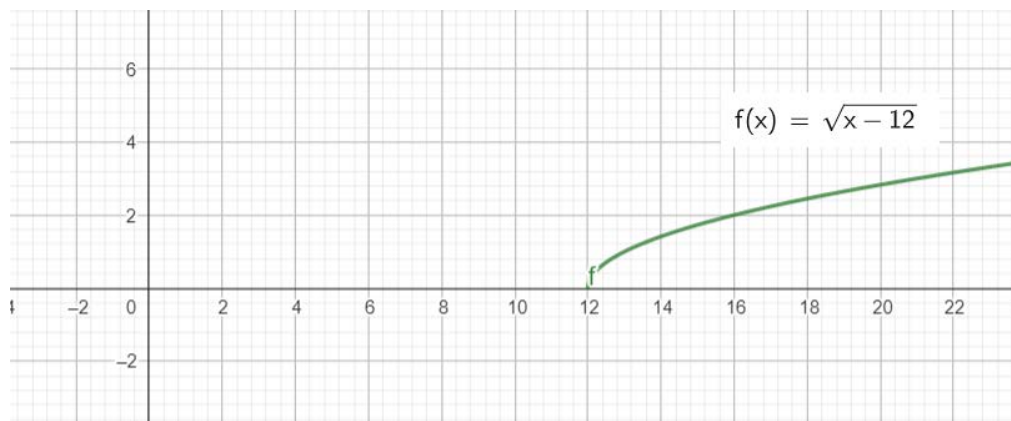
Το πεδίο ορισμού για την συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται ως εξής

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \{x \geq 3 : \sqrt{x-3} \in D(g)\}$$

$$\text{Αλλά } \sqrt{x-3} \in D(g) \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \leq -3 \text{ ή } \sqrt{x-3} \geq 3 \Leftrightarrow x-3 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 12.$$

Συνεπώς το πεδίο της $g \circ f$ είναι το διάστημα $[12, +\infty)$ και ο τύπος της θα δίνεται από

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 - 3} = \sqrt{(\sqrt{x-3})^2 - 3} = \sqrt{x-12}$$



■

Αντίστροφη συνάρτησης

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x+6}{x-5}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f , να

δειχθεί ότι η f είναι ένα προς ένα και να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφής της f^{-1} .

Λύση

Θα πρέπει $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{5\}$. Εάν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+6}{x_1-5} = \frac{x_2+6}{x_2-5} \Rightarrow (x_1+6)(x_2-5) = (x_2+6)(x_1-5) \Rightarrow$$

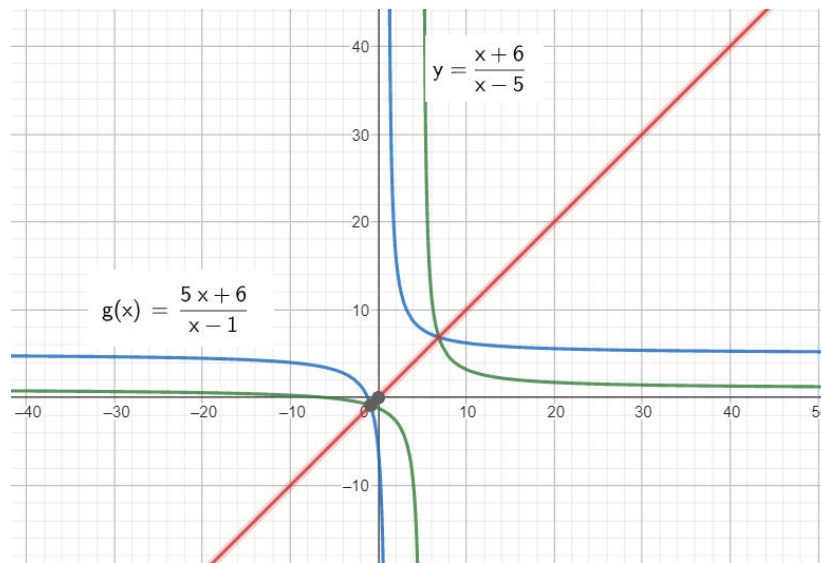
$$x_1x_2 - 5x_1 + 6x_2 - 30 = x_1x_2 - 5x_2 + 6x_1 - 30 \Rightarrow -11(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

Για την αντίστροφή της, εάν θέσουμε σαν $y = \frac{x+6}{x-5}$ τότε λύνοντάς τη σχέση αυτή ως προς x , έχουμε:

$$y = \frac{x+6}{x-5} \Rightarrow yx - 5y = x + 6 \Rightarrow yx - x = 5y + 6 \Rightarrow x(y-1) = 5y + 6 \Rightarrow x = \frac{5y+6}{y-1}$$

Εναλλάσσοντας τα x και y , η αντίστροφη της f έχει τύπο: $f^{-1}(x) = \frac{5x+6}{x-1}$



■

Παρατήρηση

Οι συναρτήσεις f , f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Παράδειγμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[2,5]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και ο τύπος της.

Λύση

Για να δείξουμε ότι υπάρχει η f^{-1} θα πρέπει να δείξουμε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη ('1-1') στο διάστημα $[2,5]$. Πράγματι για κάθε:

$x_1, x_2 \in [2,5]$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Γιατί:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1^2-1} = \frac{1}{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2-1 = x_2^2-1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ αφού}$$

$x_1, x_2 \in [2,5](;)$.

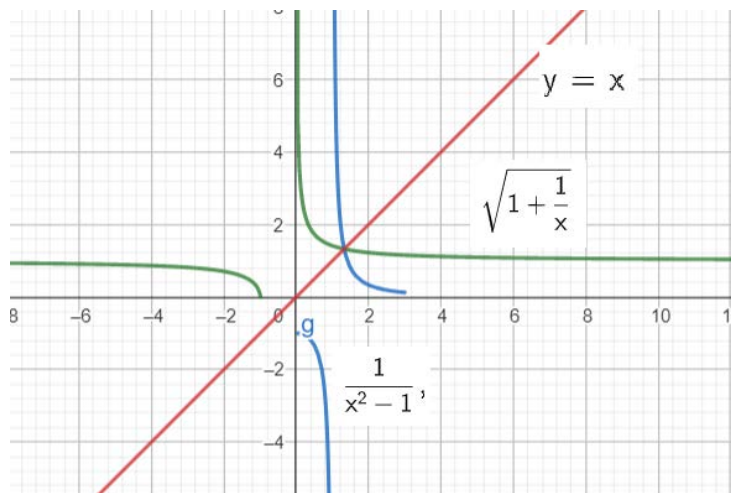
Άρα η f είναι '1-1' στο διάστημα $[2,5]$. Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(y = \frac{1}{x^2-1}, 2 \leq x \leq 5 \right) &\Leftrightarrow \left(x^2-1 = \frac{1}{y}, 2 \leq x \leq 5 \right) \Leftrightarrow \left(x^2 = 1 + \frac{1}{y}, 2 \leq x \leq 5 \right) \Leftrightarrow \\ &\left(x = \sqrt{1 + \frac{1}{y}}, 2 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{y}} \leq 5, 1 + \frac{1}{y} > 0 \right) \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{1 + \frac{1}{y}}, \frac{1}{24} \leq y \leq \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

εναλλάσσοντας στην τελευταία σχέση το x με το y προκύπτει ο τύπος για την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[\frac{1}{24}, \frac{1}{3}\right]$.



■

Παράδειγμα 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^2 + 2\sqrt{x-3}$ αντιστρέφεται και να υπολογίσετε την αντίστροφή της.

Λύση

Αρχικά, θα πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της $f(x) = e^2 + 2\sqrt{x-3}$. Αρκεί, η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική, δηλ.

$$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$. Εξετάζουμε αν η συνάρτηση είναι «1-1». Έστω $x_1, x_2 \in D(f)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε έχουμε:

$$e^2 + 2\sqrt{x_1-3} = e^2 + 2\sqrt{x_2-3} \Rightarrow \sqrt{x_1-3} = \sqrt{x_2-3} \Rightarrow x_1-3 = x_2-3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι «1-1». Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $R(f)$ της f . Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

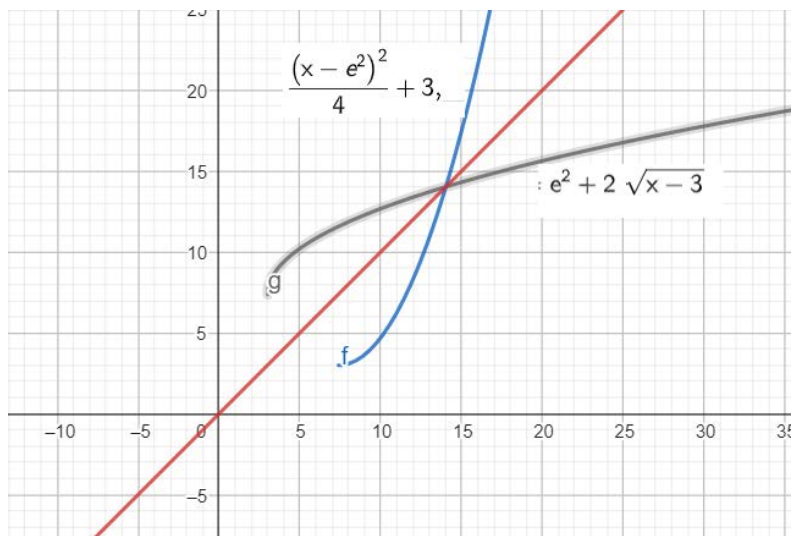
$$y = e^2 + 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \frac{y-e^2}{2} = \sqrt{x-3} \quad (1)$$

Επειδή, $\sqrt{x-3} \geq 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{y-e^2}{2} \geq 0 \Rightarrow y \geq e^2 \Rightarrow y \in [e^2, +\infty)$. Δηλ. $R(f) = [e^2, +\infty)$.

Λύνουμε την (1) ως προς x . Έχουμε:

$$\frac{y-e^2}{2} = \sqrt{x-3} \Rightarrow \frac{(y-e^2)^2}{4} = x-3 \Rightarrow x = \frac{(y-e^2)^2}{4} + 3 \quad (2)$$

Με εναλλαγή των μεταβλητών x και y η (2) γράφεται: $y = \frac{(x - e^2)^2}{4} + 3$



Άρα υπάρχει η αντίστροφη της f και είναι η: $f^{-1} : [e^2, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$ με τύπο

$$f^{-1}(x) = \frac{(x - e^2)^2}{4} + 3.$$

Για επαλήθευση, μπορούμε να ελέγξουμε αν $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

■

2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών καλείται (πραγματική) **ακολουθία**, δηλαδή $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (π.χ. $f(n)=n^2$ δηλαδή η 1, 4, 9, 16, 25, ...).

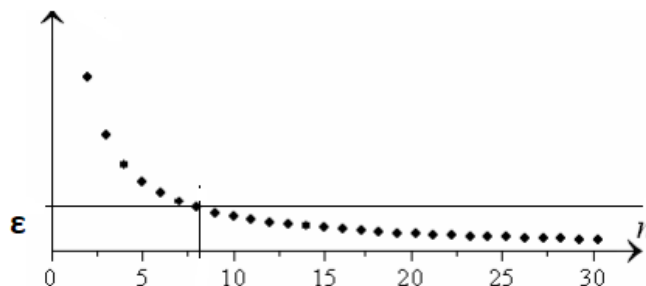
Η τιμή $f(n)$ συμβολίζεται συνήθως με a_n δηλαδή $a_n = f(n)$ (με άλλα λόγια ο υποδείκτης του a_n παριστάνει την τιμή του n , του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την εικόνα).

Έτσι εάν $a_n = f(n) = n^2$, τότε $a_1 = f(1) = 1^2 = 1$, $a_2 = f(2) = 2^2 = 4, \dots$

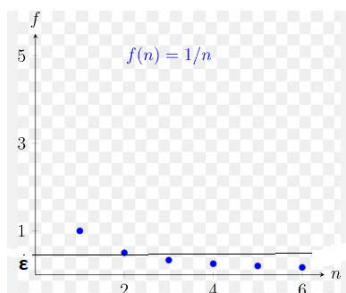
Μια ακολουθία παριστάνεται συνήθως σαν $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Αν λοιπόν $a_n = f(n) = n^2$, τότε την παριστάνουμε και σαν $\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$.

Αν δίνεται μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ θα θέλαμε να ξέρουμε αν, καθώς το n αυξάνει, οι όροι (τιμές) της ακολουθίας πλησιάζουν έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό a , τον οποίο θα καλούμε **όριο** της ακολουθίας (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$). Είναι φανερό ότι το όριο μιας ακολουθίας μπορεί να μην υπάρχει. Στην περίπτωση που το όριο της ακολουθίας υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός) λέμε ότι η ακολουθία **συγκλίνει** αλλιώς **αποκλίνει**.

Μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ λέμε ότι είναι **μηδενική** ή το **όριό** της, καθώς το $n \rightarrow +\infty$, είναι το **μηδέν** (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$), εάν πάρουμε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(-\varepsilon, \varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$ (τυχόν), τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$.



Π.χ. η ακολουθία $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μηδενική (ή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$) γιατί εάν πάρουμε το διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (πράγματι αρκεί $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$, δηλαδή εάν $\varepsilon = \frac{1}{10}$ τότε οι όροι a_n με $n > 10$ βρίσκονται στο διάστημα $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$).



Γενικότερα, λέμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στον αριθμό a** , ή **το όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι **το a** (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$), εάν πάρουμε ένα οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ όπου $\varepsilon > 0$, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα αυτό.

Ισοδύναμα, η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στον αριθμό a** εάν και μόνον εάν η ακολουθία $\{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ όπου $\beta_n = a_n - a$ είναι μηδενική.

Π.χ. η ακολουθία $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ έχει όριο το 1, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Παρατήρηση 1

Υπάρχει ένας αυστηρά μαθηματικός ορισμός του ορίου μια ακολουθίας ο οποίος δίνεται παρακάτω, είναι όμως δύσκολος στη χρήση του.

Ορισμός 2

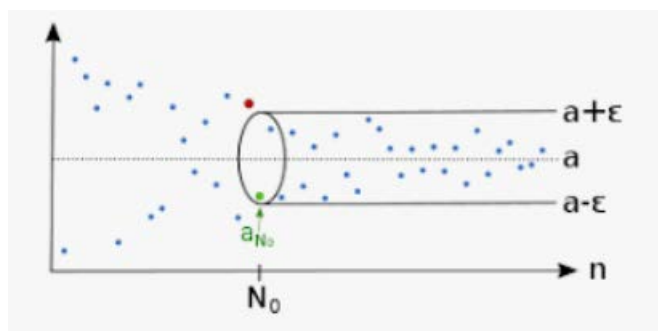
Λέμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **συγκλίνει στον αριθμό a** , ή **το όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι **το a** (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$), εάν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε), τέτοιο ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Δηλαδή, για κάθε δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι όροι a_n της ακολουθίας, $\forall n \geq n_0$, πλησιάζουν τον αριθμό a (βρίσκονται δηλαδή σε απόσταση μικρότερη από ε , για το δοσμένο ε).



Εφαρμογή 1

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, $p > 0$

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε , και τον οποίο θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

$$|\alpha_n - \alpha| = \left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| < \varepsilon$$

Αλλά

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n^p \Leftrightarrow n > \sqrt[p]{\varepsilon}$$

οπότε εάν θεωρήσουμε σαν $n_0 > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$ (αποδεικνύεται ότι υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός

από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών), τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Εφαρμογή 2

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, ($n \geq 2$)

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε , και τον οποίο θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

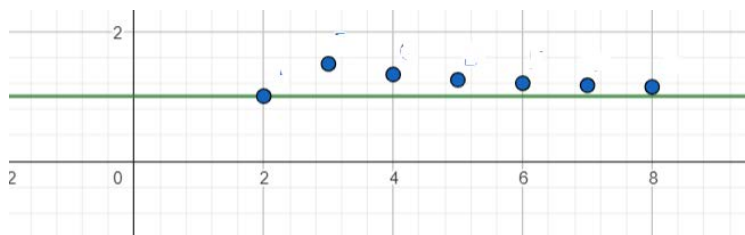
$$|\alpha_n - \alpha| = \left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Αλλά:

$$\left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| = \left| \frac{n-n+1}{n-1} \right| = \left| \frac{1}{n-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n-1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} + 1$ (αποδεικνύεται και πάλι, από τις ιδιότητες των

πραγματικών αριθμών, ότι υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός), τότε έχουμε το ζητούμενο.



Εφαρμογή 3

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ (δηλ. η $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$) δεν συγκλίνει.

Απόδειξη

Έστω ότι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ συγκλίνει σ' έναν αριθμό α και έστω $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Τότε θα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το ε), τέτοιος ώστε: $\forall n \geq n_0$, $|\alpha_n - \alpha| = |(-1)^n - \alpha| < \frac{1}{4}$.

Αλλά τότε: (I) για $n \geq n_0$ άρτιο έχουμε: $|\alpha_{2n} - \alpha| = |(-1)^{2n} - \alpha| = |1 - \alpha| < \frac{1}{4}$

(II) για $n \geq n_0$ περιττό έχουμε: $|\alpha_{2n+1} - \alpha| = |(-1)^{2n+1} - \alpha| = |-1 - \alpha| = |1 + \alpha| < \frac{1}{4}$

Τώρα:

$$2 = 1 - \alpha + 1 + \alpha = |1 - \alpha + 1 + \alpha| \leq |1 - \alpha| + |1 + \alpha| \stackrel{\text{I, II}}{<} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

που είναι άτοπο. Επομένως η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

Παρατήρηση 2

Είδαμε ότι το όριο μιάς ακολουθίας μπορεί να μην υπάρχει. Αν όμως υπάρχει τότε είναι μοναδικό (δηλαδή αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$ & $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$).

Για τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας συνήθως χρησιμοποιείται μία ή περισσότερες από τις παρακάτω πρότασεις καθώς και το όριο μερικών (γνωστών) βασικών ακολουθιών.

Πρόταση 1 (ιδιότητες των ορίων)

Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ και $\{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ δύο ακολουθίες των οποίων τα όρια υπάρχουν, τότε:

(α) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

(β) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda \alpha_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n, \lambda \in \mathbb{R}$

(γ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n \cdot \beta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ (οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \right)^k$)

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n} \quad (\text{όταν } \beta_n \neq 0, \forall n \text{ και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n \neq 0)$$

$$(\varepsilon) \text{ Εάν } \{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty} \text{ είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\alpha_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n}$$

Πρόταση 2 (απόλυτη σύγκλιση)

Εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = a$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = |a|$ δηλαδή αν μία ακολουθία συγκλίνει, τότε **συγκλίνει απόλυτα** (δηλαδή συγκλίνει και η ακολουθία των απολύτων τιμών των όρων της).

Παρατήρηση 3

(α) Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης 2 δεν ισχύει πάντα, δηλαδή μπορεί να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = |a|$, αλλά το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ να μην υπάρχει.

Παράδειγμα

Είδαμε ότι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει, αλλά $|\alpha_n| = |(-1)^n| = 1$ δηλαδή είναι σταθερή ακολουθία (οπότε τετριμένα συγκλίνει στο 1).

(β) Το αντίστροφο ισχύει πάντα στην περίπτωση μηδενικής ακολουθίας, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 \text{ τότε και μόνον τότε όταν } \lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = 0.$$

Εφαρμογή 4

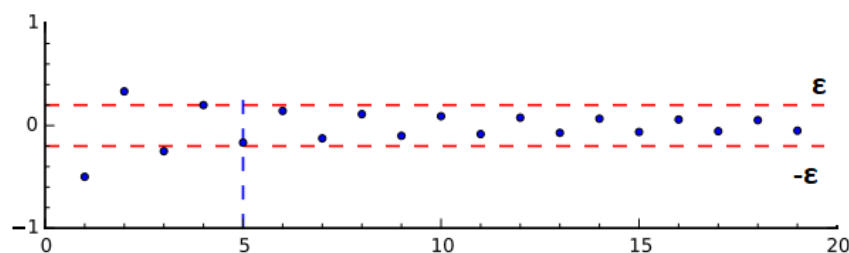
Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\alpha) \alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (\beta) \alpha_n = 3 + \frac{4}{n^4} + \frac{(-1)^n}{2n} \quad (\gamma) \alpha_n = \frac{n + (-1)^n}{n} \quad (\delta) \alpha_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

Λύση

(α) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ οπότε από την παρατήρηση 3(β) έχουμε

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$



(β) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{n^4} + \frac{(-1)^n}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^4} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 3 + 0 + 0 = 3$ (από την εφαρμογή 1 και το (α)).

(γ) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1$

(δ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$. Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0, \text{ δηλαδή } \lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = 0$$

οπότε από την παρατήρηση 3(β) έχουμε και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

■

Πρόταση 3 (ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες)

Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ **τελικά** (δηλαδή $\forall n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ανισότητα ισχύει από έναν δείκτη n_0 και μετά) και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \alpha$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

(α) $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ (β) $\alpha_n = \frac{\eta \mu n}{n}$ (γ) $\alpha_n = \frac{\eta \mu n}{1 + \sqrt{n}}$

Λύση

(α) Είναι εύκολο να δει κανείς (π.χ. με επαγωγή) ότι: $n < 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$.

Αλλά, αν $\alpha_n = 0$, $\beta_n = \frac{1}{2^n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$, οπότε από την πρόταση 3

(των ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών) έχουμε: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(β) Είναι γνωστό ότι $0 \leq |\eta \mu n| \leq 1$, $\forall n$, οπότε και $0 \leq \frac{|\eta \mu n|}{n} \leq \frac{1}{n}$. Αλλά, αν

$\alpha_n = 0$, $\delta_n = |\beta_n| = \frac{|\eta \mu n|}{n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$, οπότε από την πρόταση 3

(των ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών) έχουμε: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\eta \mu n|}{n} = 0$.

Τέλος, επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\eta\mu n|}{n} = 0$, έπεται από την παρατήρηση 3(β) ότι και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu n}{n} = 0$$

■

Ορισμός 3 (άπειρο όριο ακολουθίας)

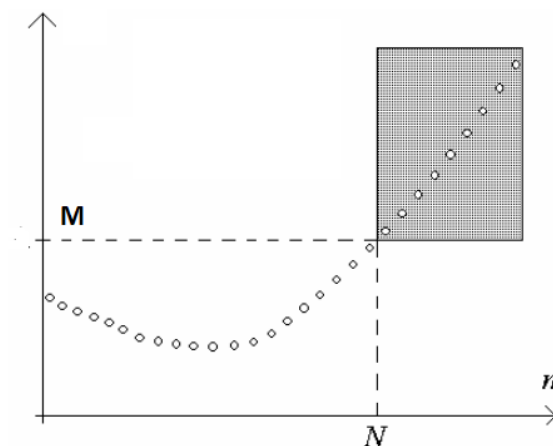
Λέμε ότι η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **αποκλίνει στο** $+\infty$, ή το **όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι το $+\infty$ (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$), εάν για κάθε $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M), τέτοιο ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

$$\alpha_n > M$$

Δηλαδή, για κάθε δοσμένο $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι όροι α_n της ακολουθίας, $\forall n \geq n_0$, είναι μεγαλύτεροι από τον αριθμό M .



Ανάλογα, λέμε ότι η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **αποκλίνει στο** $-\infty$, ή το **όριό της** καθώς το $n \rightarrow +\infty$ είναι το $-\infty$ (συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$), εάν για κάθε $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M), τέτοιο ώστε:

$$\forall n \geq n_0$$

να ισχύει:

$$\alpha_n < -M$$

Δηλαδή, για κάθε δοσμένο $M > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε οι όροι α_n της ακολουθίας, $\forall n \geq n_0$, είναι μικρότεροι από τον αριθμό $-M$.

Εφαρμογή 6

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $M > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M , και τον οποίο θα πρέπει κατά κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε: $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $\alpha_n > M$

Αλλά:

$$\alpha_n > M \Leftrightarrow \sqrt{n} > M \Leftrightarrow n > M^2$$

οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $n_0 > M^2$, τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Εφαρμογή 7

Αποδείξτε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n-1} = 1, (n \geq 2)$

Απόδειξη

Έστω ότι μας δίνεται $M > 0$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 \in \mathbb{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από το M , και τον οποίο θα πρέπει να υπολογίσουμε), τέτοιος ώστε: $\forall n \geq n_0$ να έπεται $\alpha_n > M$.

Αλλά

$$\alpha_n = \frac{n^2}{n-1} > \frac{(n-1)^2}{n-1} > M \Leftrightarrow n-1 > M \Leftrightarrow n > M+1$$

οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $n_0 > M+1$, τότε έχουμε το ζητούμενο. ■

Θεώρημα 1

(α) Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ ή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 0$$

(β) Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, τότε:

(I) εάν (τελικά) $\alpha_n > 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty$.

(II) εάν (τελικά) $\alpha_n < 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} = -\infty$.

(γ) Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε $\alpha_n \leq \beta_n$ **τελικά** (δηλαδή $\forall n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$), τότε

(I) εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

(II) εάν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = -\infty$ τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$.

Πρόταση 4 (Όριο γνωστών ακολουθιών)

Μπορεί ναδειχθεί ότι ισχύουν τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

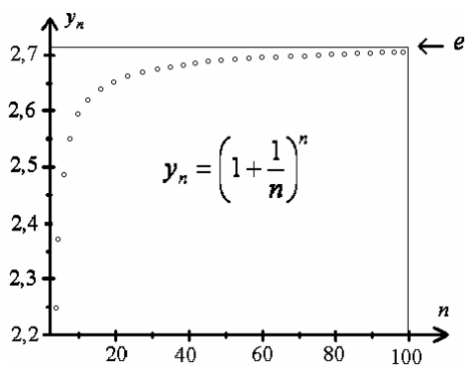
$$(\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$(\gamma) \text{ Εάν } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \quad a > 0, \quad a_n > 0$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Παρατήρηση 4

Μια επαλήθευση του 4(δ) δίνεται στο παρακάτω γράφημα (το οποίο κατασκευάζεται με τη βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί).



n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
5	2.48832
10	2.593742460
20	2.653297705
50	2.691588029
100	2.704813829
1000	2.716923932
10 000	2.718145927
100 000	2.718268237
1000 000	2.718280469

Εφαρμογή 8

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\alpha) \alpha_n = \frac{(n+2)!}{n!} \quad (\beta) \alpha_n = \frac{3}{1 - \sqrt[n]{n}}$$

Λύση

(α) Το $\alpha_n = \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n!} = (n+1) \cdot (n+2) = n^2 + 3n + 2$. Αλλά $\alpha_n = n^2 + 3n + 2 > n^2$ και

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, οπότε από το θεώρημα 1(γ) (I) έχουμε τελικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)!}{n!} = +\infty$.

(β) Είναι γνωστό από την πρόταση 4(α) ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ και $\sqrt[n]{n} > 1$ οπότε $1 - \sqrt[n]{n} < 0$, ενώ

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt[n]{n}) = 1 - 1 = 0$. Από το θεώρημα 1(β)(II) έχουμε τελικά

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - \sqrt[n]{n}} = -\infty.$$

■

Εφαρμογή 9

Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(α) \alpha_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{3}{n}} \quad (β) \alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad (γ) \alpha_n = \sqrt[n]{5^n \cdot n} \quad (δ) \alpha_n = \left(1 + \frac{3}{8n}\right)^n$$

$$(ε) \alpha_n = \sqrt[n]{4^{2n+1}} \quad (στ) \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \quad (ζ) \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n+5}$$

Λύση

(α) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}}$. Αλλά από την πρόταση 4(α) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ και από το

$$4(β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3} = 1, \text{ οπότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(β) \text{ Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \text{ από την}$$

πρόταση 4(δ).

(γ) Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{5^n \cdot n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{5^n} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right) = 5 \cdot 1 = 5$ από την πρόταση 4(α)

$$(δ) \text{ Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \left(1 + \frac{3}{8n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \left(1 + \frac{\frac{3}{8}}{n}\right)^n = e^{\frac{3}{8}} \text{ από την πρόταση 4(δ).}$$

(ε) Έχουμε: $\alpha_n = \sqrt[n]{4^{2n+1}} = \sqrt[n]{4^{2n}} \cdot 4 = \sqrt[n]{(4^2)^n} \cdot 4 = \sqrt[n]{16^n} \cdot 4 = \sqrt[n]{16^n} \cdot \sqrt[n]{4}$ οπότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4^{2n+1}} = 16 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4} = 16 \cdot 1 = 16 \text{ από την πρόταση 4(β).}$$

$$(στ) \text{ Το } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$$

$$(\zeta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^5\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^5$$

$$\text{Αλλά } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n\right]^2 = \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^2 \text{ και}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^5 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)\right)^5 = 1^5 = 1 \text{ οπότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{2n+5} = \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^2 \cdot 1 = e^{\frac{2}{5}}$$

■

Για το όριο μιας ακολουθίας λοιπόν έχουμε τις παρακάτω ενδιαφέρουσες περιπτώσεις.

A. Όριο ρητών ακολουθιών

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ όπου $P(n)$ και $Q(n)$ είναι πολυώνυμα του n

(δηλαδή εδώ $\alpha_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$), **διαιρούμε** τον αριθμητή και τον παρανομαστή με n^k (όπου k είναι η μεγαλύτερη δύναμη που εμφανίζεται στο κλάσμα).

Τότε θα ισχύουν:

I. Αν ο βαθμός ($P(n)$) > του βαθμού ($Q(n)$) ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty \quad (\text{εξαρτάται από τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων})$$

II. Αν ο βαθμός ($P(n)$) < του βαθμού ($Q(n)$) ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$$

III. Αν ο βαθμός ($P(n)$) = του βαθμού ($Q(n)$) ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \text{πηλίκo συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων}$$

Εφαρμογή 10

Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών.

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{3n^2 + 2}$$

$$(\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5n^2}{-n^5 + 6n}$$

$$(\gamma) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 2}{6 - 3n^3}$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3}{2 + n^5}$$

$$(\varepsilon) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^3 + 5n^2}{8n^3 + 6n^2 + 2}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 + 2}{n + 7}$$

Λύση

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^4} + \frac{3n^2}{n^4} + \frac{2}{n^4}}{\frac{3n^2}{n^4} + \frac{2}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}$$

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{3n^2 + 2} \text{ (διαίρω με } n^4)$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{0} = \frac{1}{0} = +\infty$$

από το θεώρημα 1(β)(I) (η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n^4 + 3n^2 + 2}{3n^2 + 2} > 0$ είναι ακολουθία θετικών όρων).

$$(\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5n^2}{-n^5 + 6n} \text{ (διαίρω με } n^5) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^5} + \frac{5n^2}{n^5}}{-\frac{n^5}{n^5} + \frac{6n}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^3}}{-1 + \frac{6}{n^4}} \stackrel{\frac{1}{n^k} \rightarrow 0}{=} \frac{0 + 0}{-1 + 0} = 0$$

$$(\gamma) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 2}{6 - 3n^3} \text{ (διαίρω με } n^3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{5n^2}{n^3} + \frac{2}{n^3}}{\frac{6}{n^3} - \frac{3n^3}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}}{\frac{6}{n^3} - 3} = \frac{1 + 0 + 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 3}{2 + n^5} \left(\begin{array}{cc} \text{βαθμός } P=4 \\ \text{βαθμός } Q=5 \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^5} + \frac{3}{n^5}}{\frac{2}{n^5} + \frac{n^5}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^5}}{\frac{2}{n^5} + 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0$$

$$(\varepsilon) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^3 + 5n^2}{8n^3 + 6n^2 + 2} \left(\begin{array}{cc} \text{βαθμός } P=3 \\ \text{βαθμός } Q=3 \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6\frac{n^3}{n^3} + 5\frac{n^2}{n^3}}{8\frac{n^3}{n^3} + 6\frac{n^2}{n^3} + \frac{2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{5}{n}}{8 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{6 + 0}{8 + 0 + 0} = \frac{6}{8}$$

(πηλίκo συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων $= \frac{6}{8}$).

$$(\sigma\tau) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2+2}{n+7} \left(\frac{\text{βαθμός } P=2}{\text{βαθμός } Q=1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2+2}{n+7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{n}{n^2} + \frac{7}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}} = -\infty$$

από το θεώρημα 1(β)(II) (λόγω του όρου $-n^2$, η ακολουθία $a_n = \frac{-n^2+2}{n+7}$ είναι ακολουθία αρνητικών όρων, εκτός από τον 1^{ης} όρο: $1/8, -2/9, -7/10, \dots$).

■

Εφαρμογή 11

Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών.

$$(α) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2n^2+1) - \ln(3n^2+4)) \quad (β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n+2}} \quad (γ) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!}$$

$$(δ) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του πηλίκου των λογαρίθμων έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2n^2+1) - \ln(3n^2+4)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{2n^2+1}{3n^2+4} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4} \right). \text{ Αλλά}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}}{3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2n^2+1) - \ln(3n^2+4)) = \ln \frac{2}{3}.$$

$$(β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+5}{3n+2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{3n+2}}. \text{ Αλλά}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n}}{3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{3n+2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(γ) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{n! - n! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{n!(1 - (n+1))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{1 - n - 1} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = -1$$

$$(δ) \text{ Είναι γνωστό ότι: } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

■

B. Όριο ριζικών

Εφαρμογή 12

(α) Για το όριο της μορφής $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή της παράστασης, οπότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)} =$$

Αλλά, γνωρίζουμε την ταυτότητα $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(β) Για το όριο της μορφής $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1})$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή της παράστασης, οπότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^3+4}-\sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})}{(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})} =$$

Αλλά, γνωρίζουμε την ταυτότητα $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Άρα:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^3+4})^2 - (\sqrt{n^3+1})^2}{(\sqrt{n^3+4}+\sqrt{n^3+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+4-n^3-1}{(\sqrt{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}+\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^3\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^3}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)} = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

■

Γ. Όριο ακολουθιών της μορφής r^n

Εφαρμογή 13

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 28^n}{20^n}$

Λύση

Διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον μεγαλύτερο παράγοντα (28^n):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 28^n}{20^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{5^n}{28^n} + 7 \cdot \frac{28^n}{28^n}}{\frac{20^n}{28^n}} = \frac{2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{28} \right)^n + 7 \cdot 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{20}{28} \right)^n} = \frac{0 + 7}{0} = \frac{7}{0} = +\infty$$

(από το θεώρημα 1(β)(I) γιατί πρόκειται για ακολουθία ακολουθία θετικών όρων).

■

Παρατήρηση 5

Αν $|r| < 1$ τότε η ακολουθία $\alpha_n = r^n \rightarrow 0$

π.χ. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$

Εφαρμογή 14

Να υπολογιστεί το όριο των παρακάτω ακολουθιών:

(α) $\alpha_n = \frac{2^n}{3^{n+5}}$ (β) $\alpha_n = \frac{3^n}{1+3^n}$ (γ) $\alpha_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + 1}$

Λύση

(α) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{n+5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot 3^5} = \frac{1}{3^5} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3^5} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{3^5} \cdot 0 = 0$

(β) Διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το 3^n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{1+3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{1}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \right)^n + 1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

(γ) Διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον μεγαλύτερο παράγοντα (e^{2n}):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^n}{e^{2n}} + \frac{e^{-n}}{e^{2n}}}{\frac{e^{2n}}{e^{2n}} + \frac{1}{e^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^n} + \frac{1}{e^{3n}}}{1 + \frac{1}{e^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{e} \right)^n + \left(\frac{1}{e} \right)^{3n}}{1 + \left(\frac{1}{e} \right)^{2n}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{3n}}{1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{2n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

■

Εφαρμογή

Υπολογίστε τα όρια κάθε μίας από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$(α) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n^3 + 5n^2 + 2}{6n^2 - 7n^3} \quad (β) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^n - 4^n}{3 + 7^{n+1}}$$

Δ. Όριο μονότονων και φραγμένων ακολουθιών

Αρκετές φορές είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το όριο μιας ακολουθίας (εφ' όσον υπάρχει). Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι αρκετό, τις περισσότερες φορές, να δείξουμε ότι υπάρχει. Χρήσιμα, στον σκοπό αυτό, είναι τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν.

Ορισμός 4

(α) Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ λέμε ότι είναι **άνω φραγμένη** (αντίστοιχα **κάτω φραγμένη**), αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $a_n \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $a_n \geq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

(β) Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ λέμε ότι είναι **αύξουσα** (αντίστοιχα **φθίνουσα**), αν $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αντίστοιχα $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Παρατήρηση 6

Για να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι αύξουσα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

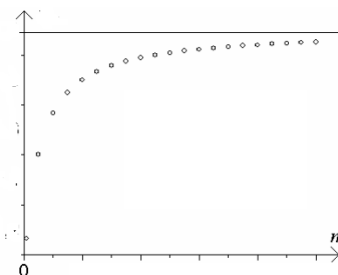
$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Αντίστοιχα, για να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι φθίνουσα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Θεώρημα 2

Αν η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.



Παρατήρηση 7

Το θεώρημα μας αναφέρει ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ υπάρχει, δεν μας λέει όμως ποιο είναι το όριο αυτό.

Εφαρμογή 15

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n}{n+1}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το 1:

$$n+1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1,$$

δηλαδή $a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (ο αριθμητής είναι εδώ πάντα μικρότερος από τον παρονομαστή).

Ακόμα η ακολουθία είναι (γνήσια) αύξουσα, γιατί:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + n + n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Άρα, από το παραπάνω θεώρημα, έχουμε ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ υπάρχει.

■

Παρατήρηση 8

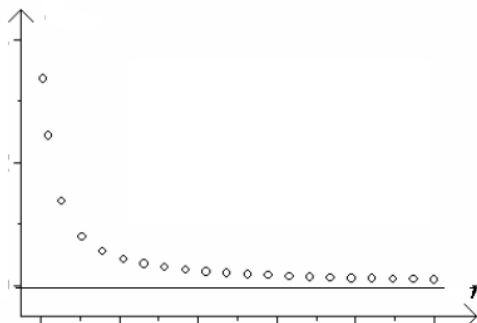
Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε, με τη διαδικασία που περιγράψαμε στην αρχή της παραγράφου, ότι:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Γενικά όμως όπως είπαμε είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το όριο μιας (συγκλίνουσας) ακολουθίας.

Θεώρημα 3

Αν η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.



Εφαρμογή 16

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από το 1: $n+1 > n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n}{n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1$, δηλαδή $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ (ο παρονομαστής είναι εδώ πάντα μικρότερος από τον αριθμητή).

Ακόμα η ακολουθία είναι (γνήσια) φθίνουσα, γιατί:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2) \cdot n - (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Άρα, από το παραπάνω θεώρημα, έχουμε ότι το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ υπάρχει.

■

Παρατήρηση 9

Και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Ε. Αναδρομικές ακολουθίες

Ορισμός 5

Μια ακολουθία όπου κάθε όρος της ακολουθίας δίνεται σαν συνάρτηση προηγούμενων όρων της, καλείται **αναδρομική** ακολουθία. Π.χ $a_{n+1} = 4 - a_n, a_1 = 2, n \in \mathbb{N}$

Εφαρμογή 17 (αναδρομικές ακολουθίες)

Εάν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ισχύει $a_{n+1} = \frac{3a_n - 4}{5}, a_1 = -3, n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Λύση

Α) Μελέτη μονότονου

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) αύξουσα με τη βοήθεια της **μαθηματικής επαγωγής**, δηλαδή

$$a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N} (*).$$

$$\text{Εάν } n=1, \text{ τότε: } a_2 = \frac{3a_1 - 4}{5} = \frac{3 \cdot (-3) - 4}{5} = -\frac{13}{5} > a_1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση (*) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} > a_k$.

Θα δείξουμε την (*) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} > a_{k+1}$.

Από το ότι:

$$a_{k+1} > a_k \Rightarrow 3a_{k+1} > 3a_k \Rightarrow 3a_{k+1} - 4 > 3a_k - 4 \Rightarrow \frac{3a_{k+1} - 4}{5} > \frac{3a_k - 4}{5} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$$

Δηλαδή $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ή με άλλα λόγια η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) αύξουσα.

Β) Μελέτη φραγμένου.

Αφού η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) αύξουσα, είναι κάτω φραγμένη από τον πρώτο όρο της $a_1 = -3$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα άνω φράγμα της (εάν υπάρχει). Θεωρούμε τη λεγόμενη **χαρακτηριστική εξίσωση** της ακολουθίας που είναι η:

$$x = \frac{3x-4}{5} \Rightarrow 5x = 3x-4 \Rightarrow x = -2$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι άνω φραγμένη από το -2 (πάλι με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής), δηλαδή:

$$a_n < -2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**).$$

$$\text{Εάν } n=1, \text{ τότε: } a_2 = \frac{3a_1-4}{5} = \frac{3 \cdot (-3)-4}{5} = -\frac{13}{5} < -2.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση (**) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} < -2$.

Θα δείξουμε την (**) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} < -2$.

Από το ότι:

$$\begin{aligned} a_{k+1} < -2 &\Rightarrow 3a_{k+1} < -6 \Rightarrow 3a_{k+1} - 4 < -10 \Rightarrow \frac{3a_{k+1} - 4}{5} < -\frac{10}{5} = -2 \\ &\Rightarrow a_{k+2} = \frac{3a_{k+1} - 4}{5} < -2 \end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2, θα συγκλίνει (θα υπάρχει δηλαδή το όριό της).

Γ) Εύρεση ορίου.

Για το όριο θα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \frac{3 \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - 4}{5}. \text{ Αλλά } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x, \text{ οπότε: } x = \frac{3x-4}{5} \Rightarrow 5x = 3x-4 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -2.$$

■

Εφαρμογή

Εάν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ισχύει $a_{n+1} = \frac{4a_n+3}{5}$, $a_1 = 3$, $a_n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Εφαρμογή 18

Εάν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ισχύει $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $a_1 = 4$, $a_n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Λύση

A) Μελέτη μονότονου

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) φθίνουσα με τη βοήθεια της **μαθηματικής επαγωγής**, δηλαδή:

$$a_{n+1} < a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*).$$

Εάν $n=1$, τότε: $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6} < 4 = a_1$.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (*) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} < a_k$.

Θα δείξουμε την (*) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} < a_{k+1}$.

Από το ότι:

$$a_{k+1} < a_k \Rightarrow 2 + a_{k+1} < 2 + a_k \Rightarrow \sqrt{2 + a_{k+1}} < \sqrt{2 + a_k} \Rightarrow a_{k+2} < a_{k+1}$$

Δηλαδή $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ή με άλλα λόγια η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) φθίνουσα.

B) Μελέτη φραγμένου.

Αφού η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι (γνήσια) φθίνουσα, είναι άνω φραγμένη από τον πρώτο όρο της $a_1 = 4$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα της (εάν υπάρχει). Η χαρακτηριστική εξίσωση της ακολουθίας είναι:

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι κάτω φραγμένη από το 2 (η ακολουθία είναι μια ακολουθία θετικών όρων).

Με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι:

$$a_n > 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**).$$

Εάν $n=1$, τότε: $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6} > 2$.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (**) ισχύει για $n=k$: δηλαδή $a_{k+1} > 2$.

Θα δείξουμε την (**) για $n=k+1$: δηλαδή $a_{k+2} > 2$.

Από το ότι:

$$a_{k+1} > 2 \Rightarrow 2 + a_{k+1} > 2 + 2 \Rightarrow \sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{4} = 2 \Rightarrow a_{k+2} > 2$$

Αφού η ακολουθία είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, σύμφωνα με το θεώρημα 3, θα συγκλίνει (θα υπάρξει δηλαδή το όριό της).

Γ) Εύρεση ορίου.

Για το όριο θα ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}. \text{ Αλλά } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x, \text{ οπότε:}$$

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Αλλά το -1 απορρίπτεται λόγω του ότι η ακολουθία είναι θετικών όρων.

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$$

■

3. ΣΕΙΡΕΣ

Εάν $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια (γνωστή δοθείσα) ακολουθία, τότε σχηματίζουμε μια καινούργια ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ως εξής:

$$\begin{aligned}s_1 &= \alpha_1 \\ s_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ s_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n\end{aligned}$$

Η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ονομάζεται **σειρά** με γενικό όρο την α_n . Και πάλι μας ενδιαφέρει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. Το όριο αυτό, στην περίπτωση που υπάρχει, καλείται **άθροισμα** της σειράς και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Εάν το όριο αυτό υπάρχει (και είναι ένας πεπερασμένος αριθμός) τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** αλλιώς η σειρά **αποκλίνει**.

Παρατήρηση

Είναι αρκετά δύσκολο τις περισσότερες φορές να υπολογίσει κανείς το άθροισμα μιας σειράς (αφού είναι δύσκολο να υπολογίσει τον όρο s_n σαν συνάρτηση του n , και να χρησιμοποιήσει γνωστές προτάσεις ή περιπτώσεις από τις ακολουθίες). Γι αυτό τις περισσότερες φορές μας αρκεί να ξέρουμε αν μια σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αυτό επιτυγχάνεται με την βοήθεια προτάσεων τα οποία καλούνται κριτήρια σύγκλισης. Τα σπουδαιότερα από αυτά τα κριτήρια παρουσιάζονται παρακάτω.

Κριτήρια Σύγκλισης

(α) Κριτήριο του $n^{\text{ου}}$ όρου

$$\text{Αν } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \text{συγκλίνει} \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0$$

$$\text{Αν } \alpha_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \text{αποκλίνει}$$

Παρατήρηση

Προσοχή, εάν $\alpha_n \rightarrow 0$ $\nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \text{συγκλίνει}$ (π.χ η **αρμονική** σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ μπορεί να δειχθεί ότι αποκλίνει αν και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$).

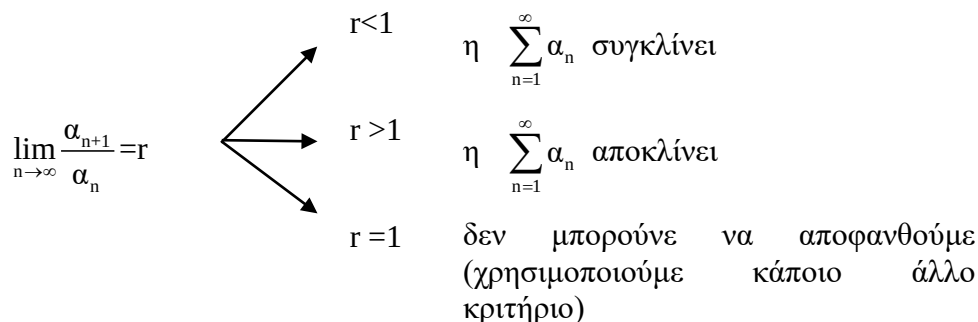
(β) Κριτήριο Σύγκρισης

Αν $\alpha_n, \beta_n \geq 0 \ \forall n$ και $\alpha_n \leq \beta_n$ για $n \in \mathbb{N}$

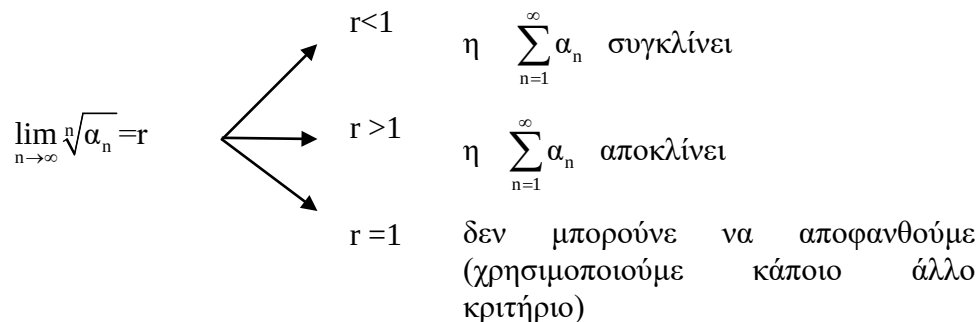
i) αν $\sum \beta_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ και $\sum \alpha_n$ συγκλίνει

ii) αν $\sum \alpha_n$ αποκλίνει $\Rightarrow$ και $\sum \beta_n$ αποκλίνει

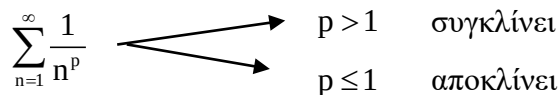
(γ) Κριτήριο του λόγου (ή κριτήριο d' Alembert)



(δ) Κριτήριο της ρίζας (ή κριτήριο του Cauchy)



(ε) P- σειρά



(στ) Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \right)$$

(ζ) Κριτήριο – Οριακό Κριτήριο σύγκρισης

Αν $\sum_1^\infty \alpha_n$, $\sum_1^\infty \beta_n$ είναι σειρές με θετικούς όρους και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \ell$ $0 < \ell < \infty$ τότε

i) $\sum \beta_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum \alpha_n$ συγκλίνει

ii) $\sum \beta_n = +\infty \Leftrightarrow \sum \alpha_n = +\infty$

Εφαρμογή 1

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση κάθε μία από τις παρακάτω σειρές.

(α) $\sum_1^\infty \frac{n^2}{2n^2+1}$

(β) $\sum_1^\infty \frac{3^n}{n!}$

(γ) $\sum_1^\infty \frac{n^n}{n!}$

(δ) $\sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n$ $\alpha > 0$

(ε) $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n^4+1}$

(στ) $\sum_1^\infty \frac{4^{n+2}}{7^{n+1}}$

Λύση

(α) $\sum_1^\infty \frac{n^2}{2n^2+1}$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του $n^{\text{ου}}$ όρου

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{n^2}{2n^2+1} = \text{αποκλίνει}$$

(β) $\sum_1^\infty \frac{3^n}{n!}$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου όπου $\alpha_n = \frac{3^n}{n!}$

Παρατήρηση η χρήση του κριτηρίου αυτού γίνεται συνήθως όταν έχουμε γινόμενα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n} = \frac{3^{n+1} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot 3^n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

Άρα η $\sum_1^\infty \frac{3^n}{n!}$ συγκλίνει.

(γ) $\sum_1^\infty \frac{n^n}{n!}$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου όπου $\alpha_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)! n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e > 1$$

Άρα η $\sum_1^\infty \frac{n^n}{n!}$ αποκλίνει

Παρατήρηση Είναι γνωστό ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

(δ) $\sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n \quad \alpha > 0$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας

Παρατήρηση η χρήση του κριτηρίου αυτού γίνεται συνήθως όταν έχουμε **n^οστες δυνάμεις**

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n} = 1 + \frac{1}{\alpha} > 1$$

Άρα η $\sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n \quad \alpha > 0$ αποκλίνει

(ε) $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n^4 + 1}$

Αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του $n^{\text{ο$ στου} όρου παρατηρούμε ότι δεν «δουλεύει», γιατί:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} = 0$$

Δεν “δουλεύει” ακόμα και το κριτήριο του λόγου ($\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$;))

Παρατήρηση Σε πηλίκο πολυωνύμων κάνουμε χρήση (όταν είναι δυνατόν) του κριτηρίου σύγκρισης:

$$n^4 < n^4 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n^4 + 1} < \frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{n^2}{n^4 + 1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

Η σειρά $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ = p-σειρά, $p = 2 > 1$ άρα συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n^4 + 1}$ (από το κριτήριο σύγκρισης).

(στ) $\sum_1^\infty \frac{4^{n+2}}{7^{n+1}} = \sum_1^\infty \frac{4^n \cdot 4^2}{7^n \cdot 7} = \frac{4^2}{7} \sum_1^\infty \frac{4^n}{7^n} = \frac{16}{7} \sum_1^\infty \left(\frac{4}{7}\right)^n$ **(ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΕΙΡΑ)**

Παρατήρηση

Η σειρά $\sum_1^\infty r^n$ καλείται **γεωμετρική σειρά**. Εάν $|r| < 1$ η σειρά συγκλίνει (αν $|r| \geq 1$ η σειρά αποκλίνει). Στη γεωμετρική σειρά ξέρουμε και πόσο είναι το **άθροισμα** της:

$$\sum_{n=1}^\infty r^n = \frac{r}{1-r} \quad \text{ή} \quad \text{γενικότερα} \quad \sum_{n=k}^\infty r^n = \frac{r^k}{1-r}$$

$$\text{Επομένως } \sum_1^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = \frac{\cancel{4}/\cancel{7}}{1-\cancel{4}/\cancel{7}} = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{4^{n+2}}{7^{n+1}} = \sum_1^{\infty} \frac{4^n \cdot 4^2}{7^n \cdot 7} = \frac{16}{7} \cdot \sum_1^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = \frac{16}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{21}$$

■

Εφαρμογή 2

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση κάθε μία από τις παρακάτω σειρές.

$$(\alpha) \sum_1^{\infty} \frac{n}{3n^3+2}$$

$$(\beta) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}$$

$$(\gamma) \sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$(\delta) \sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$(\epsilon) \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$$

(

Λύση

$$(\alpha) \sum_1^{\infty} \frac{n}{3n^3+2} \quad \left(\frac{n}{3n^3+2} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \right). \quad \text{Χρησιμοποιούμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης με:}$$

$$\alpha_n = \frac{n}{3n^3+2}, \beta_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{3n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^3+2} = \frac{1}{3} \quad \text{και επειδή η σειρά}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά } \sum_1^{\infty} \frac{n}{3n^3+2}.$$

Παρατήρηση η χρήση του κριτηρίου αυτού γίνεται συνήθως όταν έχουμε πηλίκο πολυωνύμων του n (το κριτήριο του λόγου αποτυγχάνει)

$$(\beta) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \right). \quad \text{Χρησιμοποιούμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης}$$

$$\text{με: } \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}, \beta_n = \frac{1}{n} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+5}} = 1$$

$$\text{και επειδή η σειρά } \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η σειρά } \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}.$$

$$(\gamma) \sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} \quad \text{Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της } n^{\text{οστης}} \text{ ρίζας}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

Άρα η $\sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ συγκλίνει

(δ) $\sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της $n^{\text{οστης}}$ ρίζας

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} < 1$$

Άρα η $\sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ συγκλίνει

(ε) $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}$ ($\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3} \approx \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$). Χρησιμοποιούμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης με:

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}, \beta_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ οπότε } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3} = 1 \text{ και επειδή η}$$

σειρά $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}$.

■

Εφαρμογή 3

Για να κατασκευαστεί ένας θάλαμος φύλαξης ραδιενεργών αποβλήτων χρησιμοποιείται ένα συμπαγές περίβλημα. Υπολογίζεται πειραματικά ότι στο τέλος κάθε χρόνου η ραδιενέργεια διαπερνά το περίβλημα κατά ένα πάχος:

$$d = \frac{P}{n}$$

όπου n είναι ο αριθμός των χρόνων που έχει περάσει και P μια θετική σταθερά. Γνωρίζουμε ότι στο τέλος του πρώτου χρόνου είναι $d=0,5\text{cm}$

(α) Αν το περίβλημα έχει αρχικά πάχος 4m, θα μπορέσει ποτέ η ραδιενέργεια να το διαπεράσει;

(β) Να βρεθεί ένα ασφαλές πάχος για το περίβλημα, ώστε να μην το διαπεράσει η ραδιενέργεια τα επόμενα 1000 χρόνια.

Λύση

Αφού για $n=1$, $d=0,5$ θα έχουμε ότι $P=0,5$. Επομένως το πάχος του περιβλήματος που θα έχει διαπεραστεί μετά από n χρόνια θα είναι :

$$d = P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3} + \dots + \frac{P}{n} = P \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(α) Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, οπότε όταν $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $d \rightarrow \infty$. Επομένως

όποια και αν είναι η τιμή της θετικής σταθεράς P , η ραδιενέργεια θα διαπεράσει το περίβλημα.

(β) Μετά από 1000 χρόνια η ραδιενέργεια θα έχει διαπεράσει πάχος ίσο με :

$$d = P + \frac{P}{2} + \frac{P}{3} + \dots + \frac{P}{1000} < 1000 \cdot P$$

Αρκεί να θεωρήσουμε ότι το πάχος του περιβλήματος είναι $1000d = 500\text{cm} = 5\text{m}$.

■

Εφαρμογή 4

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \alpha^n$

για τις διάφορες τιμές της θετικής παραμέτρου α .

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Λύση

(α) Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ρίζας, οπότε έχουμε :

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \alpha^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \alpha$$

και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha$. Αν $\alpha < 1$ η σειρά συγκλίνει, αν $\alpha > 1$ η σειρά δε συγκλίνει, ενώ αν $\alpha = 1$

θα πρέπει να εξετάσουμε ξεχωριστά τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Γνωρίζουμε ότι για μία συγκλίνουσα σειρά με όρους α_n ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$. Όμως οι

όροι $\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ έχουν όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e$ (Παράδειγμα, σελ. 24).

Επομένως η σειρά αποκλίνει (κριτήριο του $n^{\text{ου}}$ όρου).

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου, οπότε έχουμε :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2}{e} < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

■

Εφαρμογή 5

(α) Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}}}$ δεν συγκλίνει.

(β) Να δείξετε ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$. (ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΚΗ ΣΕΙΡΑ)

Λύση

(α) Ισχύει $\frac{\sin n}{n} < 1$, $n = 1, 2, \dots$, οπότε έχουμε:

$$n^2 + \frac{\sin n}{n} < n^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}} < \sqrt{n^2 + 1} < \sqrt{n^2 + n^2} < 2n, \quad n = 1, 2, \dots$$

και επομένως:

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}}}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ όμως δεν συγκλίνει ως **αρμονική**, και επομένως η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{\sin n}{n}}}$ δεν συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης.

. (β) Έχουμε (με ανάλυση του γινομένου σε απλά κλάσματα):

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{(2n-1)} + \frac{B}{(2n+1)} = \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Θέτουμε: } \alpha_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Άρα:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

.....

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1}$$

Οπότε η σειρά είναι τηλεσκοπική, με:

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1}$$

Άρα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1}$

Αλλά, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right) = 0$ οπότε: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

■

Εφαρμογή 6

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}{12^n} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 9} \text{ (τηλεσκοπική)}$$

Λύση

(α). Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}{12^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{12^n} + 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{12^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n + 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{12} \right)^n$$

Η γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{5}{12}$ συγκλίνει στο: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{12}{7}$

ενώ η γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ στο: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$.

Έτσι, η αρχική σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}{12^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{12} \right)^n + 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{12} \right)^n = 2 \cdot \frac{12}{7} + 7 \cdot 2 = \frac{122}{7}.$$

(β) Με ανάλυση σε απλά κλάσματα, έχουμε

$$\frac{1}{36n^2 - 9} = \frac{1}{(6n)^2 - 3^2} = \frac{1}{(6n-3)(6n+3)} = \frac{A}{6n-3} + \frac{B}{6n+3} = \frac{A(6n+3) + B(6n-3)}{(6n-3)(6n+3)}$$

ή $A(6n+3) + B(6n-3) = 1, \quad n = 1, 2, \dots$

Αν θέσουμε όπου $n = \frac{1}{2}$ τότε $6 \cdot A = 1$ άρα $A = \frac{1}{6}$, ενώ αν θέσουμε όπου $n = -\frac{1}{2}$, τότε

$(-6)B = 1$ άρα $B = -\frac{1}{6}$.

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 9} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)} \right),$

Θέτουμε: $\alpha_n = \frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)}$, $n=1,2,\dots$ Άρα:

$$\alpha_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right)$$

.....

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)} \right)$$

Οπότε:

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6(6n+3)}$$

Συνεπώς η σειρά είναι τηλεσκοπική.

$$\text{Άρα: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-9} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6(6n-3)} - \frac{1}{6(6n+3)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{18} - \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n+3}$$

$$\text{Αλλά, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n+3} = 0 \text{ οπότε: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-9} = \frac{1}{18}$$

■

Εφαρμογή 7

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^n}$$

Λύση

α) Θέτουμε $\alpha_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ και παρατηρούμε ότι $\alpha_n > 0$, $n=1,2,\dots$

Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{[n!(n+1)]^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2} \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4} < 1$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου (βλ. σελ. 37).

$$(\beta) \text{ Θέτουμε } \alpha_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ τότε: } (\alpha_n)^{1/n} = \left(\frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{1/n}$$

$$\text{και } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{1/n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

$$(\text{γιατί } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} = 1)$$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας (βλ. σελ. 39).

■

Εφαρμογή 8

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(ΕΝΑΛΛΑΣΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ)

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Λύση

$$(\alpha) \text{ Αφού } |n-2| \leq |n| + |2|, \text{ έχουμε ότι: } \left| (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \right| \leq \frac{n+2}{n^3+1}, n=1, 2, \dots$$

$$\text{Επειδή } n+2 \leq 3n \text{ και } n^3+1 > n^3 \text{ έχουμε ότι: } \left| (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1} \right| \leq \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}, n=1, 2, \dots$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης συνάγεται ότι και η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^3+1}$ συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς συγκλίνει (δείτε παρακάτω).

$$(\beta) \text{ Η ακολουθία } (-1)^n \frac{n}{n+1} \text{ δεν συγκλίνει στο μηδέν, διότι δεν υπάρχει το } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(οι υπακολουθίες των θετικών και των αρνητικών όρων συγκλίνουν στο +1 και -1

αντίστοιχα). Άρα σύμφωνα με το κριτήριο n^οστού όρου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει.

■

Εναλλάσσουσες σειρές

Ορισμός

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ καλείται **εναλλάσσουσα**, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι:

$$\beta_n \beta_{n+1} < 0,$$

δηλαδή, αν δύο οποιοδήποτε διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ετερόσημοι (έχουν δηλαδή διαφορετικό πρόσημο ή με άλλα λόγια «εναλλάσσουν» πρόσημο).

Εφαρμογή 9

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ (αρμονική εναλλάσσουσα), $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n^2+1}$ είναι εναλλάσσουσες.

Γενικότερα, **εναλλάσσουσα** είναι κάθε σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n, \quad \text{με } \alpha_n > 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Το κριτήριο που ακολουθεί είναι συνήθως αυτό που χρησιμοποιείται για απόδειξη της σύγκλισης (ή όχι) μιας εναλλάσσουσας σειράς.

Θεώρημα (Κριτήριο Leibnitz).

Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ (ή $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$) είναι μια εναλλάσσουσα σειρά (υποθέτουμε ότι $\alpha_n > 0$), και ισχύει:

- (i) η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα (δηλαδή ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$),
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$,

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n$ (ή η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$) συγκλίνει.

Εφαρμογή 10

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο, γιατί:

- (i) $\alpha_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = \alpha_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, και
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

■

Παρατήρηση

(α) Θυμηθείτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (αρμονική) δεν συγκλίνει.

(β) Γενικότερα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ συγκλίνει (χρησιμοποιώντας και πάλι το κριτήριο του Leibnitz, γιατί για την ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{n^p}$ έχουμε:

$$(\alpha) \alpha_n = \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} = \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{και} \quad (\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0).$$

■

Εφαρμογή 11

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$ είναι εναλλάσσουσα και (εδώ $\alpha_n = \frac{1}{3n+2}$):

- (i)

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{3(n+1)+2} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+2} = \frac{3n+2-(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{-3}{(3n+5)(3n+2)} < 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3n+2} = 0$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$ συγκλίνει.

■

Εφαρμογή 12

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+2}$ είναι εναλλάσσουσα και:

(i)

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= \frac{(n+1)+3}{(n+1)^2+2} - \frac{n+3}{n^2+2} = \frac{n+4}{n^2+2n+3} - \frac{n+3}{n^2+2} = \frac{(n^2+2)(n+4) - (n+3)(n^2+2n+3)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \\ &= \frac{n^3+4n^2+2n+8-n^3-2n^2-3n-3n^2-6n-9}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \frac{-n^2-7n-1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = -\frac{n^2+7n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^2+2} = 0$$

Άρα, από το κριτήριο του Leibnitz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+2}$ συγκλίνει.

■

Εφαρμογή 13

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{2n+1}$ είναι εναλλάσσουσα. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε όμως για την σύγκλιση της χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibnitz, γιατί δεν ικανοποιείται η συνθήκη (ii). Εδώ:

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

■

Παρατήρηση

Επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \neq 0$ (στην πραγματικότητα δεν υπάρχει (γιατί;)), έχουμε από το

κριτήριο του n-οστού όρου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{2n+1}$ δεν συγκλίνει.

Απόλυτη σύγκλιση

Όταν έχουμε μια εναλλάσσουσα σειρά, πριν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Leibnitz προσπαθούμε να δούμε εάν, όπως λέμε, η σειρά **συγκλίνει απόλυτα**.

Ορισμός

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει **απόλυτα**, εάν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ (δηλαδή εάν συγκλίνει η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της σειράς).

Κριτήριο (απόλυτης σύγκλισης)

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ (ή με άλλα λόγια, εάν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει) και ισχύει

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$$

Εφαρμογή 14

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ συγκλίνει απόλυτα γιατί είναι γνωστό ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ συγκλίνει. Άρα από το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης, και η (εναλλάσσουσα) σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ (δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε δηλαδή απαραίτητα το κριτήριο του Leibnitz).

■

Παρατήρηση

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ αποκλίνει, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση ή όχι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Εφαρμογή 15

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p \leq 1$ **δεν** συγκλίνει απόλυτα γιατί είναι γνωστό ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ αποκλίνει.

Δείξαμε όμως στο παράδειγμα 2 (χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibnitz ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$, $p \leq 1$ συγκλίνει.

■

4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(Α) Όριο συνάρτησης σε ένα σημείο x_0

Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, όπου D ένα σύνολο της μορφής $D = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Ορισμός (κλασσικός ϵ, δ ορισμός)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $L \in \mathbb{R}$ για $x \rightarrow x_0$ (**του x τείνοντος στο x_0**) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

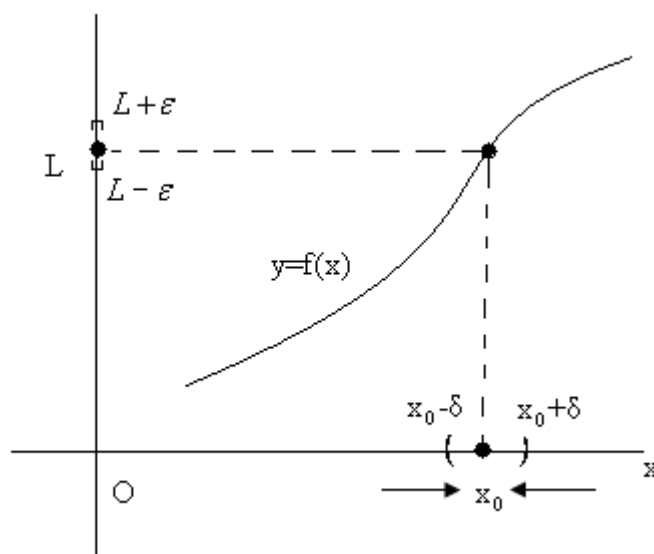
όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ), για το οποίο: αν

$$|x - x_0| < \delta$$

τότε

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

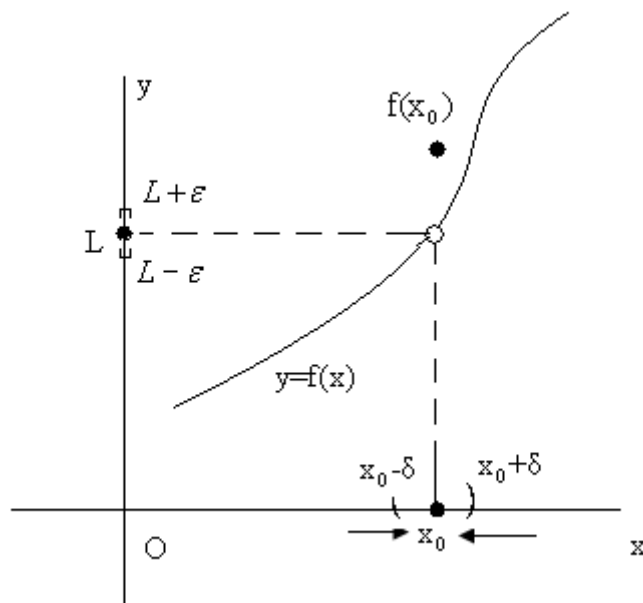
Δηλαδή όταν τα (πρότυπα) x πλησιάζουν το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y = f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό L (σε απόσταση μικρότερη από ϵ , για κάθε δοσμένο ϵ). (δείτε το σχήμα 1)



Σχήμα 1

Παρατήρηση

(α) Είναι φανερό από τον ορισμό του ορίου ότι, η συνάρτηση f δεν είναι απαραίτητο να είναι ορισμένη στο σημείο x_0 . Ακόμα, αν η f είναι ορισμένη στο σημείο x_0 , τότε η τιμή $f(x_0)$ δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με το όριο L , δηλαδή $f(x_0) \neq L$ εν γένει (δείτε το σχήμα 2).



Σχήμα 2

(β) Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ μπορεί να υπάρχει ή μπορεί να μην υπάρχει. Όταν όμως υπάρχει είναι και μοναδικό.

(γ) Όταν το x πλησιάζει το σημείο x_0 από τιμές μικρότερες του x_0 δηλαδή $x < x_0$ (λέμε ότι το x **πλησιάζει το σημείο x_0 από αριστερά** και το συμβολίζουμε με $x \rightarrow x_0^-$), τότε το:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

καλείται **αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0** . Ανάλογα, όταν το x πλησιάζει το σημείο x_0 από τιμές μεγαλύτερες του x_0 δηλαδή $x > x_0$ (λέμε ότι το x **πλησιάζει το σημείο x_0 από δεξιά** και το συμβολίζουμε με $x \rightarrow x_0^+$), τότε το:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

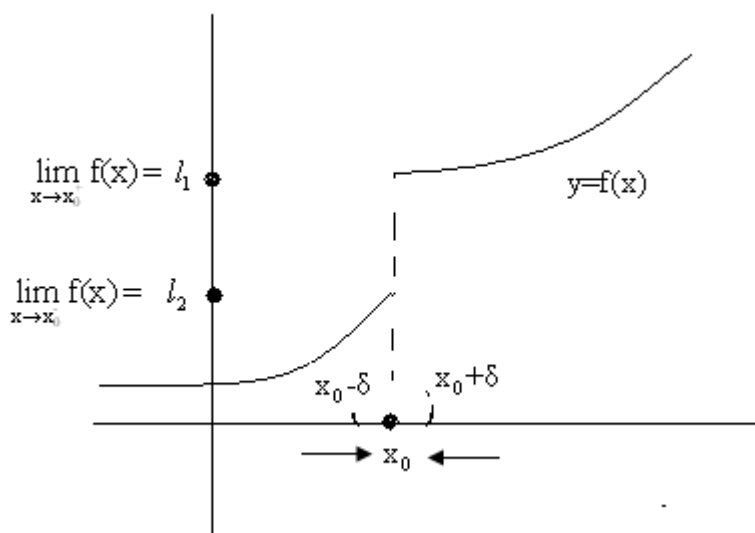
καλείται **δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0** .

Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτουν (δείτε το σχήμα 3).

(δ) Είναι προφανές ότι, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει τότε και μόνον τότε όταν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο σημείο x_0 είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο πλησιάζουμε το σημείο x_0 .



Σχήμα 3

Ιδιότητες του ορίου

Εάν f, g, h είναι δύο συναρτήσεις των οποίων υπάρχει το όριο στο σημείο x_0 , τότε:

(α) $\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $c \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

(β) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

(ε) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ Ειδικότερα $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$

(στ) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ όταν $f(x) \geq 0$

(ζ) (ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις/αρχή παρεμβολής) Εάν ισχύει:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

(η) Εάν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Δίνουμε πρώτα μερικές εφαρμογές υπολογισμού του ορίου με την βοήθεια του ε, δ , ορισμού.

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-1)$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x-1)=2$. Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ (το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση:
αν

$$|x-1| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |(3x-1)-2| < \varepsilon$$

Αλλά, $|(3x-1)-2| = |3x-3| = 3|x-1|$, οπότε εάν θεωρήσουμε ότι $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, τότε:

$$|(3x-1)-2| = |3x-3| = 3|x-1| < 3 \cdot \delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

Εφαρμογή 2

Να δειχθεί ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ (το οποίο δ , και πάλι, πρέπει να υπολογίσουμε), τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση:

αν

$$|x| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |\sin x| < \varepsilon$$

Έχουμε όμως:

$$|\sin x| = |1 - \cos x| = 2 \left| \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right| = 2 \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} |x|^2$$

Συνεπώς, για $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ και έχουμε,

$$|\sin x| \leq \frac{1}{2} |x|^2 < \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

■

Εφαρμογή 3

Να δειχθεί ότι το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$)

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπάρξει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση: αν

$$|x - a| < \delta, \quad \text{τότε} \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$$

Έχουμε όμως: (έστω για ευκολία ότι το $a > 0$, αν $a < 0$ εργαζόμαστε ανάλογα).

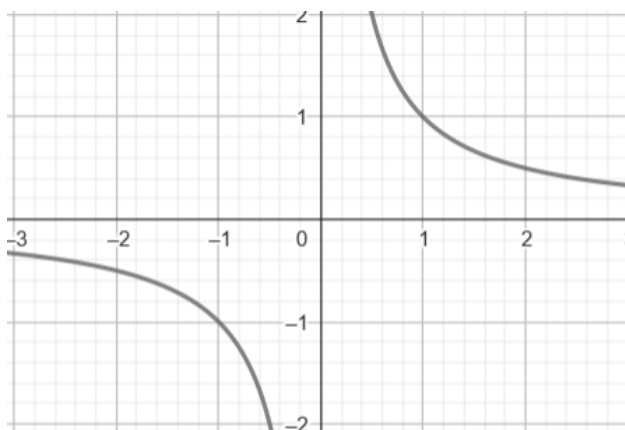
$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{x-a}{ax} \right|$$

$$\text{και} \quad x \rightarrow a \Rightarrow x > \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{2}{a} \Rightarrow \left| \frac{1}{ax} \right| < \frac{2}{a^2}$$

Συνεπώς, για $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{2}$ έχουμε,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{x-a}{ax} \right| < \delta \cdot \left| \frac{1}{ax} \right| < \frac{2}{a^2} \delta = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\varepsilon a^2}{2} = \varepsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$).



■

Παρατήρηση

Από τις παραπάνω εφαρμογές γίνεται φανερό ότι ο ε, δ ορισμός για τον υπολογισμό του ορίου είναι δύσχρηστος για δύο κυρίως λόγους

- (α) Θα πρέπει να ξέρουμε, για να τον εφαρμόσουμε, το όριο L εκ των προτέρων (πράγμα που τις περισσότερες φορές δεν είναι εύκολο να το γνωρίζουμε).
- (β) Θα πρέπει για κάθε δοσμένο ε να υπολογίσουμε ένα δ έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο ανισότητες του ορισμού (πράγμα όχι εύκολο, τις περισσότερες φορές πρέπει να κάνουμε χρήση αρκετών πραγμάτων από την άλγεβρα για να το υπολογίσουμε).

- (γ) Για να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$ αρκεί να βρούμε μία ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ τέτοια ώστε $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ ενώ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq a$.

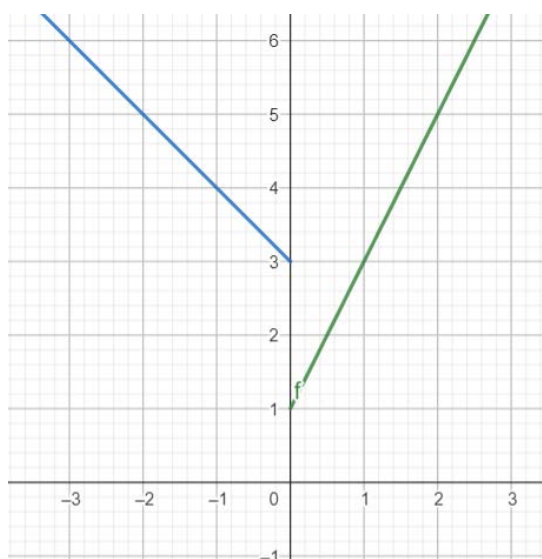
Παράδειγμα

Εάν $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ -x+3 & x < 0 \end{cases}$, τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq 1$

Λύση

Πράγματι, εάν θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = -\frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{αλλά} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\left(-\frac{1}{n}\right) + 3\right) = 3 \neq 1$$



■

- (δ) Για να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ τέτοιες ώστε $x_n \neq x_0, y_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ ενώ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$.

Παράδειγμα

Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει.

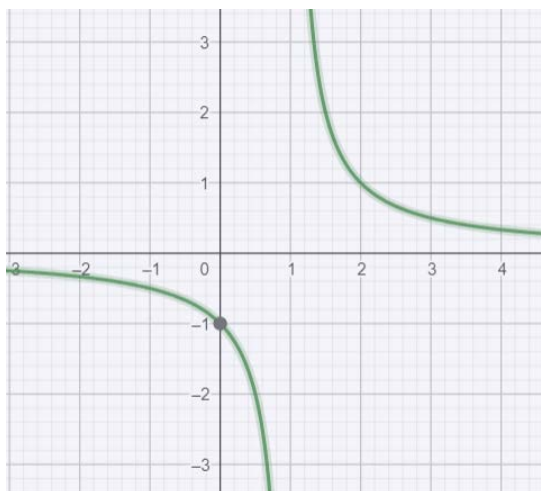
Λύση

Πράγματι, εάν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $x_n = 1 + \frac{1}{n}, y_n = 1 - \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$, τότε

ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ αλλά:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \neq$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$$



■

Όταν λοιπόν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν χρησιμοποιούμε (κατ' αρχάς) τον ε,δ ορισμό, αλλά προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα ακόλουθα:

- 1) Αντικαθιστούμε το x με x_0 στον τύπο της $f(x)$. Εάν το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ένας πεπερασμένος αριθμός A , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

(βέβαια για να είμαστε μαθηματικά σωστοί και αυστηροί, θα πρέπει να αποδείξουμε (με την βοήθεια του ε,δ ορισμού) ότι όντως το όριο που βρήκαμε είναι το «σωστό», πράγμα το οποίο τις περισσότερες φορές παραλείπεται).

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 3x - 1) & (\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+4} & (\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-4|}{x+4} \\ (\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 5x + 6} & (\epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 4)^{15} & (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \end{array}$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 3x - 1) = 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = 44 \quad (\text{αναμενόταν γιατί η συνάρτηση είναι πολυωνυμική})$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+4} = \frac{2-2}{2^2+4} = \frac{0}{8} = 0$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-4|}{x+4} = \frac{|2-4|}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+5x+6)} = \sqrt{1^2+5 \cdot 1+6} = \sqrt{12} = 3\sqrt{2}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2-3x+4)^{15} = \left(\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-3x+4) \right)^{15} = (3^2-3 \cdot 3+4)^{15} = 4^{15}$$

(στ)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

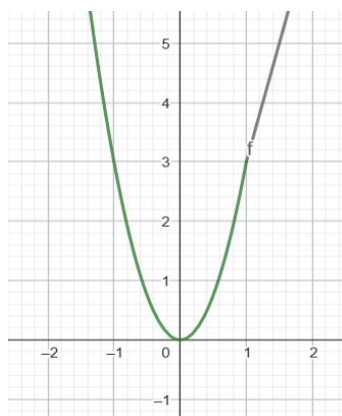
Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί, εάν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ της:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 1 \\ 4x-1 & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \cdot 1^2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$



■

Εφαρμογή 6

Εάν για τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha x + 1 & x \leq 2 \\ \frac{\beta^2 x^2 - 4}{\beta x + 2} & x > 2 \end{cases}$$

έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, να υπολογιστούν τα α και β .

Λύση

Επειδή:

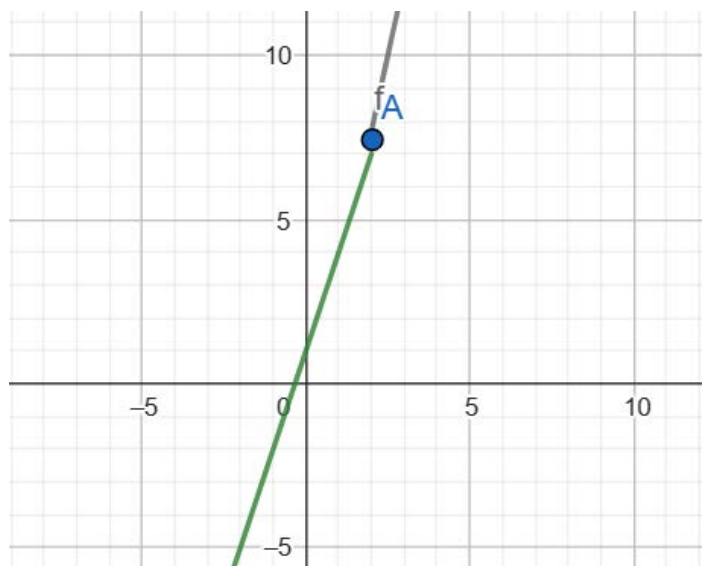
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$$

$$\text{Αλλά: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (3\alpha x + 1) = 3\alpha \cdot 2 + 1 = 7 \Rightarrow 6\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\beta^2 x^2 - 4}{\beta x + 2} \right) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\beta x)^2 - 2^2}{\beta x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\beta x - 2)(\beta x + 2)}{\beta x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\beta x - 2) = (\beta \cdot 2 - 2) = 7 \Rightarrow 2\beta = 9 \Rightarrow \beta = \frac{9}{2}$$



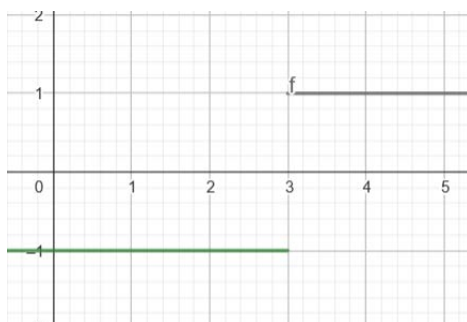
■

Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί, εάν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ της: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{|x-3|}$.

Λύση

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x-3|} \stackrel{x>3}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{|x-3|} \stackrel{x<3}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{-(x-3)} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$



■

Εφαρμογή 8

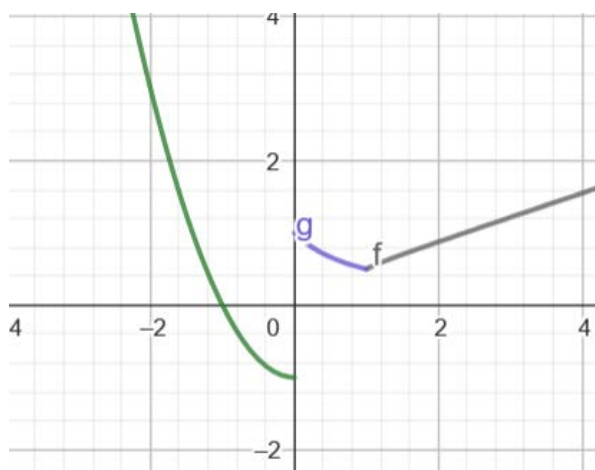
Να υπολογιστούν, εάν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ της:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x^2-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{2x^2-1}{6x-4} & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

Για το σημείο 0 έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-1} &= \frac{0-1}{0^2-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



Για το σημείο 1 έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2-1}{6x-4} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1}{6 \cdot 1 - 4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

■

Εφαρμογή 9

Εάν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{5x} = 4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Εάν θέσουμε $g(x) = \frac{f(x)+3}{5x}$ τότε: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4$. Ακόμα: $f(x) = 5x \cdot g(x) - 3$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x \cdot g(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (g(x)) - 3 = 5 \cdot 0 \cdot 4 - 3 = -3$$

■

- 2) (α) Προσπαθούμε να κάνουμε κάποιο είδος παραγοντοποίησης στον τύπο της συνάρτησης ή να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις γνωστές ταυτότητες.

Εφαρμογή 10

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x-1} \quad (δ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{1-\sigma \upsilon \nu x}$$

Λύση

Έχουμε

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) = 3$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0$$

(δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sigma\upsilon\nu x) \\ = 1 + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$$

■

(β) Εάν η συνάρτηση είναι ρητή (κλάσμα) και περιέχει ριζικά, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση (αριθμητή ή παρονομαστή, ανάλογα με το που υπάρχουν τα ριζικά).

Εφαρμογή 11

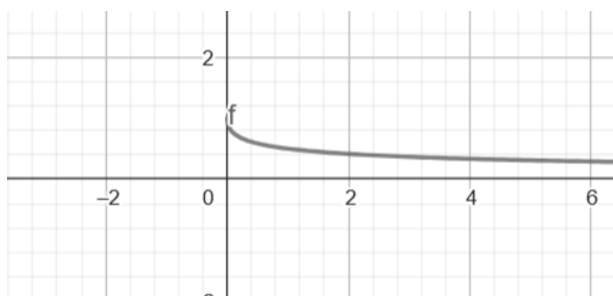
Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, καθένα από τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$$

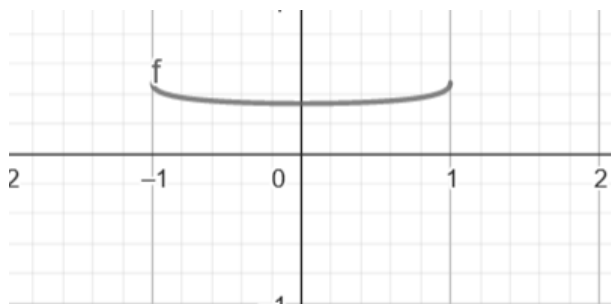
Λύση

(α) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με την συζυγή παράσταση του αριθμητή:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$



(β) Ανάλογα, έχουμε:



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}^2 - \sqrt{1-x}^2}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0})} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

■

3) Χρησιμοποιούμε το θεώρημα των λεγόμενων ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων ή αλλιώς την αρχή της παρεμβολής

Πρόταση (θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων/αρχή της παρεμβολής)

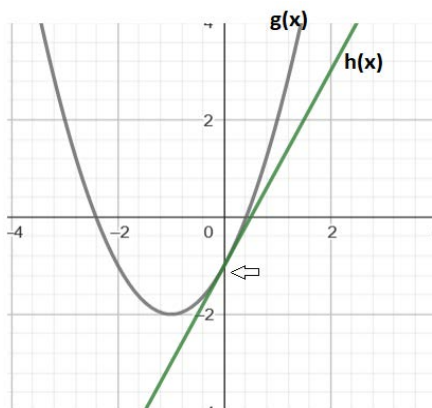
Εάν f, g, h πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \beta = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Εφαρμογή 12

Εάν ισχύει: $(2x-1) \leq f(x) \leq (2x-1)+x^2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση



Εάν θέσουμε: $h(x)=2x-1$, $g(x)=(2x-1)+x^2$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x-1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} ((2x-1)+x^2) = 2 \cdot 0 - 1 + 0^2 = -1$$

Οπότε από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων/αρχή παρεμβολής

έπεται και ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

■

4) Γενικότερα, χρησιμοποιούμε γνωστά θεωρήματα από την άλγεβρα.

Π.χ Είναι γνωστό από την άλγεβρα ότι:

Πρόταση

$$|\eta\mu x| \leq |x| \leq |\epsilon\phi x|, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Εφαρμογή 13

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, καθένα από τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x} \quad (δ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\eta\mu x}$$

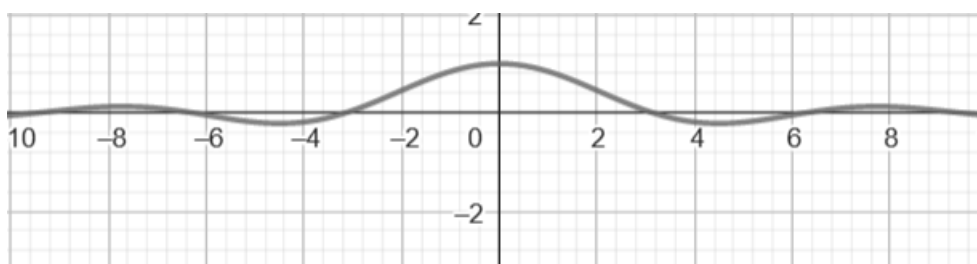
Λύση

(α) Από την παραπάνω πρόταση, έχουμε για:

$$\begin{aligned} x \neq 0, \quad |\eta\mu x| \leq |x| &\leq \frac{|\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} \xrightarrow{\text{αντιστρεφοντας}} \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|\eta\mu x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\eta\mu x|} \\ &\xrightarrow{\text{πολλ/ζοντας με } |\eta\mu x|} |\eta\mu x| \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|\eta\mu x|} \leq \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{|\eta\mu x|}{|\eta\mu x|} \\ &\Rightarrow |\sigma\upsilon\nu x| \leq \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Οπότε από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων, έχουμε:

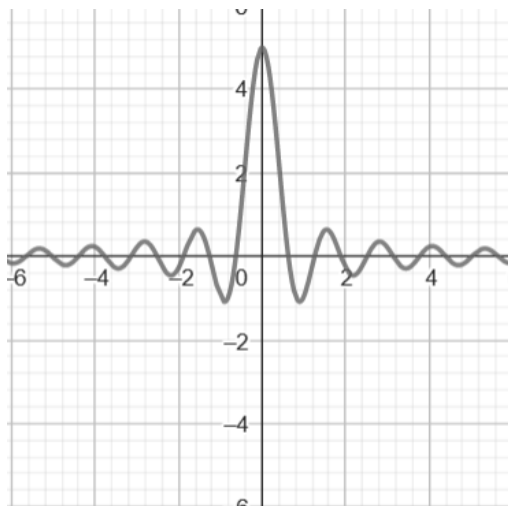
$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sigma\upsilon\nu x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$



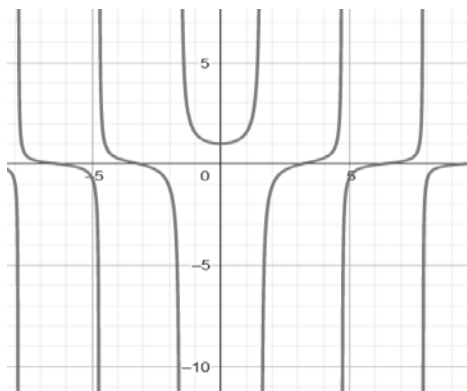
Παρατήρηση

Το ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ είναι βασικό και μας βοηθά να υπολογίσουμε όρια με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$(β) \text{ Χρησιμοποιώντας το (α): } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{u=5x}{=} \frac{1}{5} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} \stackrel{(α)}{=} 1$$

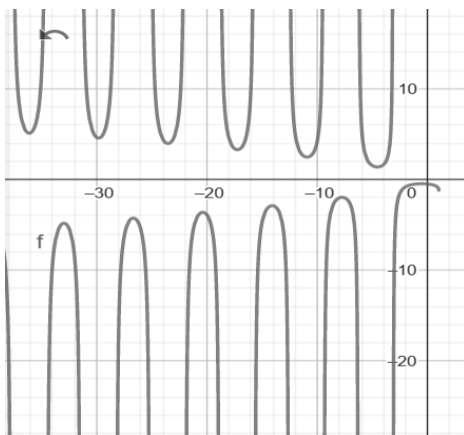


$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x \cdot \sigma \upsilon \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} \stackrel{(a)}{=} 1 \cdot \frac{1}{\sigma \upsilon \nu 0} = 1$$



(δ)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\eta \mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sqrt{1-x}-1}{x \cdot \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x \cdot \frac{\eta \mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}} \stackrel{(a)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x \cdot (\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x \cdot (\sqrt{1-x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(\sqrt{1-x}+1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



■

Εφαρμογή 14

Να δειχθεί ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$.

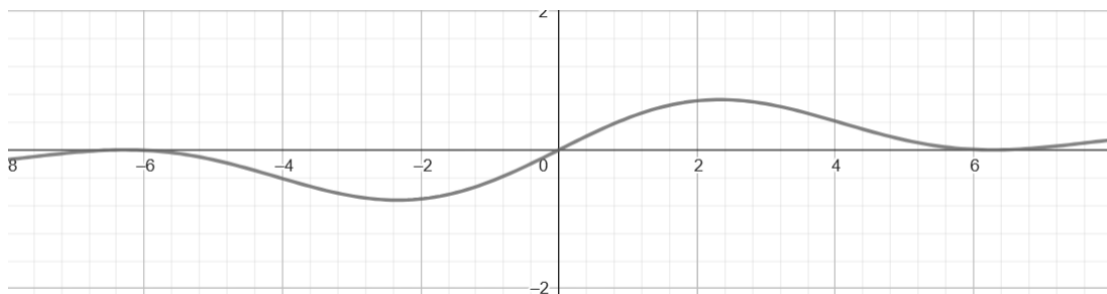
Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 1}{x(\sin x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x}{x(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x}{x \cdot x(\sin x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x + 1} = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$



■

5. Απειρο όριο συνάρτησης σε πεπερασμένο σημείο

(B) Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, όπου D ένα σύνολο της μορφής $D = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

Ορισμός (ε,δ ορισμός)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $+\infty$ για $x \rightarrow x_0$ (του x **τείνοντος στο** x_0) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

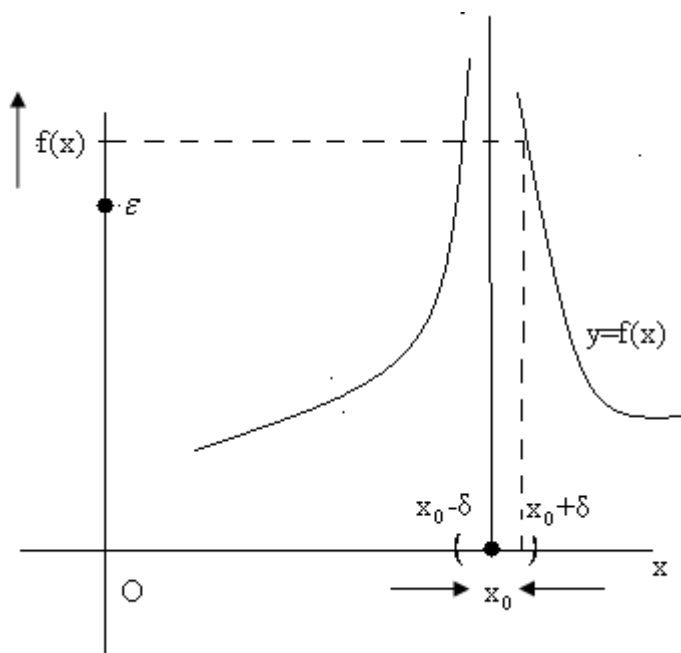
όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν

$$|x - x_0| < \delta$$

τότε:

$$f(x) > \varepsilon$$

Δηλαδή όταν τα x πλησιάζουν το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y = f(x)$ γίνονται μεγάλες (είναι μεγαλύτερες από το ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 4)



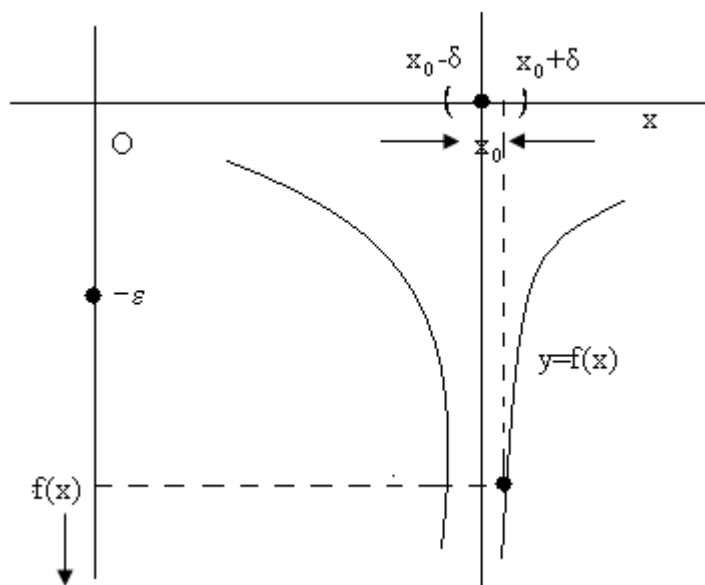
Σχήμα 4

Ανάλογα, θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $-\infty$ για $x \rightarrow x_0$ (του x **τείνοντος στο** x_0) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο:

αν $|x-x_0| < \delta$, τότε $f(x) < -\varepsilon$



Σχήμα 5

Δηλαδή όταν τα x πλησιάζουν το σημείο x_0 (σε απόσταση μικρότερη από δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y=f(x)$ γίνονται μικρές (είναι μικρότερες από το ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 5).

Παράδειγμα

Να δειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x-2} = +\infty$

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{4}{x-2}$ και $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta > 0$ (το οποίο θα εξαρτάται από το ε) και για το οποίο: αν x τέτοιο ώστε:

$$|x-2| < \delta$$

τότε:

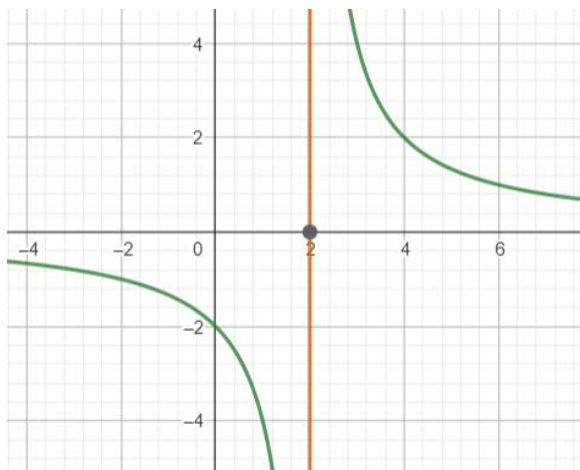
$$f(x) > \varepsilon$$

Αλλά $\left| \frac{4}{x-2} \right| > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{4} < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{4}{\varepsilon}$, οπότε εάν θεωρήσουμε $\delta = \frac{4}{\varepsilon}$, τότε εάν x

τέτοιο ώστε: $|x-2| < \delta = \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left| \frac{4}{x-2} \right| > 4 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο.

Παρατήρηση

Η απόλυτη τιμή στις παραπάνω σχέσεις μπορεί να παραλειφθεί μιάς και $x \rightarrow 2^+$ οπότε $x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$



■

Πρόταση

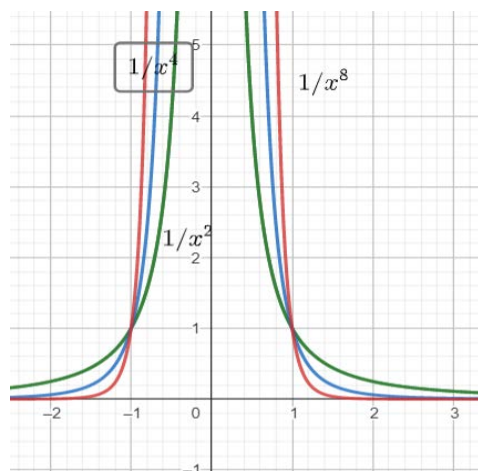
Ισχύουν τα εξής:

(I) Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(II) Εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (για κάποιο α), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Εφαρμογή: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty, n \in \mathbb{N}^*$

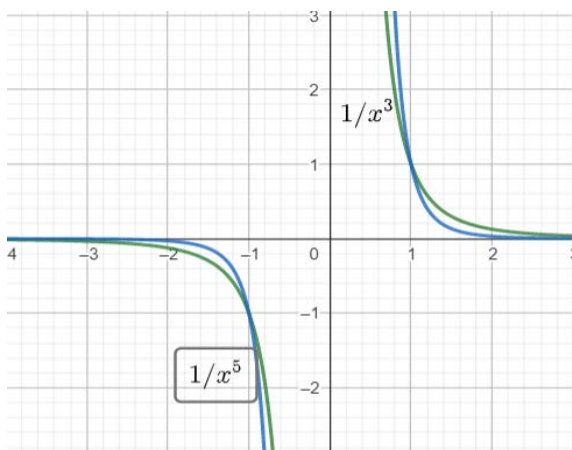


(III) Ανάλογα, εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ (για κάποιο α),

τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Εφαρμογή:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} &= +\infty, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} &= -\infty, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n+1}}$$



Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

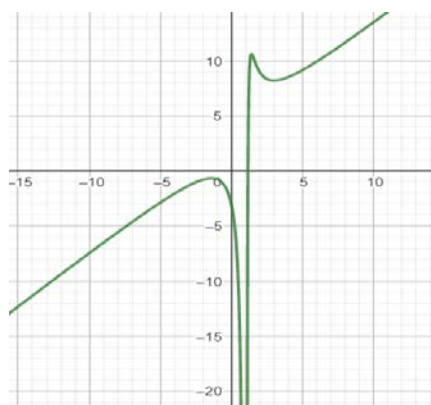
$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{(x-1)^2} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x-1} \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2 + x}$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = (1^3 + 1^2 - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Αλλά, καθώς το $x \rightarrow 1$ το $(x-1)^2 \rightarrow 0$ & $(x-1)^2 > 0$, οπότε λόγω του (II) της παραπάνω εφαρμογής έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.



Τελικά

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{(x-1)^2} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

(β) Εργαζόμενοι ανάλογα όπως στο (α) έχουμε:

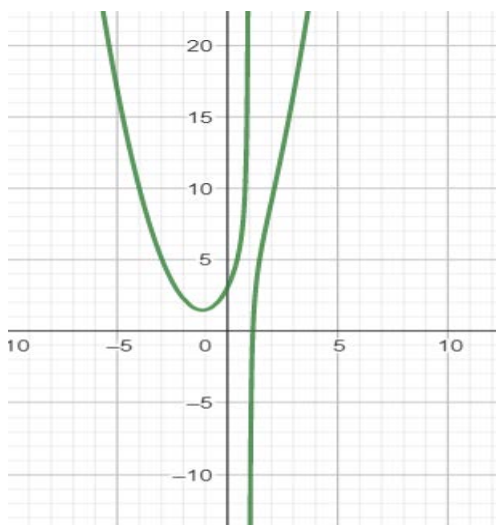
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$$

Αλλά, καθώς το $x \rightarrow 1^+$ το $(x - 1) \rightarrow 0$ & $(x - 1) > 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Ανάλογα, καθώς το $x \rightarrow 1^-$ το $(x - 1) \rightarrow 0$ & $(x - 1) < 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} = (-1) \cdot (-\infty) = +\infty.$$



Τέλος, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x}$$

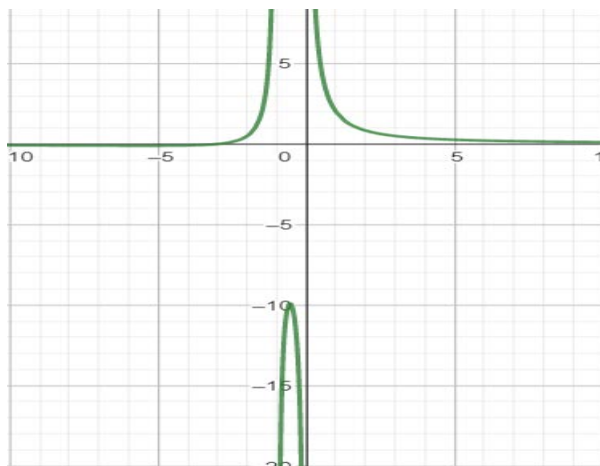
Αλλά, καθώς το $x \rightarrow 0^+$ το $x^2 + x = x(x + 1) \rightarrow 0$ & $x^2 + x > 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Ακόμα, καθώς το $x \rightarrow 0^-$ το $x^2 + x = x(x + 1) \rightarrow 0$ & $x^2 + x < 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + x} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + x} = 3 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, έπεται ότι $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x^2 + x}$



■

Εφαρμογή 2

Εάν έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{f(x)} = +\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

Εάν θέσουμε $g(x) = \frac{x+3}{f(x)}$ τότε: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ (και $g(x) \neq 0$ κοντά $x=1$). Ακόμα:

$$f(x) = \frac{x+3}{g(x)}, \text{ οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g(x)} = 4 \cdot 0 = 0$$

■

Παρατήρηση

Οι μορφές: $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι απροσδιόριστες μορφές και εξετάζονται αναλυτικά σε άλλη παράγραφο.

(Γ) Όριο της συνάρτησης στο άπειρο (πεπερασμένο/άπειρο)

- (1) Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** την τιμή $L \in \mathbb{R}$ για $x \rightarrow +\infty$ (**του x τείνοντος στο συν άπειρο**) και θα το συμβολίζουμε με:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

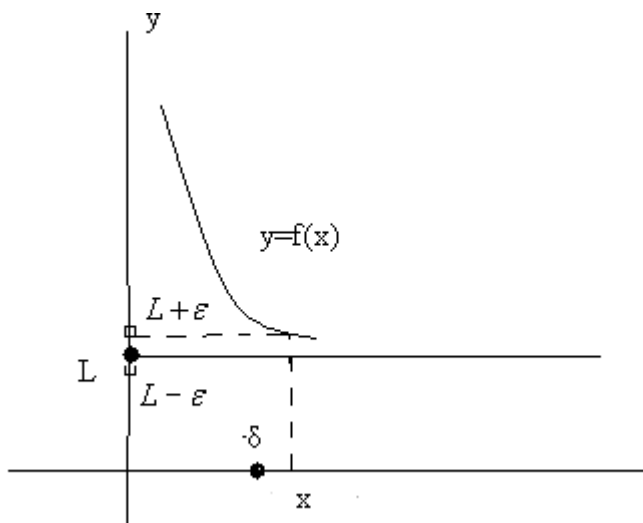
όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν

$$x > \delta$$

τότε:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Δηλαδή όταν τα x γίνονται μεγάλα (μεγαλύτερα από ένα δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y=f(x)$ πλησιάζουν τον αριθμό L (σε απόσταση μικρότερη από ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 6)



Σχήμα 6

Ανάλογα ορίζεται και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=L$

Παράδειγμα

Να δειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1}=2$

Λύση

Έστω $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ και $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta > 0$ (το οποίο θα εξαρτάται από το ε) και για το οποίο: αν x τέτοιο ώστε:

$$x > \delta$$

τότε:

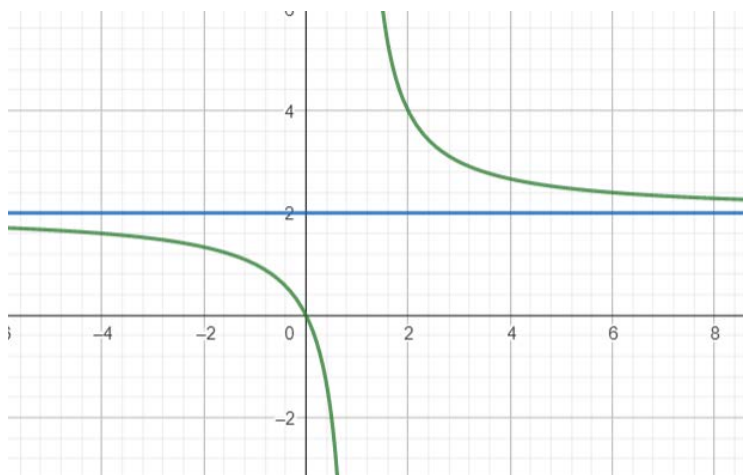
$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

Αλλά

$$\left| 2 - \frac{2x}{x-1} \right| = \left| \frac{2x-2-2x}{x-1} \right| = \left| \frac{-2}{x-1} \right| = \left| \frac{2}{x-1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x-1 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} + 1 > \frac{2}{\varepsilon},$$

οπότε εάν θεωρήσουμε $\frac{2}{\varepsilon} = \delta$, τότε εάν x τέτοιο ώστε: $x > \delta = \frac{2}{\varepsilon}$, τότε $\left| 2 - \frac{2x}{x-1} \right| < \varepsilon$

που είναι το ζητούμενο.



■

(2) Όριο της συνάρτησης στο άπειρο (άπειρο)

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **όριο** το $+\infty$, για $x \rightarrow +\infty$ (του x τείνοντος **στο συν άπειρο**) και θα το συμβολίζουμε με:

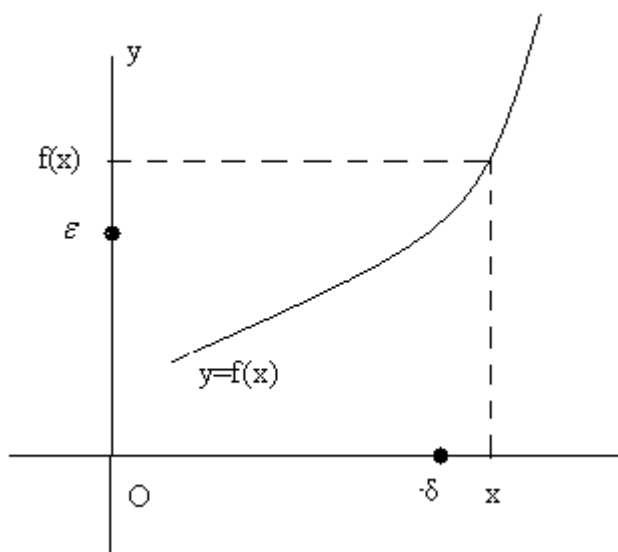
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

όταν για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν $x > \delta$

τότε:

$$f(x) > \varepsilon$$

Δηλαδή όταν τα x γίνονται μεγάλα (μεγαλύτερα από ένα δ , το οποίο δ πρέπει να υπολογίσουμε), τότε οι εικόνες $y=f(x)$ γίνονται μεγάλες (μεγαλύτερες από ε , για κάθε δοσμένο ε). (δείτε το σχήμα 7)



Σχήμα 7

Ανάλογα ορίζονται και τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Παράδειγμα

Να δειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{5} = +\infty$.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 2}{5}$ και $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta > 0$ (το οποίο θα εξαρτάται από το ε) και για το οποίο: αν x τέτοιο ώστε:

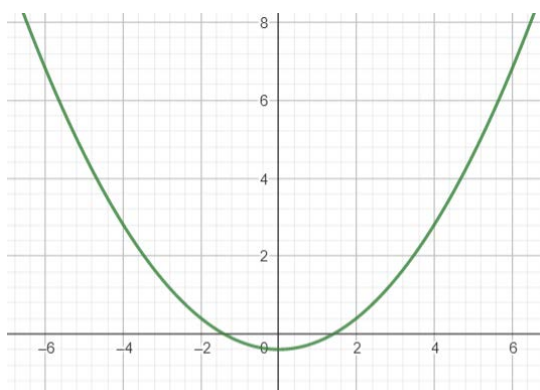
$$x > \delta$$

τότε:

$$f(x) > \varepsilon$$

$$\text{Αλλά } \frac{x^2 - 2}{5} > \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - 2 > 5\varepsilon \Leftrightarrow x > \sqrt{5\varepsilon + 2},$$

οπότε εάν θεωρήσουμε $\delta = \sqrt{5\varepsilon + 2}$, τότε εάν x τέτοιο ώστε: $x > \delta = \sqrt{5\varepsilon + 2}$, τότε $\frac{x^2 - 2}{5} > \varepsilon$ που είναι το ζητούμενο.



Μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις υπολογισμού του ορίου: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ εξετάζονται παρακάτω.

(I) Όριο πολωνυμικής

Πρόταση

Το όριο μιας πολωνυμικής συνάρτησης $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$, $a_n \neq 0$ είναι ίσο με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της.

Απόδειξη

Πράγματι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \alpha_n x^n \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \frac{1}{x^n} \right) \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n) \cdot \left(1 + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \cdot 0 + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \cdot 0 + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \cdot 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n)\end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστούν τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + 3x - 1) \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 1)$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 1) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

■

(II) Όριο ρητής συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας ρητής συνάρτησης, δηλαδή το

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ όπου } P(x), Q(x) \text{ είναι πολυώνυμα του } x, \text{ τότε χρησιμοποιούμε και πάλι}$$

την παραπάνω πρόταση. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι θα ισχύει:

1. Αν ο βαθμός $(P(x)) >$ του βαθμού $(Q(x))$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \text{ (εξαρτάται από τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων)}$$

2. Αν ο βαθμός $(P(x)) <$ του βαθμού $(Q(x))$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

3. Αν ο βαθμός $(P(x)) =$ του βαθμού $(Q(x))$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{πηλίκo συντελεστών μεγιστοβάθμιων όρων}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστούν τα όρια των συναρτήσεων.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 - 2}{3x^2 - 2}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 5x^2}{-x^5 + 6x}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{6 - 4x^3}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2}{x + 7}$$

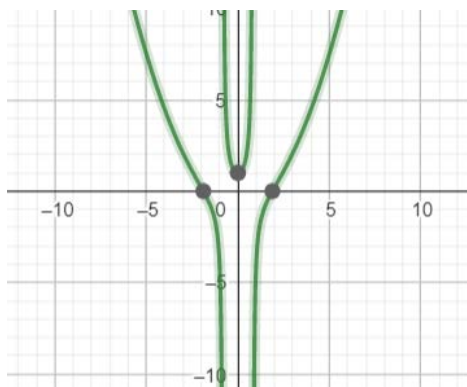
$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4x|}{x - 4}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{|x - 2|}$$

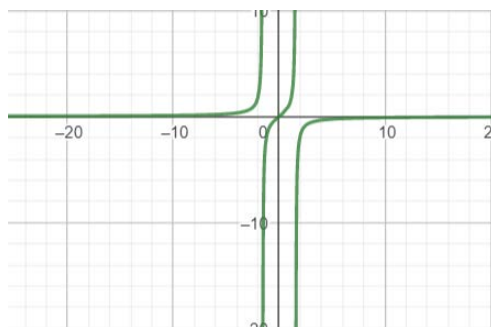
$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 2}$$

Λύση

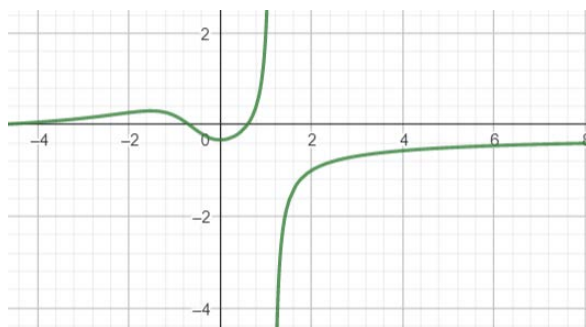
$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 - 2}{3x^2 - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} = +\infty$$



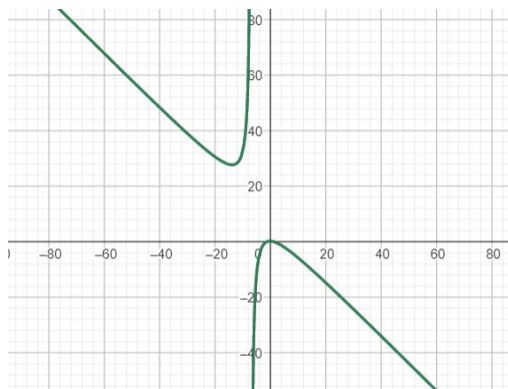
$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 5x^2}{-x^5 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$$



$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{6 - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-4x^3} = -\frac{1}{4}$$

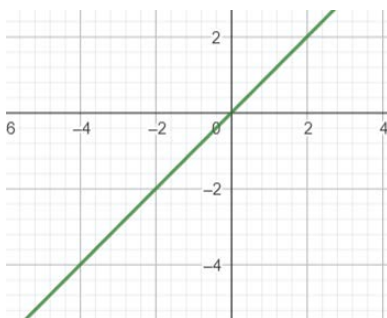


$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+2}{x+7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$$



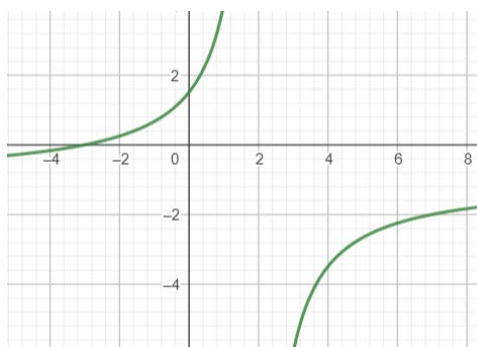
(ε) Όταν το $x \rightarrow +\infty$ η ποσότητα $x^2 - 4x = x(x-4) > 0$ (;), οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4x|}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

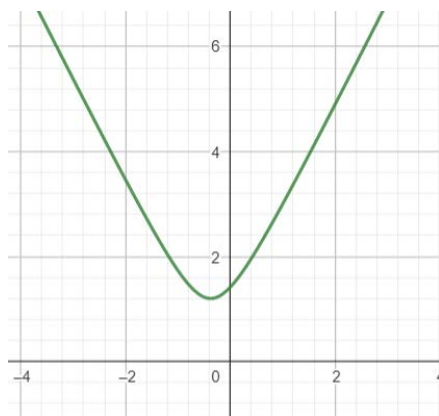


(στ) Όταν το $x \rightarrow -\infty$ η ποσότητα $(x-2) < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$ (;), οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$



$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 3x + 2)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2)} = +\infty$$



■

(III) Όριο ριζικών

Εφαρμογή 5

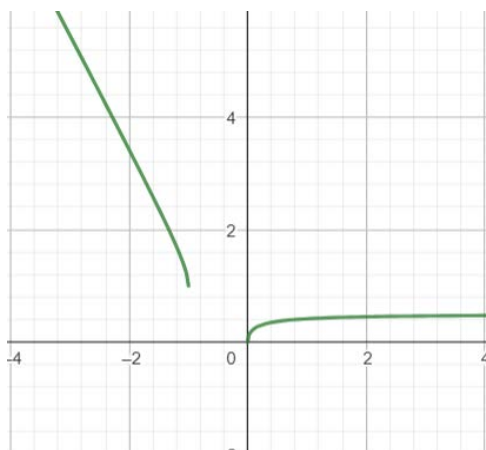
Για το όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον συζυγή της παράστασης, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} =$$

Αλλά, γνωρίζουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Άρα:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



■

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

A. Ορισμός Παραγώγου

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει **παράγωγο** ή ότι είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $x=x_0$ όταν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

το οποίο καλείται **παράγωγος της f** στο σημείο x_0 . Πολλές φορές γράφουμε $\frac{df}{dx}(x_0)$ αντί για $f'(x_0)$. Το όριο:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος της f** στο σημείο $x=x_0$ ενώ το όριο:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ονομάζεται **αριστερή (πλευρική) παράγωγος της f** στο σημείο $x=x_0$.

Παρατήρηση

(α) Είναι προφανές ότι για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$ θα πρέπει:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

και αντίστροφα.

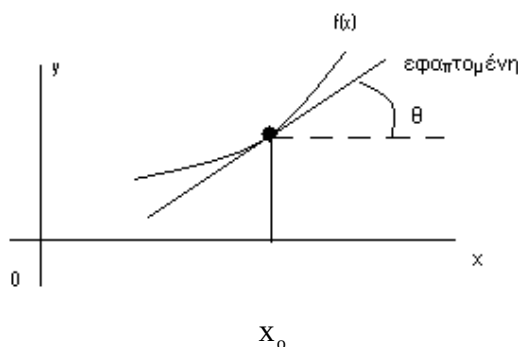
(β) Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα, δηλαδή $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τότε στα σημεία a, b μπορούμε να μιλάμε για πλευρικές παραγώγους μόνο (αριστερά και δεξιά πλευρική παράγωγο αντίστοιχα). Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα, δηλαδή $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, τότε μιλάμε για παράγωγο μόνο στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος (δηλαδή στα σημεία x_0 τέτοια ώστε $a < x_0 < b$).

(γ) Η ποσότητα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ καλείται **μέση μεταβολή** της $f(x)$ από το x_0 ως το x . Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$, η $f'(x_0)$ καλείται και **ρυθμός μεταβολής** της f στο x_0 .

(δ) Ένας ισοδύναμος ορισμός της παραγώγου είναι και ο: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

B. Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 είναι ίση με την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$



Η εξίσωση της **εφαπτομένης** της $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τη σχέση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

όπου $f'(x_0) =$ **κλίση** της εφαπτομένης.

Παρατήρηση

Η $f'(x_0) = \tan \theta$ όπου θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο x_0 με τον άξονα των x .

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ (β) $f(x) = \sin x$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x^1x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x^1x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ φορές}} = nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cdot \cos h - \cos(x_0) \cdot \sin h - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1) \sin(x_0) - \cos(x_0) \sin h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} \sin(x_0) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cos(x_0) \end{aligned}$$

Αλλά είναι γνωστό ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} = 0$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ οπότε:

$$f'(x_0) = \sin'(x_0) = -\cos(x_0)$$

■

Πρόταση 1 (κανόνες παραγώγισης)

Εάν οι συναρτήσεις $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο $x=x_0$ (εσωτερικό του διαστήματος $[a, b]$), τότε και οι συναρτήσεις $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (με $g(x_0) \neq 0$) είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x=x_0$ και ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

$$(\alpha) \text{ (αθροίσματος)} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(\beta) \text{ (διαφοράς)} \quad (f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(\gamma) \text{ (γινομένου)} \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$(\delta) \text{ (πηλίκου)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Προσοχή, στον κανόνα του πηλίκου, λόγω του $-$ που υπάρχει στον αριθμητή παίζει ρόλο η σειρά με την οποία παραγωγίζουμε.

Πρόταση 2 (κανόνας αλυσίδας ή σύνθετη παραγωγή)

Εάν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x=x_0$ (εσωτερικό του διαστήματος $[a, b]$) και η $g: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ (έστω ότι $f([a, b]) \subseteq [\gamma, \delta]$) είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 = f(x_0)$. Τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$ και ισχύει:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Γ. Ορισμός 2^{ης} παραγώγου

Η δεύτερη παράγωγος της f στο σημείο x_0 ορίζεται σαν: $f''(x_0) = (f'(x_0))'$ ή

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x_0) \right)$$

Ανάλογα ορίζεται και η $n^{\text{οστή}}$ τάξης παράγωγος:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\dots \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x_0) \right) \right) \dots \right)}_{n \text{ φορές}}$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$(\alpha) f_1(x) = 2^x e^x \quad (\beta) f_2(x) = \eta\mu(\sin^2 x) \quad (\gamma) f_3(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (\delta) f_4(x) = \varepsilon\phi x$$

Λύση

(α) Για την $f_1(x) = 2^x e^x$ (χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου):

$$f_1'(x) = (2^x e^x)' = (2^x)' e^x + 2x(e^x)' \stackrel{(a^x)' = a^x \log x}{\Rightarrow} f_1'(x) = 2^x \log x \cdot e^x + 2^x e^x$$

(β) Για την $f_2(x) = \eta\mu(\sin^2 x)$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (\eta\mu(\sin^2 x))' = \text{χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \\ &= \eta\mu'(\sin^2 x)(\sin^2 x)' = \sin(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin(\sin^2 x) \cdot \sin x \cdot \eta\mu x \end{aligned}$$

(γ) Για την $f_3(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \left(\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \right)' = \left(\left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{1/3} \right)' \stackrel{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \frac{1}{3} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{1/3-1} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \right)^2} \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \right)^2} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \dots \end{aligned}$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου, έχουμε:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= (\epsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x} \right)' = \frac{\eta\mu' x \cdot \sin x - \eta\mu x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \sin x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Μερικοί συμβολισμοί $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{a^{\mu}} = a^{\frac{\mu}{n}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

■

Εφαρμογή 3

(α) Εάν $f(x) = \eta\mu x$ να υπολογιστεί η $n^{\text{οστής}}$ τάξης παράγωγός της.

(β) Εάν $f(x) = \sin x$ να υπολογιστεί η $n^{\text{οστής}}$ τάξης παράγωγός της.

Λύση

(α) Είναι προφανές ότι:

$$f'(x) = \sin x, \quad f''(x) = -\eta\mu x, \quad f'''(x) = -\sin x, \quad f^{(4)}(x) = \eta\mu x = f(x)$$

Οπότε, μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(4n+1)}(x) = \sin x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\eta\mu x, \quad f^{(4n+3)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4n+4)}(x) = f^{(4n)}(x) = \eta\mu x$$

(β) Είναι προφανές ότι:

$$f'(x) = -\eta\mu x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = \eta\mu x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$$

Οπότε, μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(4n+1)}(x)=-\eta\mu x, \quad f^{(4n+2)}(x)=-\sigma\upsilon\nu x, \quad f^{(4n+3)}(x)=\eta\mu x, \quad f^{(4n+4)}(x)=f^{(4n)}(x)=\sigma\upsilon\nu x$$

■

Παράδειγμα

Εάν $f(x)=\eta\mu x$, να υπολογιστεί η $f^{(75)}(x)$.

Λύση

Έχουμε: $f^{(75)}(x)=f^{(4\cdot 18+3)}(x)=f^{(3)}(x)=-\sigma\upsilon\nu x$

■

Εφαρμογή 4

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχει εφαπτομένη που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{\pi^2}{8}$.

Λύση

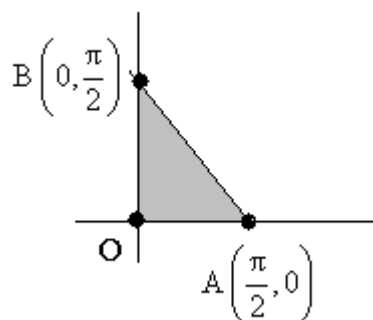
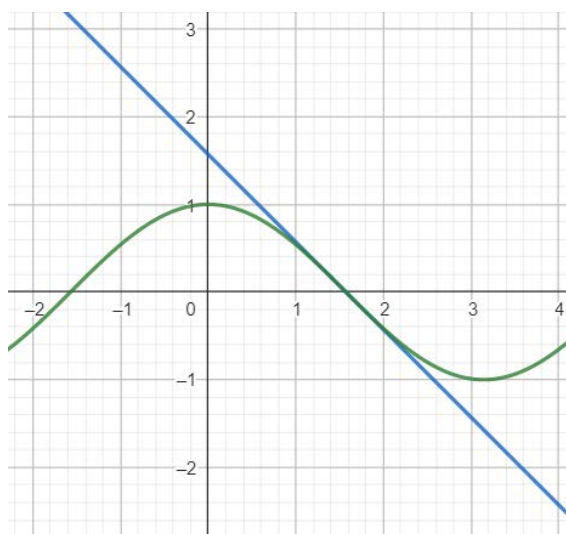
Έχουμε $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ άρα η εφαπτομένη στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχει εξίσωση :

$$y-0=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Αλλά $f'(x)=-\eta\mu x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\eta\mu \frac{\pi}{2}=-1$ και η εφαπτομένη γίνεται

$$y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-x+\frac{\pi}{2}$$

και η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Το τρίγωνο AOB που σχηματίζεται έχει εμβαδόν:

$$E_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

■

Εφαρμογή 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ax^2+\beta x+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Βρείτε τα α, β για τα οποία οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$

Λύση

Οι δύο συναρτήσεις θα πρέπει να τέμνονται στο ίδιο σημείο $x_0=1$ (περνούν από το ίδιο σημείο Α με τετμημένη $x_0=1$) δηλαδή θα ισχύει :

$$f(1)=g(1) \quad (1)$$

Αλλά

$$g(1)=\frac{1}{1}=1 \text{ άρα } f(1)=\alpha+\beta+2=1 \Rightarrow \alpha+\beta=-1 \quad (2)$$

Ακόμα, αφού οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια εφαπτομένη, θα ισχύει :

$$f'(1)=g'(1) \quad (3)$$

(γιατί $g'(x)$ = κλίση της εφαπτομένης στο σημείο x).

Αλλά

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} \text{ και } g'(1)=-1$$

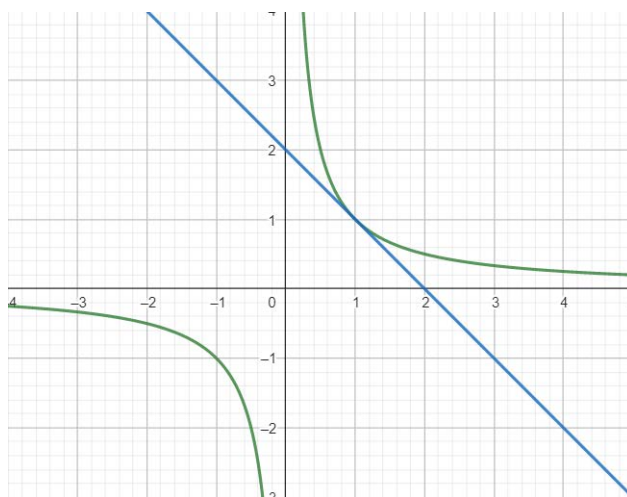
$$f'(x)=(\alpha \cdot x^2+\beta \cdot x+2)'=2\alpha x+\beta \text{ και } f'(1)=2\alpha+\beta=-1 \quad (4)$$

Αφαιρώντας τη σχέση (2) από τη σχέση (4) έχουμε :

$$2\alpha+\beta-\alpha-\beta=-1-(-1) \Rightarrow \alpha=0 \text{ άρα } (2) \Rightarrow \beta=-1$$

Δηλαδή

$$y=f(x)=-x+2$$



Παρατήρηση

Αποδείξτε ότι η $y=f(x)=-x+2$ είναι η εφαπτομένη της $g(x)=\frac{1}{x}$ στο σημείο $x_0=1$ (και έτσι η f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$).

■

Γ. Συνέχεια και παραγωγισιμότητα**Πρόταση**

Εάν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο $x=x_0$.

Παρατήρηση

(1) Εάν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x=x_0$, τότε δεν έπεται (απαραίτητα) ότι είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$.

Π.χ η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο σημείο $x=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Πράγματι:

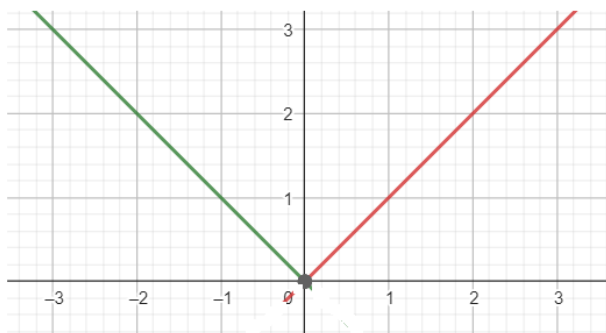
Η συνάρτηση γράφεται ισοδύναμα σαν $f(x)=|x|=\begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ γιατί:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη όμως στο σημείο $x=0$, γιατί:

$$\left. \begin{array}{l} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow \nexists f'(0)$$



Το παράδειγμα μας δείχνει ακόμα ότι μπορεί να υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι μιας συνάρτησης σε ένα σημείο αλλά, να μην υπάρχει η παράγωγός της συνάρτησης στο σημείο.

Γενικότερα, αν το γράφημα μιας συνάρτησης παρουσιάζει «γωνίες» σε μερικά σημεία, τότε στα σημεία αυτά δεν υπάρχει η παράγωγός της.

(2) Αν όμως, η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **δεν** είναι συνεχής σε ένα σημείο $x=x_0$, τότε έπεται ότι **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$.

Εφαρμογή 6

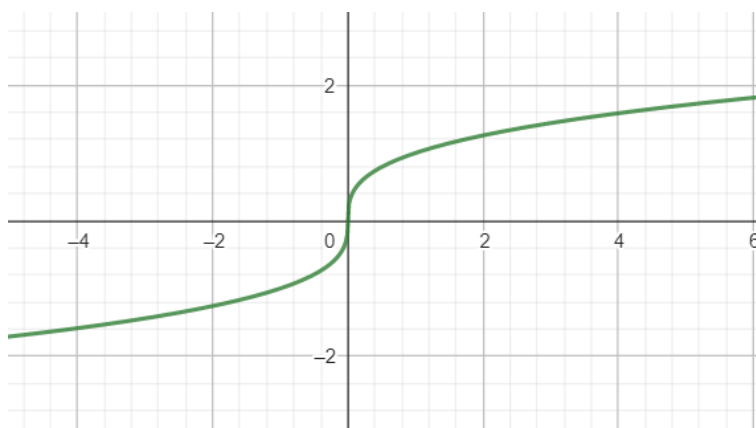
Εάν $f(x) = \sqrt[3]{x}$ να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.



■

Παρατήρηση

(I) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

(II) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η εφαπτομένη του γραφήματος της $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι η κατακόρυφος ευθεία $x = 0$.

Εφαρμογή 7

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \lambda^2 x, & x < 1 \\ 5x + \lambda - 4, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι:

(α) Συνεχής στο 1.

(β) Παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση

(α) Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο σημείο 1 πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - \lambda^2 x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + \lambda - 4) = f(1)$$

ή ισοδύναμα:

$$3 - \lambda^2 = 5 + \lambda - 4$$

Από τη τελευταία προκύπτει:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

οπότε $\lambda = -2$ ή $\lambda = 1$.

- (β) Επειδή για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο αυτό, θα εξετάσουμε την f για εκείνα τα λ για τα οποία είναι συνεχής στο σημείο $x=1$, δηλαδή (λόγω του αποτελέσματος του (α)) για $\lambda = -2$ και $\lambda = 1$.

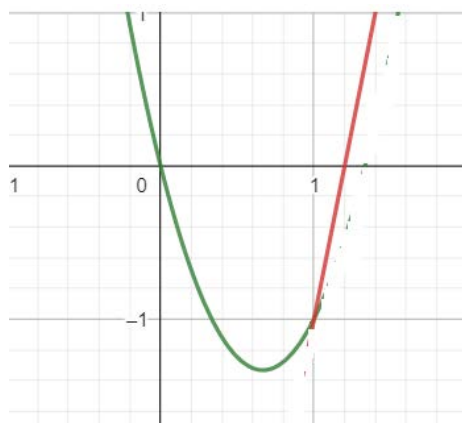
- (i) Για $\lambda = -2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[3x^2 - (-2)^2 x] - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(5x - 2 - 4) - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 5}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x-1)}{x-1} = 5 \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, οπότε η συνάρτηση f για $\lambda = -2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.



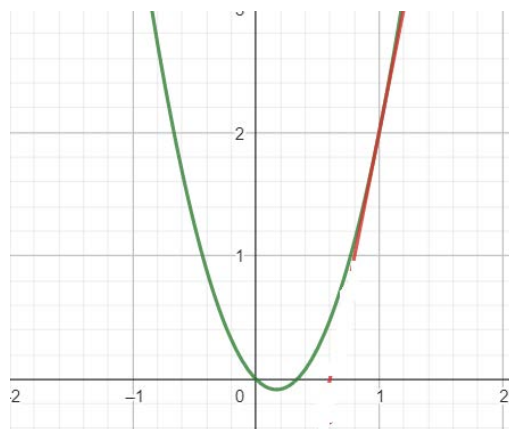
- (ii) Για $\lambda = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3x^2 - x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+2) = 5 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(5x + 1 - 4) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - 5}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5\end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, οπότε η συνάρτηση f για $\lambda = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.



■

Δ. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Τότε:

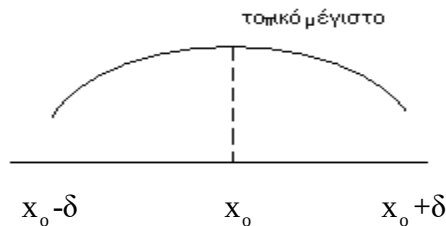
- Αν $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
- Αν $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Ε. ΣΤΑΣΙΜΑ, ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ, ΜΕΓΙΣΤΑ, ΕΛΑΧΙΣΤΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ

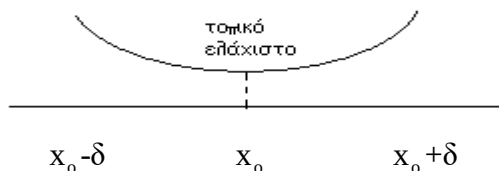
Έστω ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Τότε:

Ορισμός

1. Αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, το x_0 καλείται **στάσιμο** σημείο της f .
2. Αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι είτε στάσιμο σημείο είτε δεν υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε το x_0 καλείται **κριτικό** σημείο της f .
3. Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x_0) \geq f(x)$ τότε το x_0 καλείται **τοπικό μέγιστο** της f .



4. Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x_0) \leq f(x)$ τότε το x_0 καλείται **τοπικό ελάχιστο** της f .



5. Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f . καλούνται **τοπικά ακρότατα**.

Ζ. Θεώρημα (Fermat)

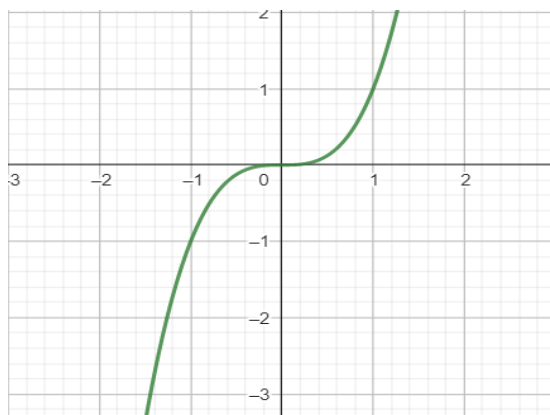
Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in (a, b)$, τότε $f'(x_0) = 0$.

Παρατήρηση

Αν $f'(x_0) = 0$ **δεν** συνεπάγεται (απαραίτητα) ότι το x_0 είναι σημείο ακρότατου.

Παράδειγμα

Εάν $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ και το σημείο $x=0$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο.



Η. Εύρεση Ακρότατων (κριτήριο 2^{ης} Παραγώγου)

Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ (δηλαδή το x_0 είναι στάσιμο σημείο)

- αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0 ίσο με το $f(x_0)$
- αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0 ίσο με το $f(x_0)$.

Θ. ΚΟΙΛΗ-ΚΥΡΤΗ ΚΑΜΠΥΛΗ

Θεώρημα 1

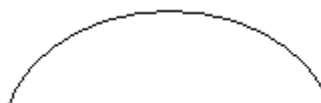
Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε:

- αν $f''(x_0) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι **κυρτή** στο $[\alpha, \beta]$ (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω)



κυρτή συνάρτηση

- αν $f''(x_0) < 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f είναι **κοίλη** στο $[\alpha, \beta]$ (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω)

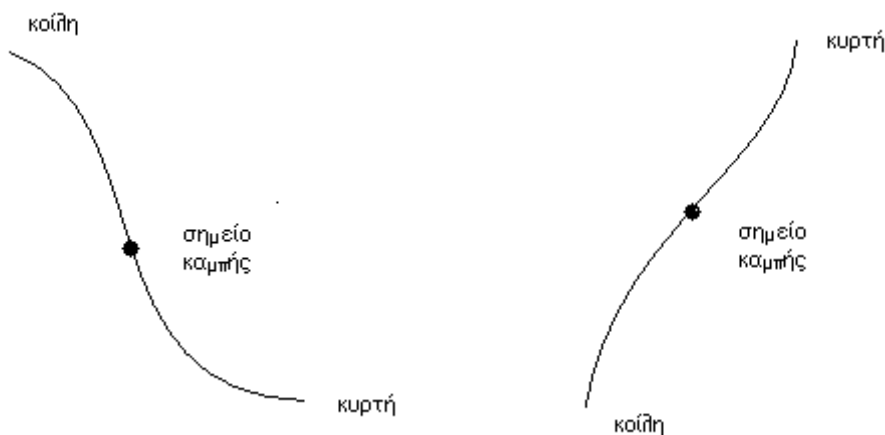


κοίλη συνάρτηση

Ι. Σημείο καμπής

Ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καλείται **σημείο καμπής** της f αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω :

1. δεν υπάρχει η $f''(x_0)$
2. η f είναι κυρτή στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και κοίλη στο διάστημα $[x_0, \beta)$ ή αντίστροφα



Θεώρημα 2

Αν $\exists f''(x_0)$ και το $x_0 = \text{σημείο καμπής} \Rightarrow f''(x_0) = 0$

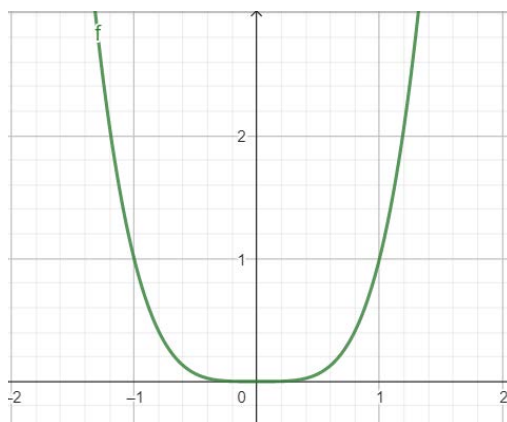
Παρατήρηση

(α) Από το θεώρημα γίνεται φανερό ότι τα **σημεία καμπής** της $f(x)$ βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες της $f''(x_0) = 0$.

(β) Εάν $f''(x_0) = 0$ τότε **δεν** συνεπάγεται ότι το x_0 είναι (απαραίτητα) σημείο καμπής.

Παράδειγμα

Εάν $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'(0)=f''(0)=0$ και το σημείο $x=0$ δεν είναι σημείο καμπής (η συνάρτηση είναι κυρτή δεξιά και αριστερά του 0).



■

Εφαρμογή 8

Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, καμπυλότητας και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)=x^4-2x^2$.

Λύση

Έχουμε $f(0)=0$, $f(-1)=-1=f(1)$, ενώ η $f(x)$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $x^4-2x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, x=\sqrt{2} \text{ \& } x=-\sqrt{2}$. Επίσης η $f(x)$ είναι **άρτια** δηλαδή $f(x)=f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το γράφημα της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y .

Ακόμα έχουμε $f'(x)=(x^4-2x^2)' = 4x^3-4x=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$					
		τοπικό ελάχιστο	τοπικό μέγιστο	τοπικό ελάχιστο	

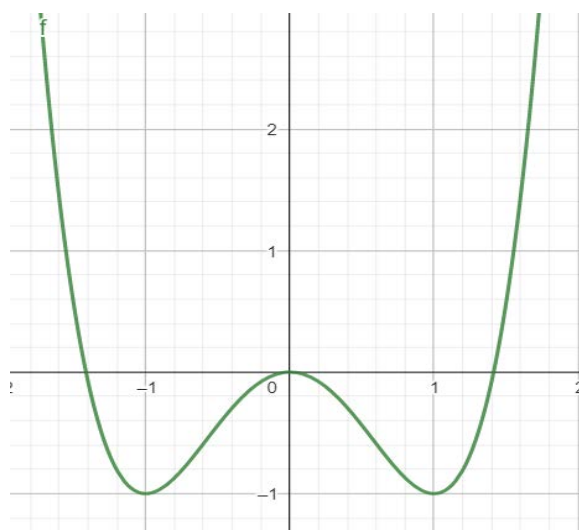
Άρα η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x=0$ και τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x=1$ και $x=-1$.

$$\text{Ακόμα } f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ή } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	
$f(x)$				
	σημείο καμπής	σημείο καμπής		

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα σημεία $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ είναι σημεία καμπής.



Εφαρμογή 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 3 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (επομένως και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνμική, με παράγωγο:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

Επίσης είναι $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Άρα η συνάρτηση θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Επομένως θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = -1$, ίσο με το:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 - \lambda = 5 - \lambda$$

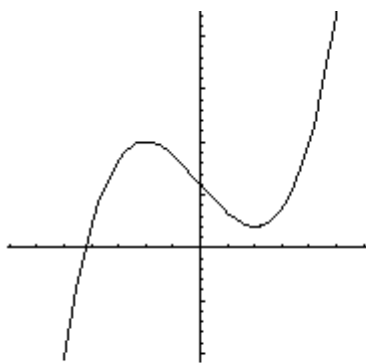
και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 1$, ίσο με το:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 - \lambda = 1 - \lambda$$

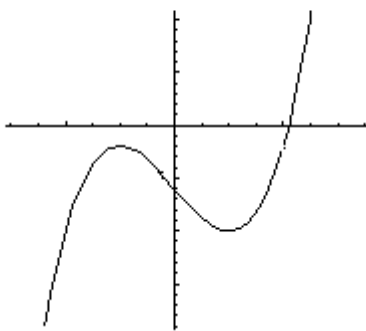
(β) Η συνάρτηση που μας δίνεται είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού. Επομένως μπορεί να έχει:

- (I) μια ακριβώς πραγματική ρίζα και δύο μιγαδικές, γιατί είναι γνωστό ότι εάν μια εξίσωση έχει σαν ρίζα έναν μιγαδικό αριθμό, τότε έχει σαν ρίζα και τον συζυγή του (σχήματα 1,2) είτε
- (II) δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, μία απλή και μία διπλή (τρεις πραγματικές δηλαδή) (σχήματα 3,4), είτε
- (III) τρεις, διαφορετικές ανά δύο, πραγματικές ρίζες (σχήματα 5,6).

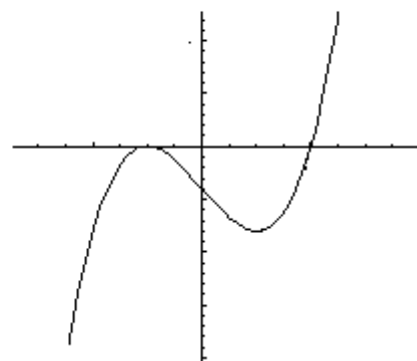
Χρησιμοποιώντας λοιπόν το γεγονός αυτό και τα συμπεράσματα του (α) ερωτήματος (δηλαδή το ότι στο σημείο $x = 1$ έχουμε μέγιστο και στο σημείο $x = -1$ ελάχιστο), μπορούμε να πούμε ότι το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ έχει μια από τις παρακάτω μορφές:



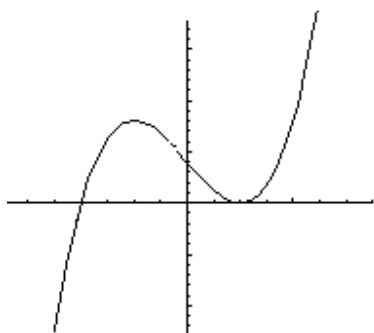
Σχήμα 1



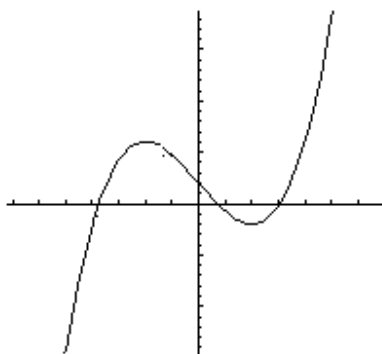
Σχήμα 2



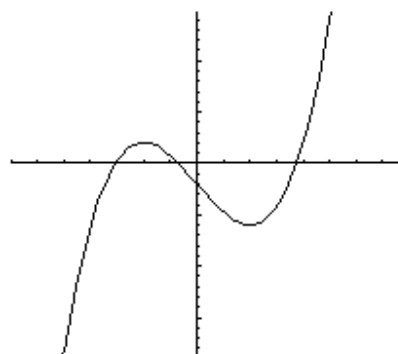
Σχήμα 3



Σχήμα 4



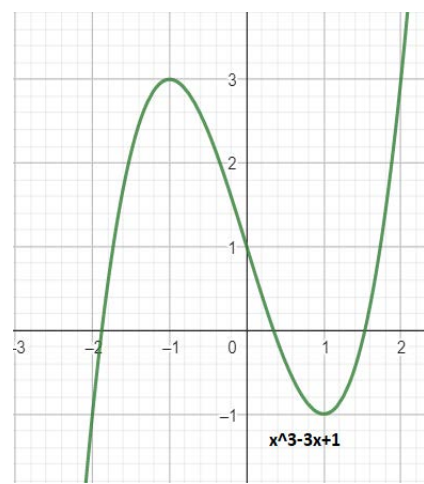
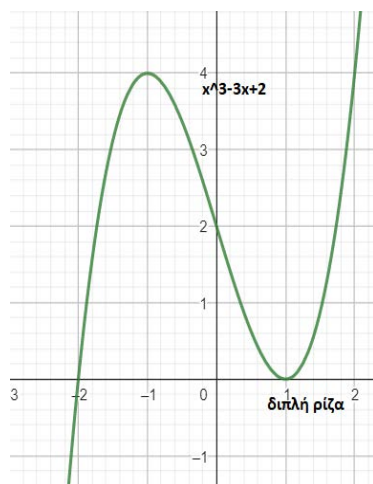
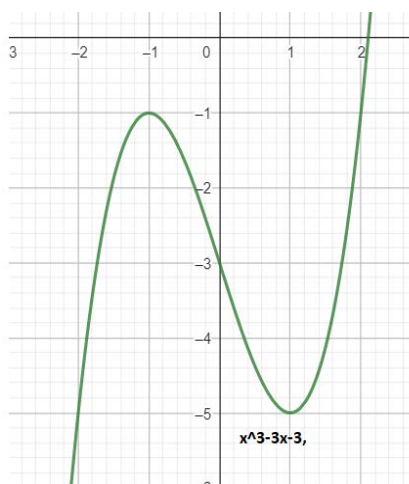
Σχήμα 5



Σχήμα 6

Θα εξετάσουμε λοιπόν το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία $x=1$ και $x=-1$, δηλαδή το πρόσημο των $f(-1)=5-\lambda$ & $f(1)=1-\lambda$.

- Αν $(5-\lambda < 0 \text{ και } 1-\lambda < 0)$ ή $(5-\lambda > 0 \text{ και } 1-\lambda > 0)$, δηλαδή αν $\lambda < 1$ ή $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα (δείτε σχήματα 1 και 2).
- Αν $5-\lambda = 0$ ή $1-\lambda = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 5$ ή $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Στην πραγματικότητα έχει τρεις πραγματικές ρίζες δύο από τις οποίες είναι ίσες, δηλαδή διπλή ρίζα (δείτε σχήματα 3 και 4).
- Αν $5-\lambda > 0$ και $1-\lambda < 0$, δηλαδή αν $1 < \lambda < 5$ η εξίσωση έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες (σχήματα 5 και 6).



■

Κ. Συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα, μέγιστο & ελάχιστο

Θεώρημα 3

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε η f έχει πάντα (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο στο $[a,b]$.

Το μέγιστο, ελάχιστο είναι είτε σε ένα από τα στάσιμα σημεία (δηλαδή τις ρίζες της $f'(x)=0$) είτε στα άκρα του διαστήματος.

Βρίσκουμε λοιπόν τις τιμές της $f(x)$ στα στάσιμα σημεία και τα άκρα του διαστήματος. Η μεγαλύτερη τιμή από αυτές είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο

Εφαρμογή 10

Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο (ολικά) της συνάρτησης $f(x)=2x^3-15x^2+36x$ στο κλειστό διάστημα $[1, 5]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 5]$, άρα έχει οπωσδήποτε (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο τα οποία είναι είτε ακρότατα είτε τα άκρα του διαστήματος $[1, 5]$.

Για τα ακρότατα:

$$f'(x) = (2x^3 - 15x^2 + 36x)' = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=3$$

Υπολογίζοντας τις τιμές της $f(x)$ στα σημεία 2 και 3 καθώς και στα άκρα του διαστήματος 1 και 5, έχουμε:

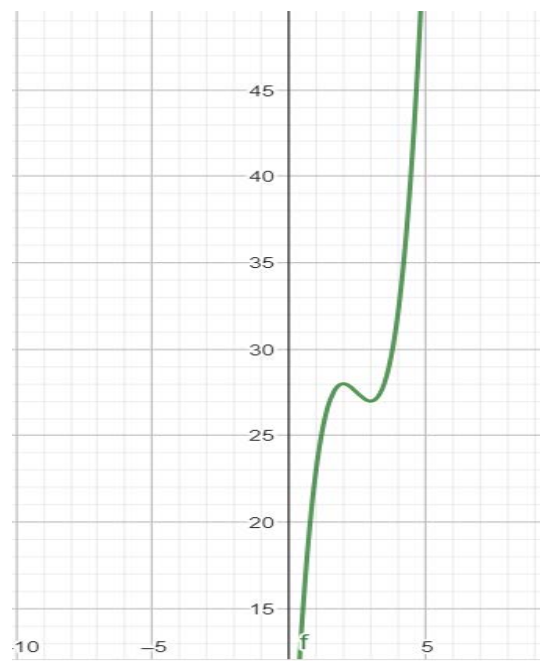
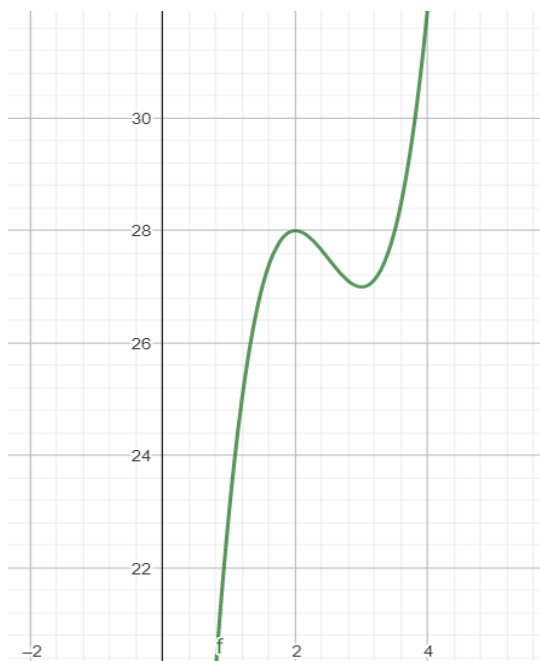
$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 23$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 28$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 = 27$$

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 = 55$$

Η μέγιστη τιμή είναι 55 που συμβαίνει στο σημείο $x=5$ και η ελάχιστη τιμή είναι 23 που συμβαίνει στο σημείο $x=1$. Άρα έχουμε μέγιστο στο σημείο 5 (άκρο διαστήματος) και ελάχιστο στο σημείο 1 (άκρο διαστήματος).



■

7. Έμμεση παραγωγή

Πολλές φορές μια άγνωστη συνάρτηση $y=y(x)$ συνδέεται με τη μεταβλητή (της) μέσω μιάς εξίσωσης της μορφής $F(x, y(x))=0$ (**πεπλεγμένη μορφή**). Και στην περίπτωση αυτή θα θέλαμε να υπολογίσουμε την παράγωγο $y'=y'(x)$. Η προσέγγιση στο πρόβλημα είναι η εξής;

- (α) Προσπαθούμε να επιλύσουμε την εξίσωση $F(x, y(x))=0$ ως προς την $y=y(x)$ και κατόπιν να υπολογίσουμε την $y'=y'(x)$ κατά τα γνωστά. Υπάρχει θεώρημα, το λεγόμενο **θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων**, που παρέχει συνθήκες κάτω από τις οποίες μιά τέτοια επίλυση είναι δυνατή (**λυμένη μορφή**).
- (β) Σε αρκετές περιπτώσεις (π.χ όταν $\ln(xy) - e^{x+y} + y^2 = 5$), οι συνθήκες του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων δεν ικανοποιούνται και η $y=y(x)$ δεν μπορεί να βρεθεί σε μιά λυμένη μορφή (δηλαδή η $F(x, y(x))=0$ δεν μπορεί να λυθεί άμεσα ως προς $y=y(x)$). Σε αυτή την περίπτωση παραγωγίζουμε τη σχέση $F(x, y(x))=0$ (**έμμεση παραγωγή**), θεωρώντας ότι η συνάρτηση και $y=y(x)$ είναι συνάρτηση του x και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας. Ελπίζουμε, η σχέση που παίρνουμε με την $y'=y'(x)$ να μπορεί να επιλυθεί για την $y'=y'(x)$.

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=y(x)$ που ικανοποιεί τη σχέση $x^2+xy+y^5=3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα της $y=y(x)$, στο σημείο $(1,1)$

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα της $y=y(x)$, στο σημείο $(1,1)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y - y(1) = y'(x)(x-1)$$

Αλλά, παραγωγίζοντας έμμεσα τη σχέση $x^2+xy+y^5=3$, έχουμε:

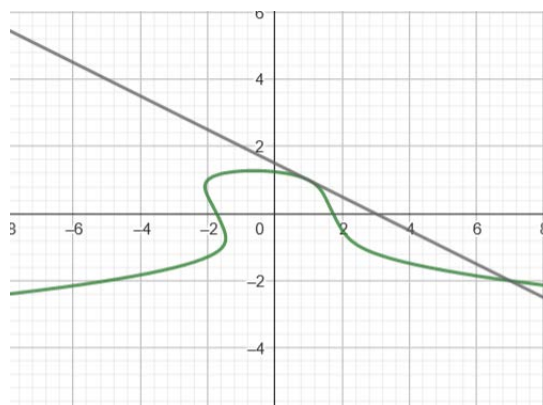
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2+xy+y^5) &= \frac{d}{dx}(3) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^5) = 0 \Rightarrow \\ 2x+y+x \frac{dy}{dx} + 5y^4 \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow (x+5y^4) \frac{dy}{dx} = -2x-y \Rightarrow \\ y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) &= -\frac{2x+y}{x+5y^4} \end{aligned}$$

οπότε:

$$y'(1) = -\frac{2 \cdot 1 + y(1)}{1 + 5y^4(1)} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 5 \cdot 1} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Εφαρμογή 2

Βρείτε την κλίση του γραφήματος της $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ στο σημείο (3,1).

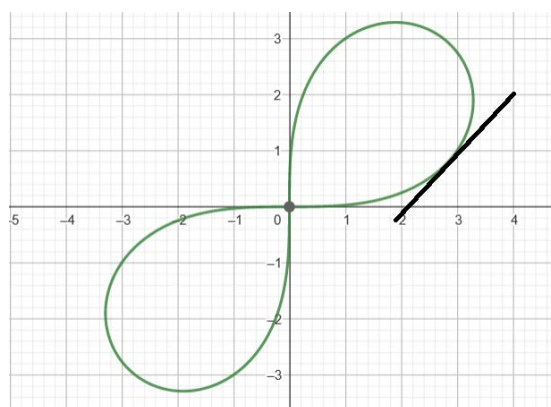
Λύση

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης $3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3(x^2+y^2)^2) &= \frac{d}{dx}(100xy) = 100y + 100x \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ 2 \cdot 3(x^2+y^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+y^2) &= 100y + 100x \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ 6(x^2+y^2) \cdot \left(2x + 2y \frac{dy}{dx}\right) &= 100y + 100x \frac{dy}{dx} \\ 3(x^2+y^2) \cdot \left(x + y \frac{dy}{dx}\right) &= 25y + 25x \frac{dy}{dx} \\ y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) &= \frac{25y - 3x(x^2+y^2)}{3y(x^2+y^2) - 25x}\end{aligned}$$

Τελικά, η ζητούμενη κλίση είναι η:

$$y'(3) = \frac{25 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 1^2)}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 1^2) - 25 \cdot 3} = \frac{25 - 90}{30 - 75} = \frac{13}{9} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Εφαρμογή 3

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$, στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Λύση

1^{ος} τρόπος (έμμεση παραγωγή)

Η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$, στο σημείο $M(x_1, y_1)$, δίνεται από τη σχέση:

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$$

Αλλά, παραγωγίζοντας έμμεσα τη σχέση $x^2+y^2=\rho^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2+y^2) &= \frac{d}{dx}(\rho^2) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'(x_1) = -\frac{x_1}{y_1}\end{aligned}$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 = \rho^2$$

Δηλαδή $yy_1 + xx_1 = y_1^2 + x_1^2 = \rho^2$ ή ισοδύναμα $yy_1 + xx_1 = \rho^2$

2^{ος} τρόπος (λυμένη μορφή).

Ας υποθέσουμε ότι το σημείο $M(x_1, y_1)$ βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο ($y(x) > 0$).

Θα μπορούσαμε να λύσουμε τη σχέση $x^2+y^2=\rho^2$ ως προς $y(x)$. Πράγματι:

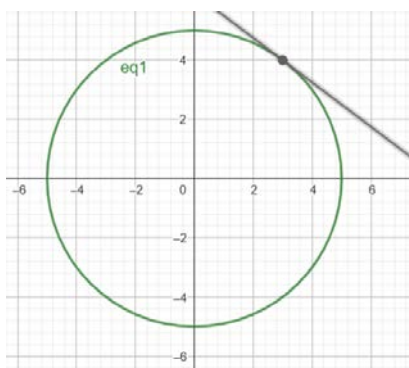
$x^2+y^2=\rho^2 \Rightarrow y^2=\rho^2-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{\rho^2-x^2}$, και η παράγωγος της δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}y' &= \left(\sqrt{\rho^2-x^2}\right)' = \left(\left(\sqrt{\rho^2-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\rho^2-x^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\right) \frac{d}{dx}(\rho^2-x^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\end{aligned}$$

οπότε

$$y'(x_1) = -\frac{x_1}{\sqrt{\rho^2-x_1^2}} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Κατόπιν συνεχίζουμε όπως στον 1^ο τρόπο.



Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, στο γράφημα του κύκλου $x^2 + y^2 = 5^2$, στο σημείο $M(3, 4)$.

Λύση

Με τη βοήθεια των παραπάνω έχουμε ότι, η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι η:

$$4y + 3x = 5^2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

■

Ρυθμός μεταβολής

Ορισμός

Εάν δύο (μεταβλητά) μεγέθη x, y συνδεόνται με μια σχέση της μορφής $y=f(x)$ και η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε η παράγωγος:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 .

Εφαρμογή 4

Μιά σφαιρική μπάλα πάγου αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της r που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$ με t σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$ sec.

Λύση

(I) (εμβαδόν επιφάνειας). Το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας ακτίνας r , δίνεται από τη σχέση

$$E = E(t) = 4\pi r^2 = 4\pi r^2(t)$$

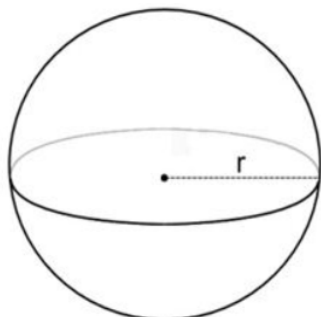
Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} (4\pi r^2) = 4 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot r(t) \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\text{Αλλά } \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (4 - t^2) = -2t \text{ οπότε } \frac{dr}{dt}(1) = -2 \cdot 1 = -2.$$

Τελικά;

$$\frac{d}{dt} E(1) = 8\pi \cdot r(t) \frac{dr(t)}{dt} = 8\pi \cdot (4 - 1^2) (-2) = -48\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$



(II) (όγκος μπάλας). Ο όγκος σφαίρας ακτίνας r , δίνεται από τη σχέση

$$V=V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής του όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt}V=\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3\cdot r^2\frac{dr}{dt}=4\pi\cdot r^2(t)\frac{dr(t)}{dt}$$

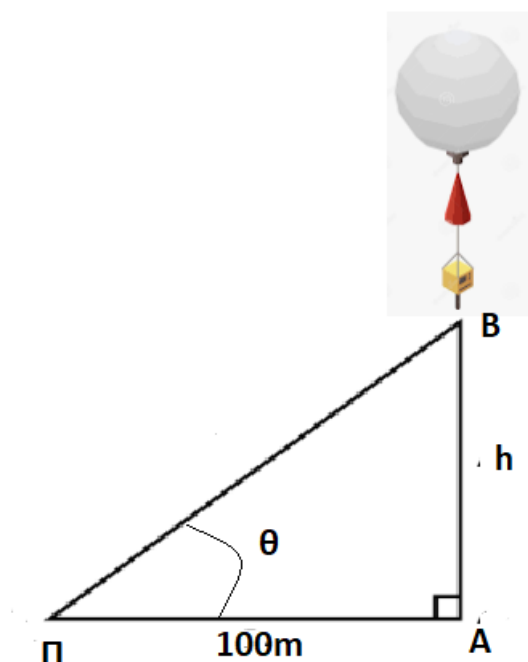
Τελικά

$$\frac{d}{dt}V(1)=4\pi\cdot r^2(t)\frac{dr(t)}{dt}=4\pi\cdot (4-1^2)^2(-2)=-72\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$$

■

Εφαρμογή 5

Ένα μετεωρολογικό μπαλόνι (στη θέση B) αφήνει το έδαφος, σε απόσταση 100m από παρατηρητή Π, με ταχύτητα $50\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Με ποιό ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΒΠ με το έδαφος, τη στιγμή που το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



Λύση

Εάν $\theta=\theta(t)$ η ζητούμενη γωνία, τότε $\epsilon\phi\theta(t)=\frac{h(t)}{100}$ όπου $h(t)$ η απόσταση του μπαλονιού από το έδαφος. Αλλά τότε:

$$(\epsilon\phi\theta(t))'=\frac{h'(t)}{100}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2\theta(t)}\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{h'(t)}{100}\Rightarrow\frac{d\theta(t)}{dt}=\sin^2\theta(t)\cdot\frac{h'(t)}{100}$$

Αλλά τη χρονική στιγμή $t_0=1$ που το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m, έχουμε:

$$h'(t_0)=50\frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ και } \sin\theta(t_0)=\frac{\text{ΠΑ}}{\text{ΠΒ}}=\frac{100}{\sqrt{100^2+100^2}}=\frac{100}{100\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\theta(t_0)=45^\circ)$$

Τελικά, ο ρυθμός που αυξάνεται η γωνία θ , είναι ίσος με:

$$\frac{d\theta(t_0)}{dt} = \sin^2\theta(t_0) \cdot \frac{h'(t_0)}{100} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{50}{100} = \frac{1}{4} \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

■

Εφαρμογή 6

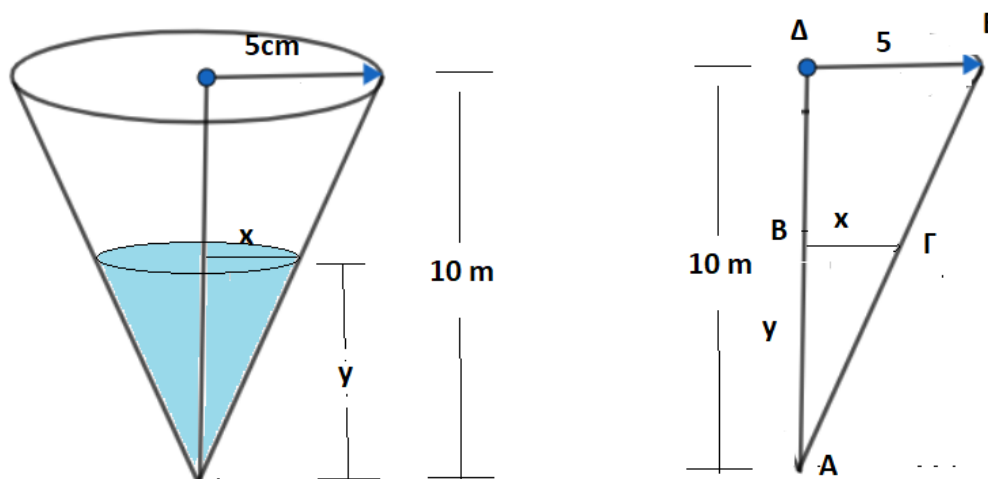
Στην κωνική δεξαμενή του παρακάτω σχήματος τρέχει νερό με ταχύτητα $50 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$.

Πόσο γρήγορα ανέρχεται το ύψος του νερού, τη στιγμή που το νερό έχει ύψος 6m.

Λύση

Εάν $V=V(t)$ είναι ό όγκος του νερού, $x(t)$ η ακτίνα του κύκλου της επιφάνειας του νερού (τη χρονική στιγμή t) και $y(t)$ το ύψος του νερού της χρονική στιγμή t , τότε:

$$V=V(t)=\frac{1}{3}\pi x^2(t) \cdot y(t)$$



Αλλά τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια, οπότε έχουμε:

$$\frac{AB}{AA} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Rightarrow \frac{y(t)}{10} = \frac{x(t)}{5} \Rightarrow x(t) = \frac{y(t)}{2}$$

Επομένως

$$V=V(t)=\frac{1}{3}\pi x^2(t) \cdot y(t)=\frac{1}{3}\pi \left(\frac{y(t)}{2}\right)^2 \cdot y(t)=\frac{1}{12}\pi y^3(t)$$

Και

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi y^3(t)\right) = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot 3 \cdot y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}\pi \cdot y^2 \frac{dy}{dt}$$

Αλλά: $\frac{dV(t)}{dt} = 2$, $y = 6$ οπότε

$$2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2}{9\pi} \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

■

8. Θεώρημα L' Hopital

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$

1. Μορφή $\frac{0}{0}$

Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\alpha = \pm\infty$ και $\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\alpha = \pm\infty$ και $\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παρατήρηση

Άλλες απροσδιόριστες μορφές, με κατάλληλους μετασχηματισμούς, μπορούν να καταλήξουν στις μορφές $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Ο παρακάτω πίνακας δίνει μερικές τέτοιες μορφές και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.

Απροσδιόριστη Μορφή	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	0^0	1^∞	∞^0
Συναρτήσεις	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) - g(x)$	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$
Μετατροπή	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ Μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{1}{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}$ $\frac{1}{fg}$	$e^{\ln f(x) \cdot g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ $g(x) \cdot \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$		

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν τα όρια

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x^\mu - 1} \quad v, \mu \in \mathbb{N}^* \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + \ln x}$$

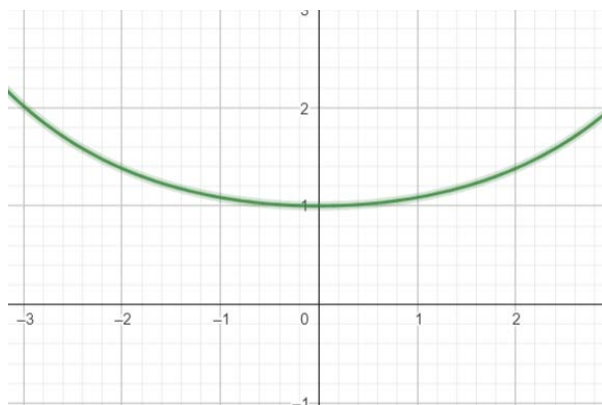
Λύση

(α) Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x^\mu - 1}$ $v, \mu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v - 1}{x^\mu - 1} \underset{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^v - 1)'}{(x^\mu - 1)'} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{vx^{v-1}}{\mu x^{\mu-1}} = \frac{v}{\mu}$$

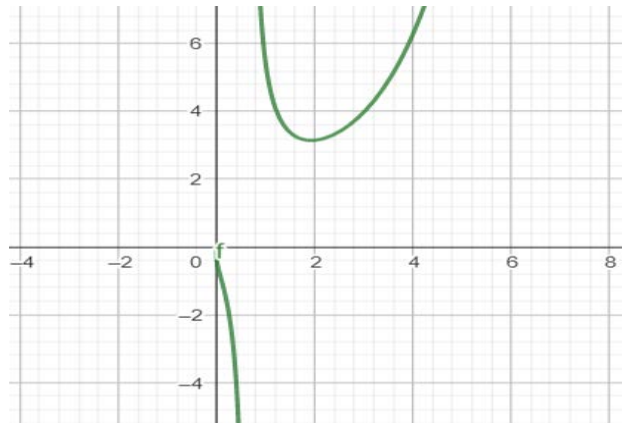
(β) Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} &\underset{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \underset{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \\ &\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$



(γ) Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + \ln x}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + \ln x} &\underset{\text{μορφή } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2e^x)'}{(x^2 + \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2x + \frac{1}{x}} \underset{\text{μορφή } \frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2e^x)'}{2 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)'} = +\infty \end{aligned}$$



■

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν τα όρια

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

Λύση

(α) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x}$ είναι της απροσδιόριστης μορφής ∞^0 .

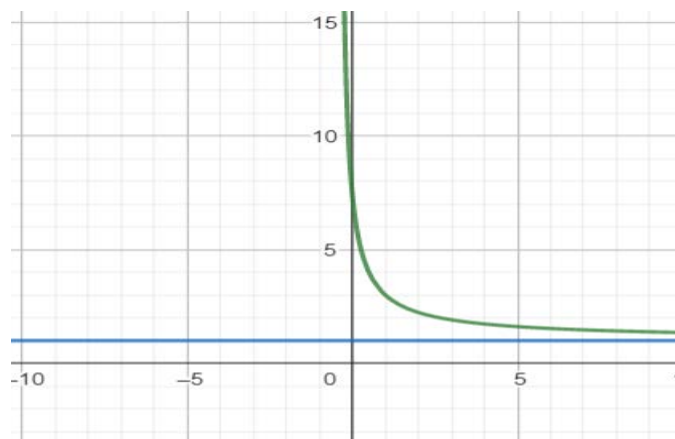
Είναι γνωστό ότι $x = e^{\ln x}$ και $\ln x^a = a \ln x$ άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(1+2x)^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}}$$

Επειδή:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1+2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} \quad \begin{array}{l} \text{μορφή } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital} \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+2x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^0 = 1$



(β) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ είναι της απροσδιόριστης μορφής $\infty - \infty$

Αφαιρούμε τα κλάσματα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - e^x + 1)'}{(xe^x - x)'} \stackrel{\text{χρήση L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(2+x)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Εφαρμογή 3

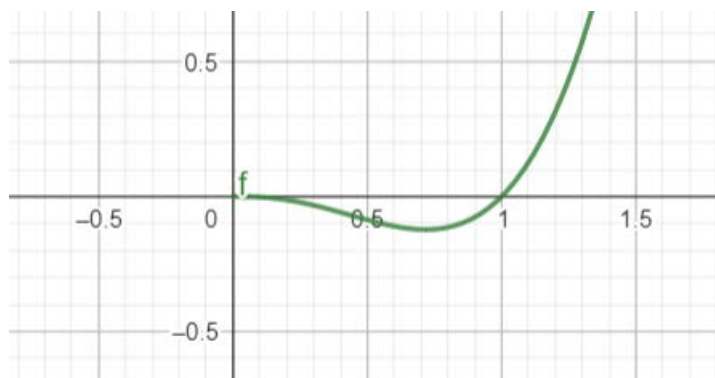
Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$, (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x)$, (γ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{x-1}$

Λύση

(α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, έχουμε απροσδιόριστη μορφή (α.μ.) $0 \cdot (-\infty)$. Το όριο μπορεί να γραφεί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} \stackrel{\text{χρήση L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^3}{3} \right) = 0$$



(β) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$ (γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$). Το

1^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \right)$$

$$\text{Αλλά: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

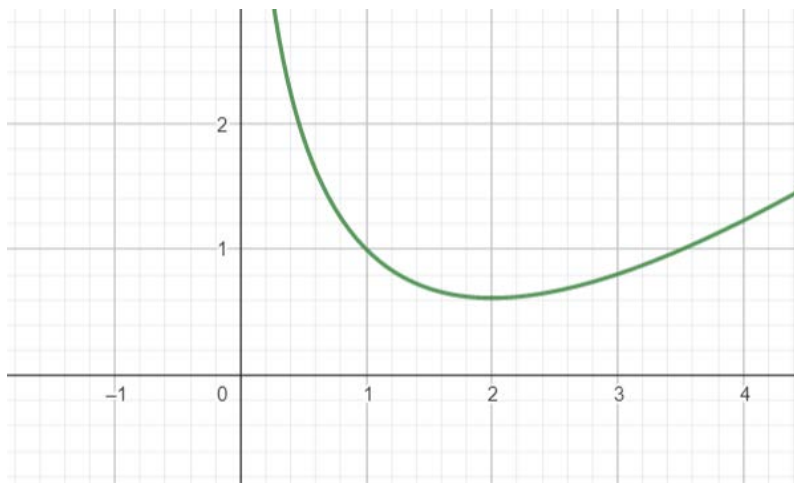
$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = +\infty$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Βγάζοντας κοινό παράγοντα το } x: \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) \right\}. \text{ Αλλά}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{Τελικά: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$



(γ) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή 0^0 . Το όριο:

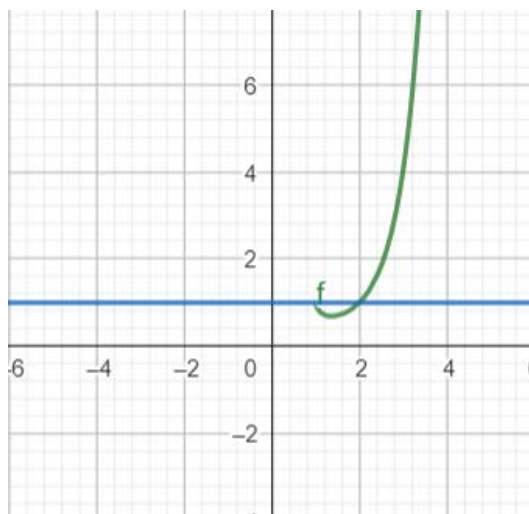
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\ln(x-1)^{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)^{x-1}}$$

Αλλά:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{(x-1) \ln(x-1)\} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty} \\ \text{χρήση L'Hospital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 \ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{x-1} \right)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{-(x-1)\} = 0$$

οπότε: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)^{x-1}} = e^0 = 1.$



■

Ασύμπτωτες

Ορισμός

(α) Μία ευθεία $x=x_0$ καλείται **κατακόρυφος ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

δηλαδή καθώς πλησιάζουμε το x_0 από δεξιά ή αριστερά το όριο της $y=f(x)$ είναι $\pm\infty$.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση $y=f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή (κλάσμα) οι κατακόρυφες ασύμπτωτοι συμβαίνουν στα σημεία που μηδενίζουν τον παρανομαστή $Q(x)$.

(β) Η ευθεία $y=y_0$ καλείται **οριζόντια ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

(γ) Η ευθεία $y=ax+\beta$, $a \neq 0$ καλείται **πλάγια ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+\beta)) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+\beta)) = 0$$

Παρατήρηση

(i) Η ευθεία $y=ax+\beta$, $a \neq 0$ είναι **πλάγια ασύμπτωτος** του γραφήματος της $y=f(x)$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$$

- (ii) Το γράφημα της $y=f(x)$ έχει πλάγια ασύμπτωτο, εάν $f(x)$ η είναι πολυωνυμική και ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος κατά ένα από τον βαθμό του παρονομαστή

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν οι οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f_1(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

$$(\beta) f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}$$

Λύση

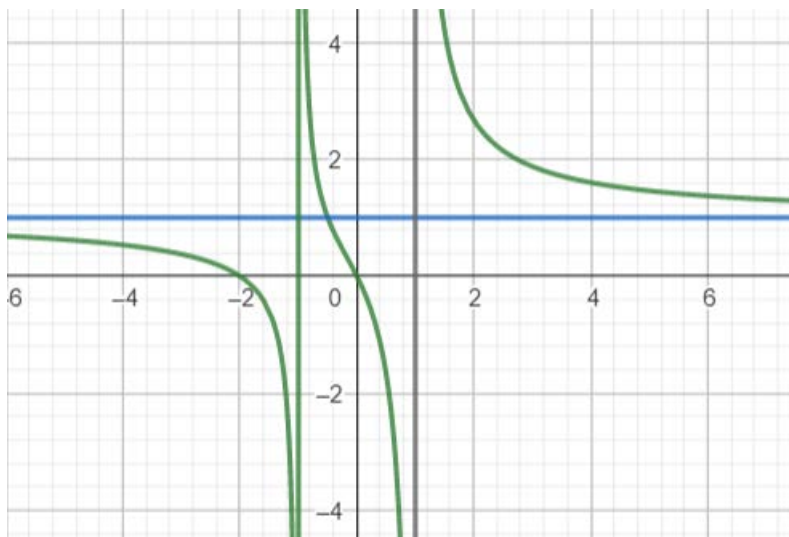
$$\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$$

άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος. Ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = +\infty = \lim_{x \rightarrow -1^-} f_1(x) \quad (x^2 - 1 > 0)$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = -\infty = \lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) \quad (x^2 - 1 < 0)$$

άρα οι $x=1$, $x=-1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτοι.

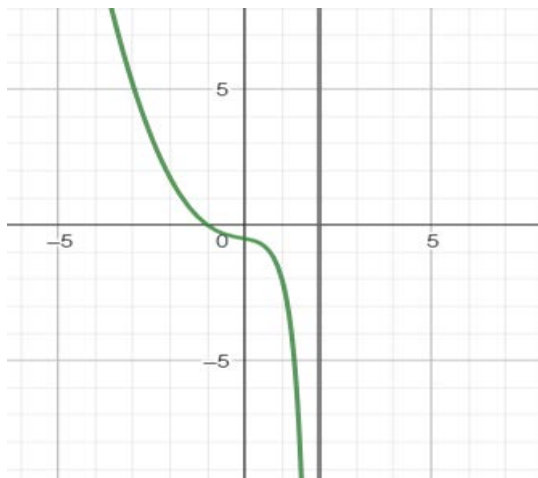


$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 2} = +\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτοι. Ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3+1}{x-2} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3+1}{x-2} = -\infty$$

άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος



■

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν οι οριζόντιες, κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτοι της : $f_3(x) = \frac{3x^2+1}{4x-8}$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{4x-8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4} = +\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+1}{4x-8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{4} = -\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτοι. Ακόμα

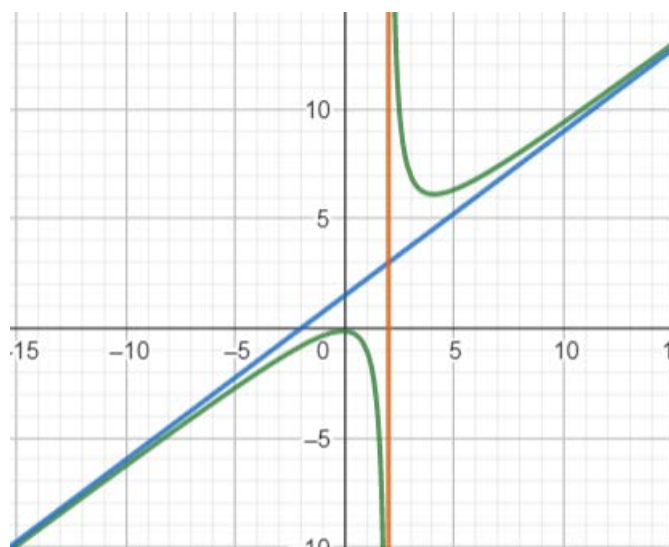
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2+1}{4x-8} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+1}{4x-8} = -\infty$$

άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος

$$\text{Τέλος, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2+1}{4x-8}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+1}{4x^2-8x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4} \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f_3(x) - \frac{3}{4}x \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2+1}{4x-8} - \frac{3}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{12x^2+4-12x^2+24x}{4(4x-8)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1+6x}{4x-8} \right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \beta \end{aligned}$$

Άρα, η ευθεία $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτος του γραφήματος της $f_3(x) = \frac{3x^2 + 1}{4x - 8}$



■

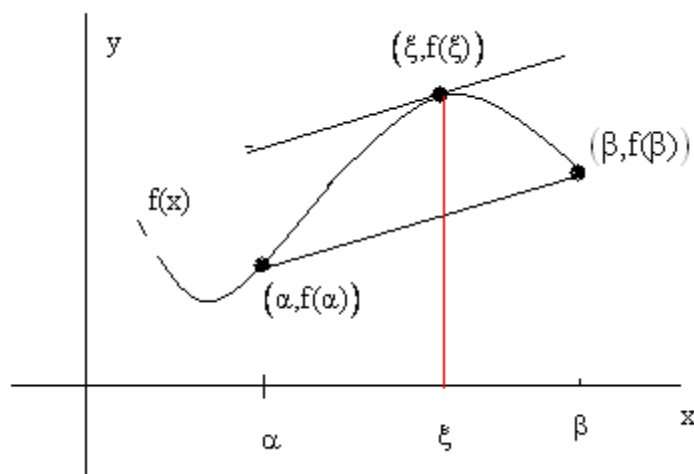
9. Θεώρημα Μέσης Τιμής, Θεώρημα Rolle και εφαρμογές τους

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
- (β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)

Τότε υπάρχει ένα σημείο $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Εάν θεωρήσουμε τα σημεία $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ τότε, το Θεώρημα Μέσης Τιμής μας αναφέρει ότι, υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία που περνά από τα σημεία A, B (η ευθεία που περνά από τα A, B έχει ως γνωστόν κλίση ίση με $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$).

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που το $f(a) = f(b)$, έχουμε την (ειδική) περίπτωση του λεγόμενου Θεωρήματος Rolle.

Θεώρημα Rolle

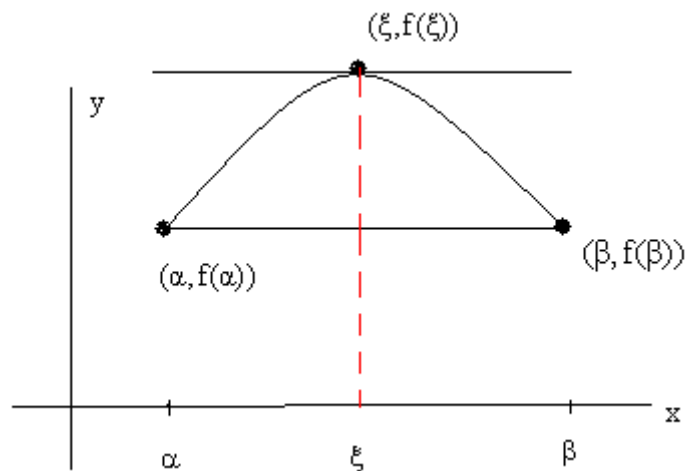
Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
- (β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b)
- (γ) $f(a) = f(b)$

Τότε υπάρχει ένα σημείο $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle

Εάν θεωρήσουμε τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ τότε, το Θεώρημα Rolle μας αναφέρει ότι, υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σημείο $(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα των x .

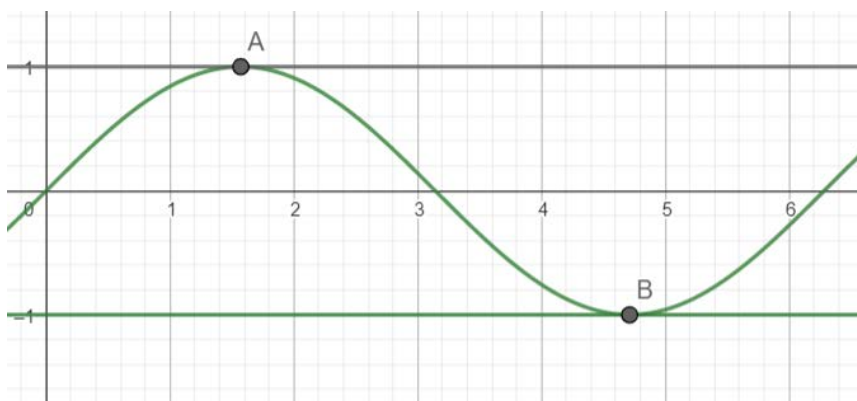


Παρατήρηση

Το Θεώρημα Rolle μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Δηλαδή είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία που να ικανοποιούν την $f'(\xi)=0$.

Παράδειγμα

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$, τότε $f(0)=\eta\mu 0=\eta\mu(\pi)=f(\pi)$, ενώ $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ & $x=\frac{3\pi}{2}$ (δύο σημεία ικανοποιούν την $f'(\xi)=0$).



■

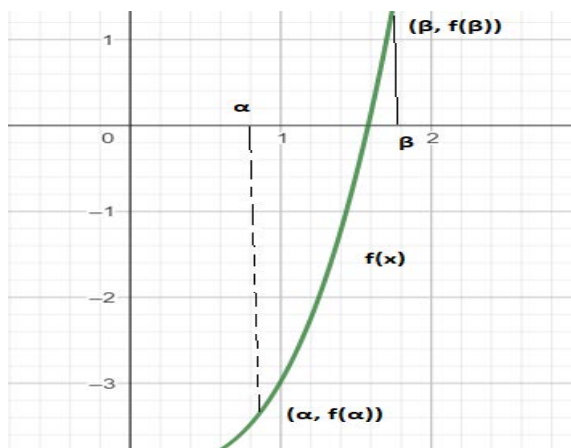
Για την ύπαρξη ενός μοναδικού τέτοιου σημείου ή γενικότερα για την ύπαρξη μιας (μοναδικής) ρίζας μιάς εξίσωσης, χρήσιμο είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Bolzano

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα αναφέρει ότι, εάν οι ποσότητες $f(\alpha), f(\beta)$ είναι ετερόσημες, τότε το διάστημα (α, β) περιέχει μιά τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ (υποθέστε ότι τα σημεία α, β δεν είναι ρίζες της εξίσωσης).



Εφαρμογές

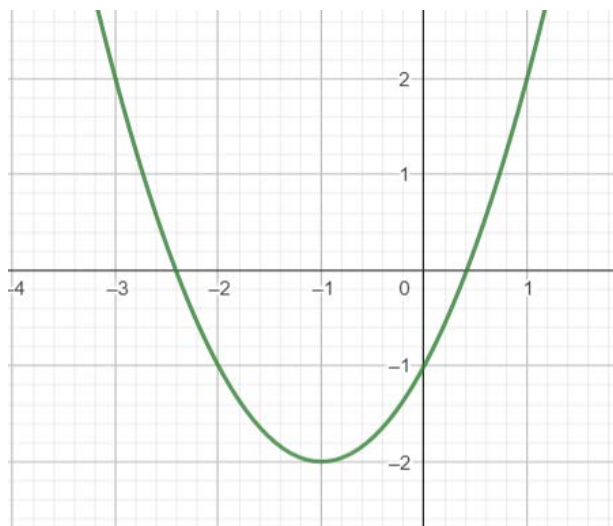
Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το ξ του Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 1$ για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει κάποιο $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$



Αλλά $f(1)=2$, $f(0)=-1$ και $f'(\xi)=2\xi+2$ άρα

$$2\xi+2=\frac{2-(-1)}{1-0} \Rightarrow 2\xi+2=3 \Rightarrow 2\xi=1 \Rightarrow \xi=\frac{1}{2}$$

■

Εφαρμογή 2

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^{10}+ax+\beta=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η $x^{10}+ax+\beta=0$ έχει 3 ρίζες, έστω τις x_1, x_2, x_3 δηλαδή $x_1^{10}+ax_1+\beta=0$ (και όμοια για x_2, x_3). Εάν ορίσουμε την συνάρτηση $f(x)=x^{10}+ax+\beta$ τότε $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ δηλαδή η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$ (1).

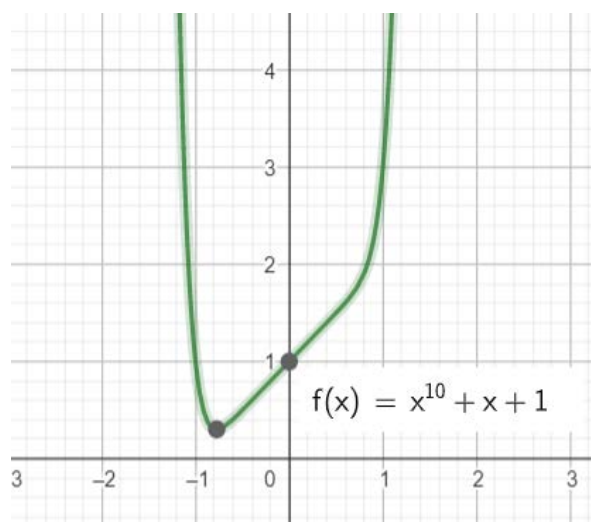
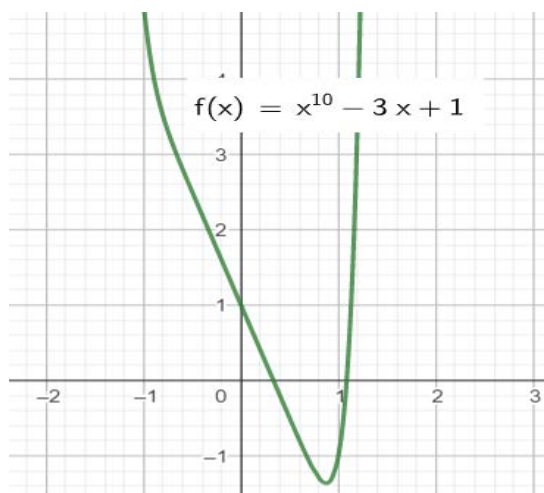
Όμοια η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_2, x_3] \Rightarrow \exists \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η $f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες που είναι άτοπο γιατί:

$$f'(x)=10x^9+a \text{ και } f'(x)=0=10x^9+a \Rightarrow 10x^9=-a \Rightarrow x=\sqrt[9]{-\frac{a}{10}} \text{ (μοναδική ρίζα)}$$

Άρα η $x^{10}+ax+\beta=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

Παράδειγμα



■

Εφαρμογή 3

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+\beta=0$ δεν έχει περισσότερες από μία ρίζες στο διάστημα $[-1,1]$, ανεξάρτητα από την τιμή του β .

Λύση

Ας υποθέσουμε και πάλι ότι η $x^3 - 3x + \beta = 0$ έχει 2 ρίζες στο διάστημα $[-1, 1]$, έστω τις x_1, x_2 και έστω ότι $x_1 < x_2$. Εάν ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \beta$ τότε $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ οπότε η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x_2) \subset [-1, 1]$ (άρα $\xi \neq \pm 1$) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο γιατί

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

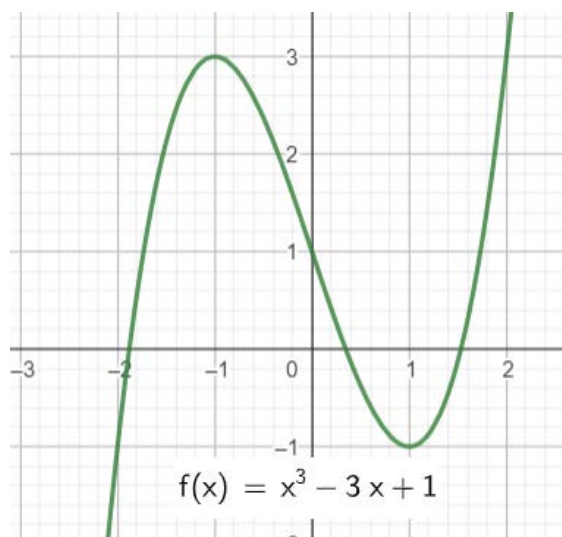
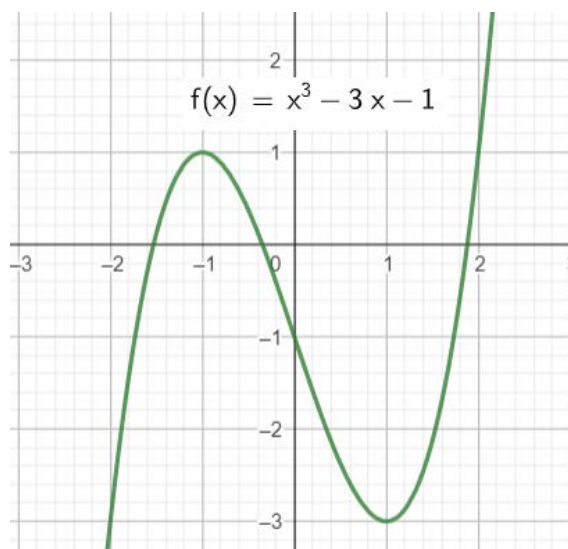
και επειδή $\xi \neq \pm 1$ δεν υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άρα η $x^3 - 3x + \beta = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Παρατήρηση

Τα σημεία $x = 1$ & $x = -1$ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ρίζες γιατί αν:

$$\left. \begin{aligned} (-1)^3 - 3(-1) + \beta &= 0 \Rightarrow -1 + 3 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2 \\ 1^3 - 3 \cdot 1 + \beta &= 0 \Rightarrow 1 - 3 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2 \end{aligned} \right\} \text{δεν ισχύουν ταυτόχρονα.}$$

Παράδειγμα

■

Εφαρμογή 4

(α) Ας θεωρήσουμε μία συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Να αποδειχθεί ότι αν η f' έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες τότε η f έχει το πολύ $n+1$.

(β) Είναι δυνατόν η εξίσωση $x^3 + 3x^2 - \lambda e^x = 0$, να έχει 5 ρίζες, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$;

Λύση

(α) Έστω ότι η f έχει (τουλάχιστον) $n+2$ διαφορετικές ρίζες, τις:

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{n+2}.$$

Τότε σε κάθε ένα από τα $(n+1)$ διαδοχικά διαστήματα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ έχουμε: η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$,

παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (ρ_i, ρ_{i+1}) και $f(\rho_i)=f(\rho_{i+1})=0$. Άρα από το Θ. Rolle $\exists \xi_i \in (\rho_i, \rho_{i+1}), f'(\xi_i)=0$ Δηλαδή, η παράγωγος f' έχει (τουλάχιστον) $(n+1)$ διαφορετικές ρίζες:

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+1}$$

πράγμα άτοπο.

(β) Όχι, δεν είναι δυνατόν. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

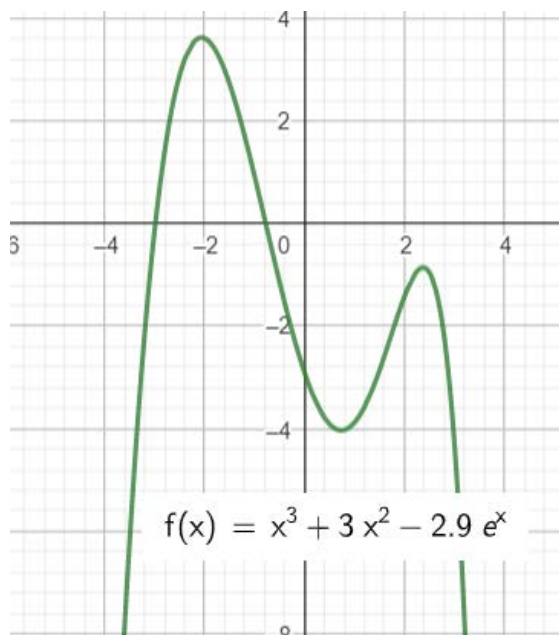
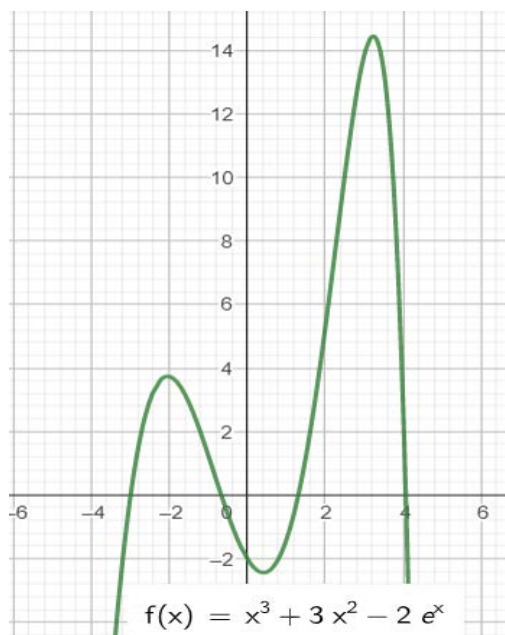
$$f(x) = x^3 e^{-x} + 3x^2 e^{-x} - \lambda$$

τότε η παράγωγος της είναι ίση:

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6x e^{-x} = -\frac{x}{e^x} (x^2 - 6).$$

Η f' έχει ακριβώς τρεις ρίζες, τις $x=0, \pm\sqrt{6}$ οπότε η f έχει το **πολύ** τέσσερις ρίζες, σύμφωνα με το (α).

Παράδειγμα



■

Εφαρμογή 5 (μοναδική ρίζα)

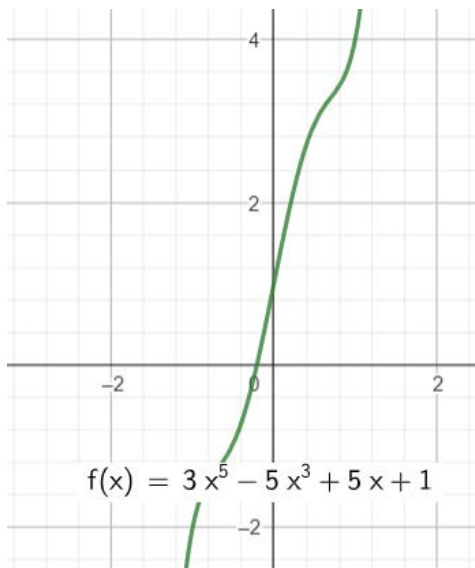
Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ σαν πολυωνυμική. Ας υποθέσουμε ότι η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει 2 ρίζες στο διάστημα $[-1, 0]$, έστω τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ δηλαδή $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Επομένως, η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \subset (-1, 0) \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο γιατί:

$$f'(\xi) = 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0$$

και η εξίσωση $15x^4 - 15x^2 + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες (π.χ. εάν θέσουμε $w = x^2$ τότε $15x^4 - 15x^2 + 5 = 0 \Rightarrow 15w^2 - 15w + 5 = 0$ και η διακρίνουσα $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 5 = 225 - 300 = -75 < 0$). Άρα η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ (*).



Επιπλέον, $f(0) = 1$, $f(-1) = -3 + 5 - 5 + 1 = -2$ δηλαδή $f(0) \cdot f(-1) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (**).

Τέλος, από τις σχέσεις (*) και (**) έπεται ότι, η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

■

Εφαρμογή 6

Αποδείξτε ότι: (α) $\frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, (β) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{8} - 2 < 1$.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$ στο $[1, 3/2]$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[1, 3/2]$ ως λογαριθμική. Είναι $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3/2)$. Άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. και θα υπάρξει $\xi \in (1, 3/2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \frac{3}{2} - \ln 1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \xi \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow 1 < \xi < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 > \frac{1}{\xi} > \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{\ln \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[4, 8]$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[4, 8]$. Είναι $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(4, 8)$. Άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. και θα υπάρχει $\xi \in (4, 8)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{8} - 2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{8} - 2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \xi \in (4, 8) \Rightarrow 4 < \xi < 8 \Rightarrow 2 < \sqrt{\xi} < \sqrt{8} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\sqrt{\xi}} > \frac{1}{\sqrt{8}} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{\sqrt{8} - 2}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2}} < \sqrt{8} - 2 < \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{8} - 2 < 1.$$

■

Εφαρμογή 7

Αποδείξτε ότι $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Λύση

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $x < y$. Η $f(t) = \eta\mu t$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x, y]$ (η $\eta\mu t$ συνεχής και παραγωγίσιμη παντού). Άρα από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει $\exists \xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\eta\mu y - \eta\mu x}{y - x} = \left| \frac{\eta\mu y - \eta\mu x}{y - x} \right| = |f'(\xi)|$$

Αλλά $f'(\xi) = \cos \xi \Rightarrow |f'(\xi)| = |\cos \xi| \leq 1$ άρα

$$\frac{|\eta\mu y - \eta\mu x|}{|y - x|} \leq 1 \Rightarrow |\eta\mu y - \eta\mu x| \leq |y - x|$$

■

10. Συνέχεια συνάρτησης

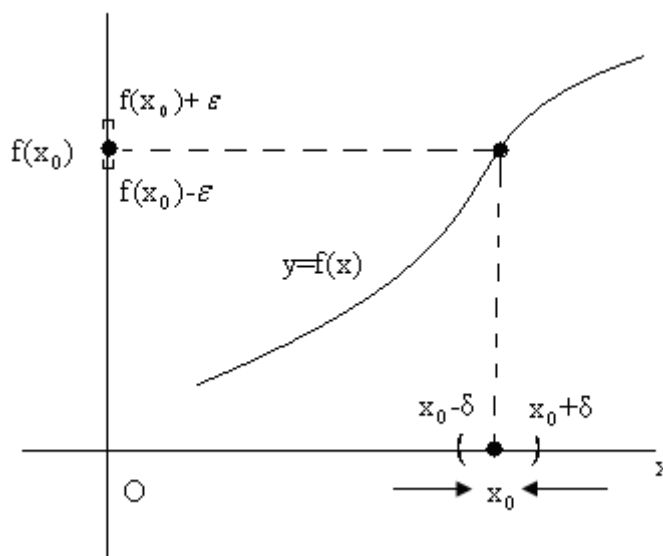
Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται **συνεχής στο σημείο** x_0 αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή θα πρέπει: (α) η συνάρτηση $f(x)$ να ορίζεται στο σημείο x_0 , άρα θα υπάρχει η τιμή $f(x_0)$ (έχει νόημα λοιπόν να μιλάμε για συνέχεια μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης).

(β) να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(γ) τα (α) και (β) θα πρέπει να είναι ίσα (δείτε το σχήμα 8)



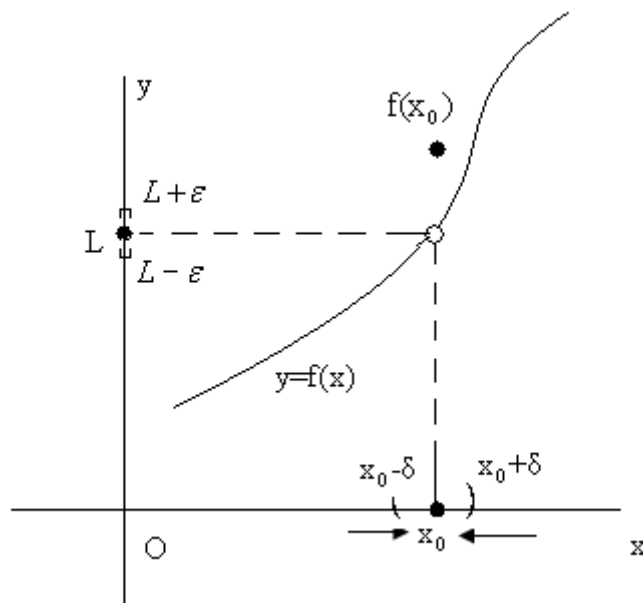
Σχήμα 8

Μια συνάρτηση καλείται **συνεχής**, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 .

Παρατήρηση

(1) Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , εάν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

- (α) υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αλλά είναι διάφορο από την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$). Η ασυνέχεια αυτή καλείται **ασυνέχεια πρώτου είδους** (ή αιρούμενη ασυνέχεια γιατί ορίζοντας την τιμή της συνάρτησης f κατάλληλα στο σημείο x_0 , η συνάρτηση γίνεται συνεχής). (δείτε το σχήμα 9).



Σχήμα 9

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια, στο σημείο $x_0=2$, η συνάρτηση:

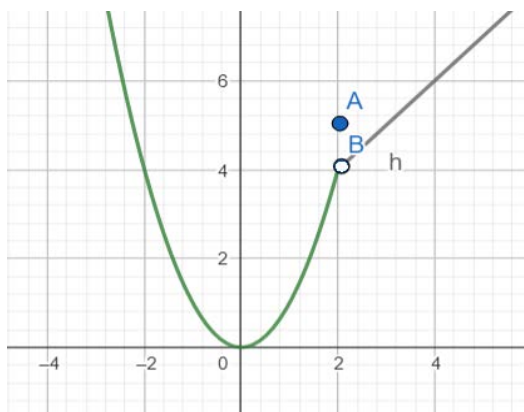
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 5 & x = 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 2+2 = 4 \end{aligned} \right\} \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq 5 = f(2)$$

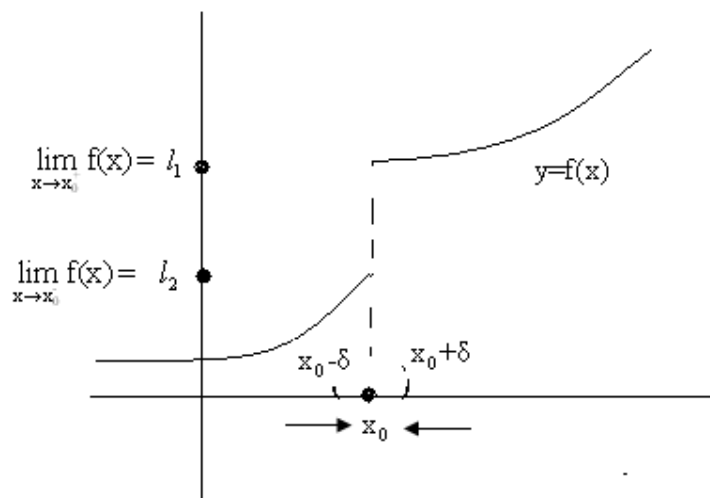
Δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.



Παρατήρηση

Εάν θέσουμε $f(2)=4$ τότε η συνάρτηση f γίνεται συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

- (β) δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Η ασυνέχεια αυτή καλείται **ασυνέχεια δεύτερου είδους** (δείτε το σχήμα 10).



Σχήμα 10

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι μπορεί να συμβεί μία από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

- (I) Υπάρχουν τα πλευρικά όρια, είναι πεπερασμένα, αλλά διαφέρουν (λέμε ότι έχουμε **άλμα ασυνέχειας**).
- (II) Ένα (τουλάχιστον) από τα πλευρικά όρια απειρίζεται.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια, στο σημείο $x_0=1$, η συνάρτηση:

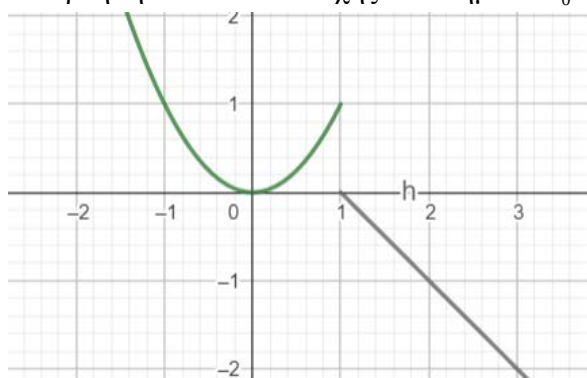
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ -x+1 & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = -1+1 = 0 \end{aligned} \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Δηλαδή η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.



Παράδειγμα

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια, στο σημείο $x_0=1$, η συνάρτηση:

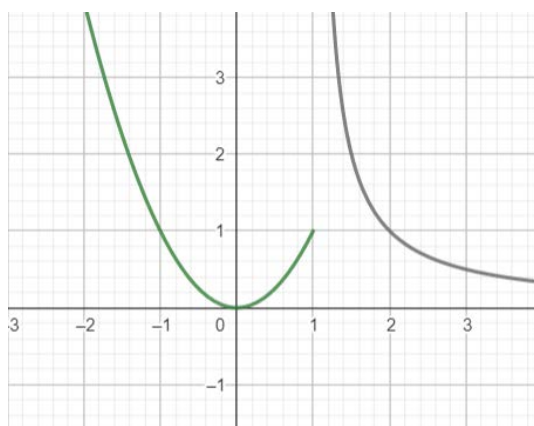
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right) = +\infty \end{aligned} \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Δηλαδή η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.



■

- (2) Εάν υπάρχει το αριστερό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$), τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **αριστερά συνεχής στο σημείο x_0** . Ανάλογα, εάν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0 (δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$), τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **δεξιά συνεχής στο σημείο x_0** .
- (3) Εάν η συνάρτηση f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, λέμε ότι είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ εάν: (i) είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in (a, \beta)$, (ii) είναι δεξιά συνεχής στο σημείο a και (iii) αριστερά συνεχής στο σημείο β .
- (4) Υπάρχει ένας αυστηρός ε, δ , ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης. Λέμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $f(x)$ καλείται **συνεχής στο σημείο x_0** αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ε), για το οποίο: αν

$$|x - x_0| < \delta$$

τότε:

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι η συνάρτηση $f(x)=x$ είναι συνεχής σ' ένα (οποιοδήποτε) σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση: αν

$$|x - x_0| < \delta \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε} \quad |f(x)-f(x_0)| = |x-x_0| < \varepsilon$$

Εάν θεωρήσουμε $\delta=\varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα

Να δειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής σ' ένα (οποιοδήποτε) σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι μας δίνεται $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση: αν

$$|x - x_0| < \delta \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε} \quad |\eta\mu x - \eta\mu(x_0)| < \varepsilon$$

Αλλά

$$\begin{aligned} |\eta\mu x - \eta\mu x_0| &= \left| 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| 2\eta\mu\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq \left| 2\frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0| \end{aligned}$$

Εάν θεωρήσουμε $\delta=\varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Ο ορισμός αυτός είναι δύσχρηστος και σπάνια χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συνέχειας μιάς συνάρτησης σε ένα σημείο της. Αντί γι' αυτόν χρησιμοποιείται η επόμενη πρόταση και η συνέχεια μερικών βασικών (γνωστών) συναρτήσεων.

Πρόταση

(1) Εάν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο x_0 , τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις:

(α) $f \pm g$

(β) $\alpha \cdot f$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ((α) & (β) γραμμικότητα της συνέχειας)

(γ) $f \cdot g$

(δ) $\frac{f}{g}$ όταν $g(x_0) \neq 0$

(ε) $\sqrt{f(x)}$ όταν $f(x) \geq 0$

(2) Εάν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

(3) Η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(α) Επομένως, μιά πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, a_n \neq 0 \text{ είναι συνεχής σε κάθε σημείο } x_0 \in \mathbb{R}.$$

(β) Μιά ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x , είναι συνεχής (σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων) σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της (δηλαδή σε κάθε σημείο x_0 που δεν μηδενίζει τον παρονομαστή της).

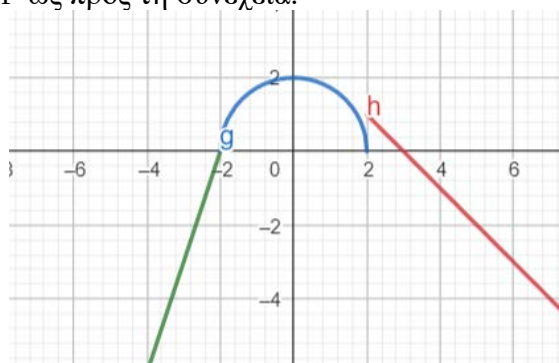
(4) Οι συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+6, & x < -2 \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & 2 < x \end{cases}$$

Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.



Λύση

Εάν $x < -2$, τότε η $f(x) = 3x+6$ άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x < -2$ σαν πολυωνυμική. Ανάλογα εάν $2 < x$, η $f(x) = 3-x$ οπότε και πάλι είναι συνεχής για $2 < x$.

Τέλος, εάν $-2 < x < 2$, η $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ η οποία είναι και πάλι συνεχής σε κάθε σημείο

του διαστήματος $(-2, 2)$ (από το 1(ε) της παραπάνω πρότασης). Άρα, τα πιθανά σημεία ασυνέχειας τα οποία θα πρέπει να εξετάσουμε είναι τα σημεία $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Συνέχεια στο $x_1 = -2$. Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x+6) = -6+6=0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-2^2} = 0 = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(2)$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_1 = -2$

Συνέχεια στο $x_2 = 2$. Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-2^2} = 0 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3-x) = 3-2=1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = -2$ ($\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$), ασυνέχεια δεύτερου είδους). Η f είναι αριστερά συνεχής στο $x_1 = -2$. ■

Εφαρμογή 2

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών, α, β ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x + 1, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha \eta\mu x + \beta - 2, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f για $x < -\frac{\pi}{2}$ είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι συνεχής, ομοίως, και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ όπως και για $x > \frac{\pi}{2}$. Άρα, για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι και συνεχής και στα σημεία $\pi/2$ και $-\pi/2$.

Για να είναι συνεχής στο $\pi/2$ και στο $-\pi/2$ πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{άρα}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} (-2\eta\mu x + 1) = -2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (\alpha\eta\mu x + \beta - 2) = \alpha\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \beta - 2 = -\alpha + \beta - 2 \end{aligned} \right\}$$

αρα

$$-\alpha + \beta - 2 = 3 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \quad (\text{A})$$

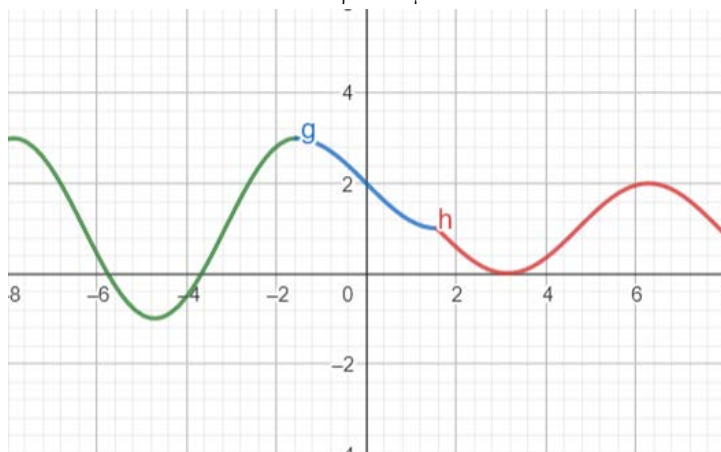
και

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\alpha\eta\mu x + \beta - 2) = \alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta - 2 = \alpha + \beta - 2 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sigma\upsilon\nu x + 1) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + 1 = 1 \end{aligned} \right\}$$

αρα

$$\alpha + \beta - 2 = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 3 \quad (\text{B})$$

Από Α και Β έχουμε το σύστημα $\left. \begin{aligned} -\alpha + \beta &= 5 \\ \alpha + \beta &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\beta = 8 \Rightarrow \beta = 4 \quad \text{αρα } \alpha = -1$
προσθετούμε



■

Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

Μιά συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

Θεώρημα 1 (φραγμένο)

Εάν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση, τότε είναι φραγμένη δηλαδή $\exists m, M$ τέτοια ώστε $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $m \leq f(x) \leq M$.

Παρατήρηση

Η πρόταση δεν ισχύει αν το διάστημα δεν είναι κλειστό.

Παράδειγμα

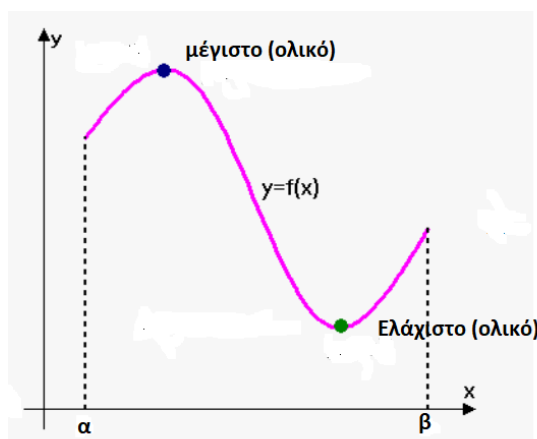
$$\text{Εάν } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ και } f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R},$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι φραγμένη ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$).

■

Θεώρημα 1 (μέγιστο/ελάχιστο)

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, τότε λαμβάνει το μέγιστο και το ελάχιστο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, δηλαδή υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$ (δείτε σχήμα 11).



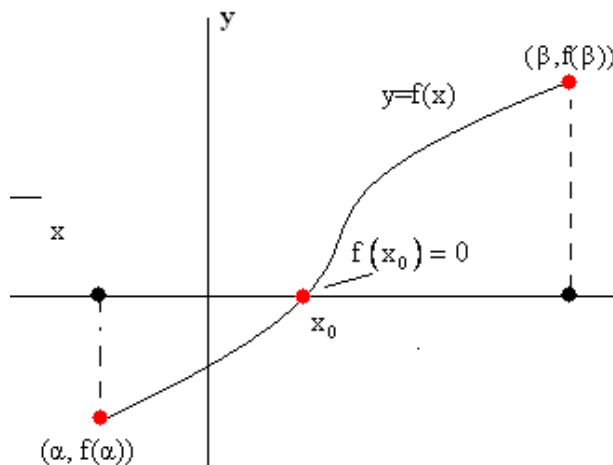
Σχήμα 11

Πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις **ρίζες** μιας εξίσωσης. Σε αρκετές περιπτώσεις είναι αρκετό να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας λύσης της (σε κάποιο διάστημα) και κατόπιν με προσεγγιστικές μεθόδους (της Αριθμητικής Ανάλυσης) να προσπαθήσουμε την υπολογίσουμε.

Στην προσπάθεια της απόδειξης ύπαρξης μιας ρίζας, σημαντικό ρόλο παίζει (πολλές φορές) το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα (Bolzano)

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ (δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β)) (δείτε το σχήμα 12).



Σχήμα 12

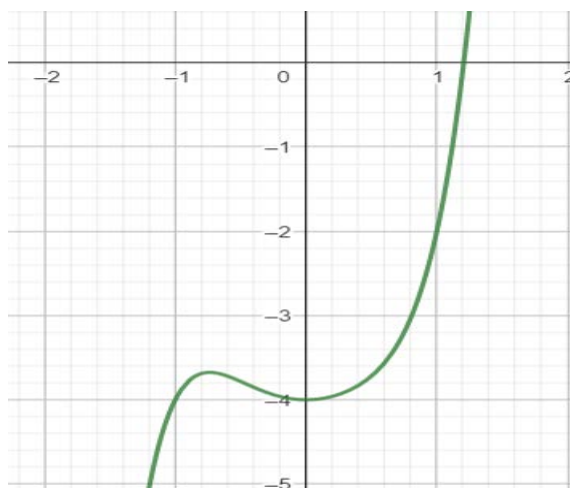
Εφαρμογή 3

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + x^2 - 4 = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^2 - 4$, η οποία σαν πολυωνυμική είναι συνεχής στο διάστημα $(1,2)$. Ακόμα:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^5 + 1^2 - 4 = -2 \\ f(2) = 2^5 + 2^2 - 4 = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$



Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = x^5 + x^2 - 4 = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ (το ποιά είναι ακριβώς η ρίζα είναι ίσως δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά).

■

Παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά, για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό της ρίζας.

Π.χ. $f(1,5) = 1,5^5 + 1,5^2 - 4 \approx 5,84 \Rightarrow f(1) \cdot f(1,5) < 0$. Οπότε η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης βρίσκεται στο διάστημα $(1, 1,5)$ κ.ο.κ.

Εφαρμογή 4

Ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση

Έστω $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0$ ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0$.

Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = -\infty$$

(γιατί το n είναι περιττός αριθμός). Από αυτό έπεται ότι $\exists \alpha < 0, f(\alpha) < 0$.

Ανάλογα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty.$$

Από αυτό έπεται ότι $\exists \beta > 0, f(\beta) > 0$, δηλαδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα (α, β) (για κάποια α και β), δηλαδή το πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

■

Παρατήρηση

Αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, του πολυωνύμου, δεν είναι 1 τότε τα αποτελέσματα είναι ανάλογα (το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x^1 + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n)$ και διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το α_n).

Εφαρμογή 5

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^2+2}{x-3} + \frac{x^6+1}{x-4} = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα $(3,4)$.

Λύση

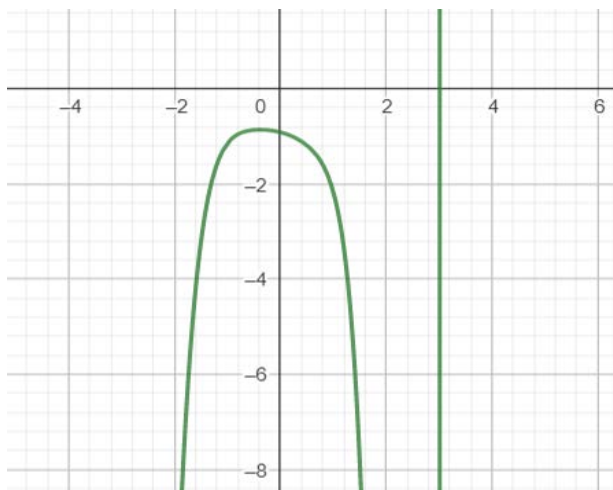
Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\frac{(x^2+2)(x-4) + (x^6+1)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = 0$. Θεωρώ τη

συνάρτηση: $f(x) = (x^2+2)(x-4) + (x^6+1)(x-3)$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[3,4]$. Ακόμα,

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= (3^2+2)(3-4) + (3^6+1)(3-3) = -11 < 0 \\ f(4) &= (4^2+2)(4-4) + (4^6+1)(4-3) = 4^6+1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) \cdot f(4) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3,4)$ ή ισοδύναμα η εξίσωση $\frac{(x^2+2)(x-4) + (x^6+1)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = 0$,

πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση $\frac{x^2+2}{x-3} + \frac{x^6+1}{x-4} = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα (3,4).



■

Εφαρμογή 6 (θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)

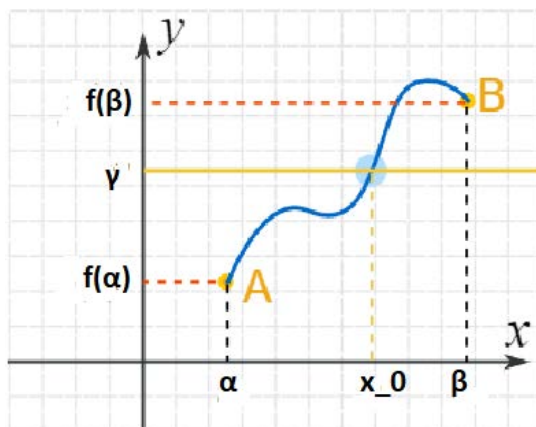
Εάν $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(\beta)$ (δείτε το σχήμα 13).

Απόδειξη

Έστω ότι $f(a) < f(\beta)$ και έστω μια τιμή γ τέτοια ώστε $f(a) < \gamma < f(\beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \gamma$. Τότε:

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0 \text{ \& } g(\beta) = f(\beta) - \gamma > 0$$

δηλαδή $g(a) \cdot g(\beta) < 0$. Οπότε, από το θεώρημα (Bolzano) έπεται ότι η εξίσωση $g(x) = f(x) - \gamma = 0$ έχει μια τουλάχιστον (πραγματική) ρίζα στο διάστημα (a, β) , δηλαδή υπάρχει ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τ.ω. $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \gamma$, δηλαδή η συνάρτηση f παίρνει, στο σημείο x_0 , την τιμή γ .



Σχήμα 13

■

Παρατήρηση

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι ένας επιπλέον τρόπος για την απόδειξη ύπαρξης μιάς (πραγματικής) ρίζας μιάς εξίσωσης.

Εφαρμογή 7

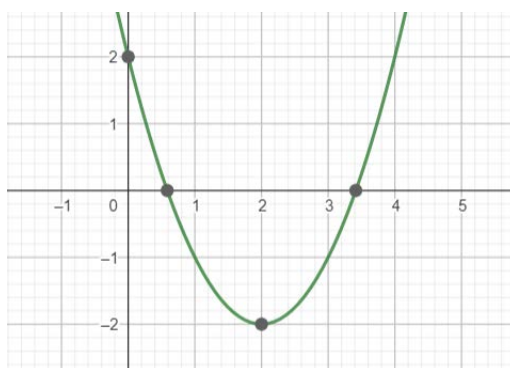
Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+2$ τέμνει τον άξονα x σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[0,2]$ (δηλαδή, η εξίσωση $x^2-4x+2=0$ έχει μιά τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$).

Λύση

Η συνάρτηση: $f(x)=x^2-4x+2$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$. Ακόμα,

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) = -4 < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές $f(0)=2$ και $f(2)=-2$, δηλαδή όλες τις τιμές ανάμεσα στο -2 και 2 . Επομένως θα παίρνει και την τιμή 0 , δηλαδή θα υπάρχει $x_0 \in (0,2)$, τ.ω $f(x_0)=x_0^2-4x_0+2=0$ (ή ισοδύναμα η εξίσωση $x^2-4x+2=0$ έχει μιά τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$).



■

11. Γραφική παράσταση συνάρτησης

Για να κατασκευάσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης f , ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της με τους άξονες
2. Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
3. Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο f' της f και κατασκευάζουμε πίνακα του προσήμου της. Με τη βοήθειά του προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και τα τοπικά ακρότατά της.
4. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f και κατασκευάζουμε πίνακα του προσήμου της. Με τη βοήθειά του καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.
5. Βρίσκουμε αν υπάρχουν (τυχόν) ασύμπτωτες.

Εφαρμογή 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

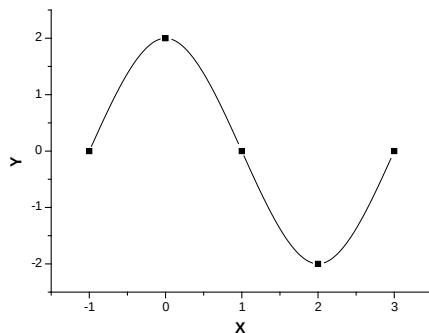
Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
 $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής, τα κοίλα θα τα μελετήσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	+	-	-	+	
f''	-	-	+	+	
f	$\nearrow$	max	$\searrow$ σ.κ.	$\searrow$ min	$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για $x \in (0, 2)$. Στη θέση $x = 0$ έχει τοπικό μέγιστο και είναι το $f(0) = 2$, ενώ στη θέση $x = 2$ έχει τοπικό ελάχιστο και είναι το $f(2) = -2$. Επίσης είναι κυρτή για $x > 1$, και κοίλη για $x < 1$, ενώ στη θέση $x = 1$ έχει σημείο καμπής. Ακόμα, η f δεν έχει οριζόντιες, πλάγιες ή κατακόρυφες ασυμπτώτες.



■

Εφαρμογή 2

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{0\}$. Η 1^η παράγωγός της είναι ίση με:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2xx - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Για τη μονοτονία και τα ακρότατα κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'		+	-	-	+
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$ min	$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για $x \in (-1, 1)$. Βλέπουμε δηλαδή ότι στο σημείο $x=-1$ η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$, ενώ στο $x=1$ τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Επιπλέον:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)' = \frac{2xx^2 - (x^2-1)2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = 0 \Rightarrow x=0$$

Τα κοίλα και τα (πιθανά) σημεία καμπής της f θα τα μελετήσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		-	+
f		κοίλη	κυρτή

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Το σημείο $x=0$ δεν είναι σημείο καμπής της f αν και αλλάζει η καμπυλότητα της δεξιά και αριστερά του (στο σημείο αυτό η συνάρτηση δεν ορίζεται).

Ακόμα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος. Επιπλέον:

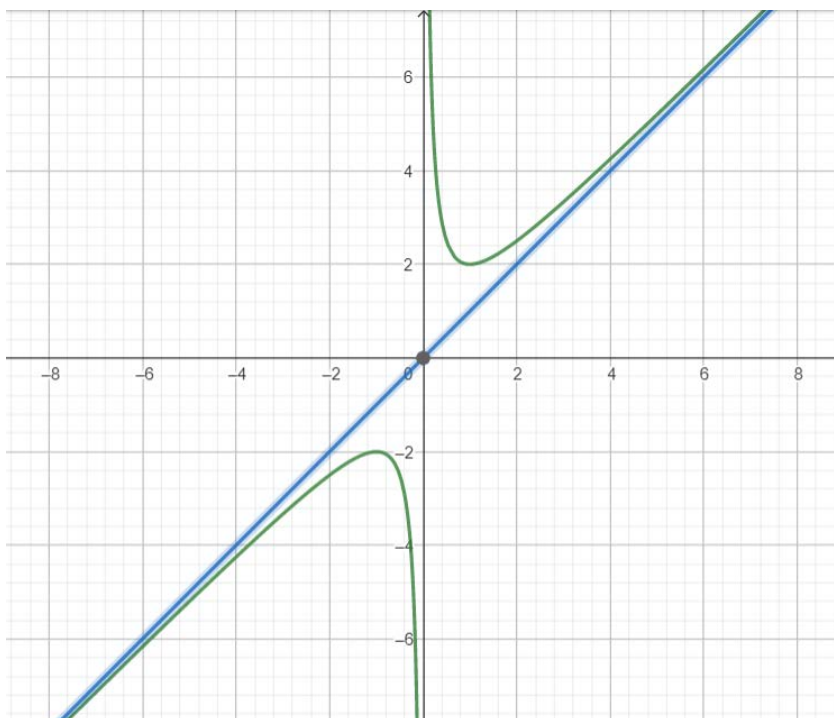
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτοι. Τέλος,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 = \beta$$

Άρα, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτος του γραφήματος της $f(x) = x + \frac{1}{x}$



Εφαρμογή 3

Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x - \mu)^2}, \quad \mu > 0$$

ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής. Να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση όταν $\mu = 1$.

Λύση

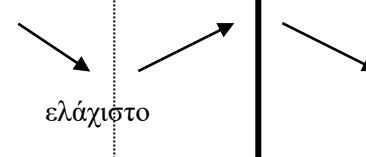
Είναι φανερό ότι η $f(x)$ δεν ορίζεται στο σημείο $x=\mu$ (άρα είναι ασυνεχής στο εν λόγω σημείο και δεν υπάρχει η παράγωγος της σ' αυτό).

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ είναι ίση με:

$$f'(x) = 2\mu \frac{(2x-\mu)(x-\mu)^2 - (x^2 - \mu x + \mu^2) \cdot 2(x-\mu)}{(x-\mu)^4} = -2\mu^2 \frac{(x+\mu)}{(x-\mu)^3}$$

$$\text{οπότε: } f'(x)=0 \Rightarrow -2\mu^2 \frac{(x+\mu)}{(x-\mu)^3} = 0 \Rightarrow x = -\mu$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x		-μ		μ	
x+μ	-		+		+
(x-μ) ³	-		-		+
-2 μ ²	-		-		-
f'(x)	-		+		-
f(x)					

δηλαδή, το σημείο $x=-\mu$ είναι το μοναδικό ακρότατο σημείο, και μάλιστα όπως φαίνεται από τον πίνακα είναι σημείο ελαχίστου (ολικό).

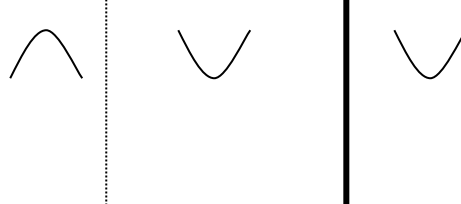
Γιά τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(-2\mu^2 \frac{x+\mu}{(x-\mu)^3} \right)' = -2\mu^2 \frac{(x-\mu)^3 - (x+\mu) \cdot 3(x-\mu)^2}{(x-\mu)^6} = 4\mu^2 \frac{x+2\mu}{(x-\mu)^4}$$

οπότε:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 4\mu^2 \frac{x+2\mu}{(x-\mu)^4} = 0 \Rightarrow x = -2\mu$$

Με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x		-2μ		μ	
x+2μ	-		+		+
f''(x)	-		+		+
f(x)					
	σημείο καμπής				

δηλαδή, βλέπουμε ότι το σημείο $x=-2\mu$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της $f(x)$ (δεξιά και αριστερά του εν λόγω σημείου έχουμε διαφορετικό είδος καμπυλότητας).

Παρατήρηση

Μερικές ακόμα χρήσιμες πληροφορίες οι οποίες θα βοηθήσουν στην κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ είναι και οι εξής:

(α) $f(x) > 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R} - \{\mu\}$ (η $f(x) = \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x-\mu)^2}$ και το τριώνυμο

$$x^2 - \mu x + \mu^2 > 0, \quad \forall x \text{ γιατί η διακρίνουσά του } \Delta = (-\mu)^2 - 4\mu^2 = -3\mu^2 < 0).$$

(β) Το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x-\mu)^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{L'H} \frac{2\mu(2x-\mu)}{2(x-\mu)} \stackrel{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \lim_{L'H} \frac{2\mu \cdot 2}{2} = 2\mu$

δηλαδή η ευθεία $y=2\mu$ είναι *οριζόντια ασύμπτωτος* του γραφήματος της $f(x)$.

(γ) Ακόμα $\lim_{x \rightarrow \mu} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mu} \frac{2\mu(x^2 - \mu x + \mu^2)}{(x-\mu)^2} = \frac{2\mu \lim_{x \rightarrow \mu} (x^2 - \mu x + \mu^2)}{\lim_{x \rightarrow \mu} (x-\mu)^2} = \frac{2\mu\mu^2}{\lim_{x \rightarrow \mu} (x-\mu)^2} = +\infty$

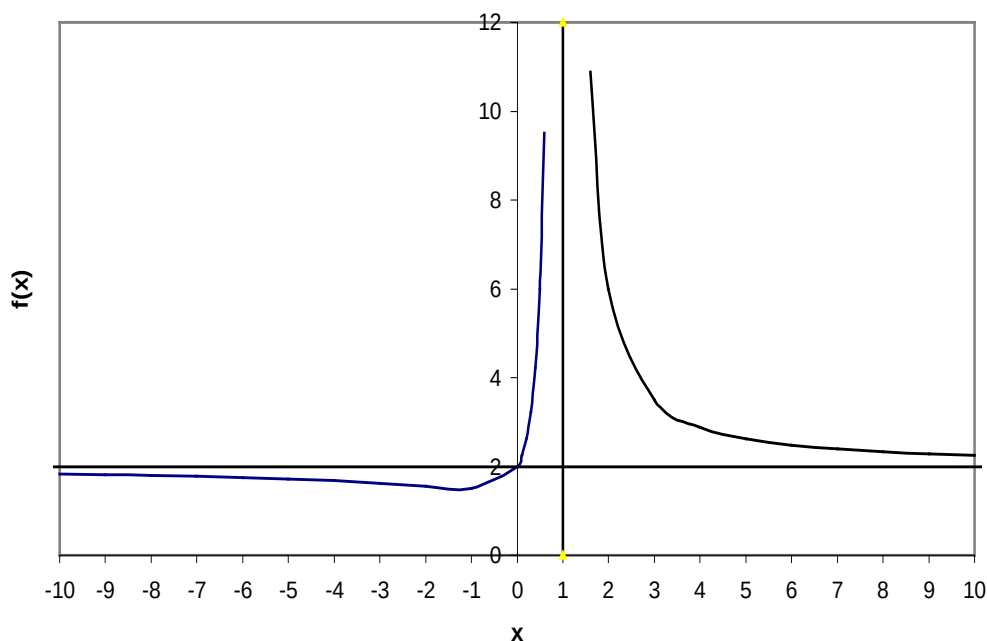
δηλαδή η ευθεία $x=\mu$ είναι *κατακόρυφη ασύμπτωτος* του γραφήματος της $f(x)$.

Αν $\mu=1$

Η $f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$ έχει (σύμφωνα με τα παραπάνω) ελάχιστο στο σημείο $x=-1$ ίσο με

$$f(-1) = \frac{2((-1)^2 - (-1) + 1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{2}, \text{ σημείο καμπής το } x=-2 \text{ και } f(-2) = \frac{14}{9}. \text{ Η ευθεία } y=2 \text{ είναι}$$

οριζόντια ασύμπτωτος της $f(x)$, ενώ η ευθεία $x=1$ είναι *κατακόρυφη ασύμπτωτος* του γραφήματος της $f(x)$. Τέλος $f(0)=2$, οπότε η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι η:



■

Εφαρμογή 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{3x-6}{x(x+6)}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq -6$$

Να επισημανθούν τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία τομής του γραφήματος με τους άξονες συντεταγμένων, να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης f και οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών στο γράφημα της f . Να σχεδιασθεί το γράφημα της συνάρτησης.

Λύση

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο, αφού αναλύσουμε πρώτα σε απλά κλάσματα:

$$f(x) = \frac{4}{x+6} - \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{4}{(x+6)^2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{3(x-6)(x+2)}{x^2(x+6)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(x+6)^3} - \frac{2}{x^3}$$

Παρατηρούμε: $f(2) = 0$ και επομένως το γράφημα της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $(2,0)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Ακροτάτων: $f'(-2) = 0$, $f''(-2) = \frac{3}{2^3} > 0$ και $f(-2) = \frac{3}{2}$ και

επομένως το σημείο $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου, και $f'(6) = 0$,

$f''(6) = -\frac{1}{2^3 \cdot 3^3} < 0$ και $f(6) = \frac{1}{6}$ και επομένως το σημείο $\left(6, \frac{1}{6}\right)$ είναι θέση τοπικού μεγίστου.

Ο υπολογισμός της 2ας παραγώγου δεν είναι προφανώς αναγκαίος, για το χαρακτηρισμό των ακροτάτων, αφού η 1^η παράγωγος είναι συνεχής και αλλάζει πρόσημο σε περιοχές γύρω από το -2 και το 6 αντίστοιχα.

Πράγματι: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2) < 0$.

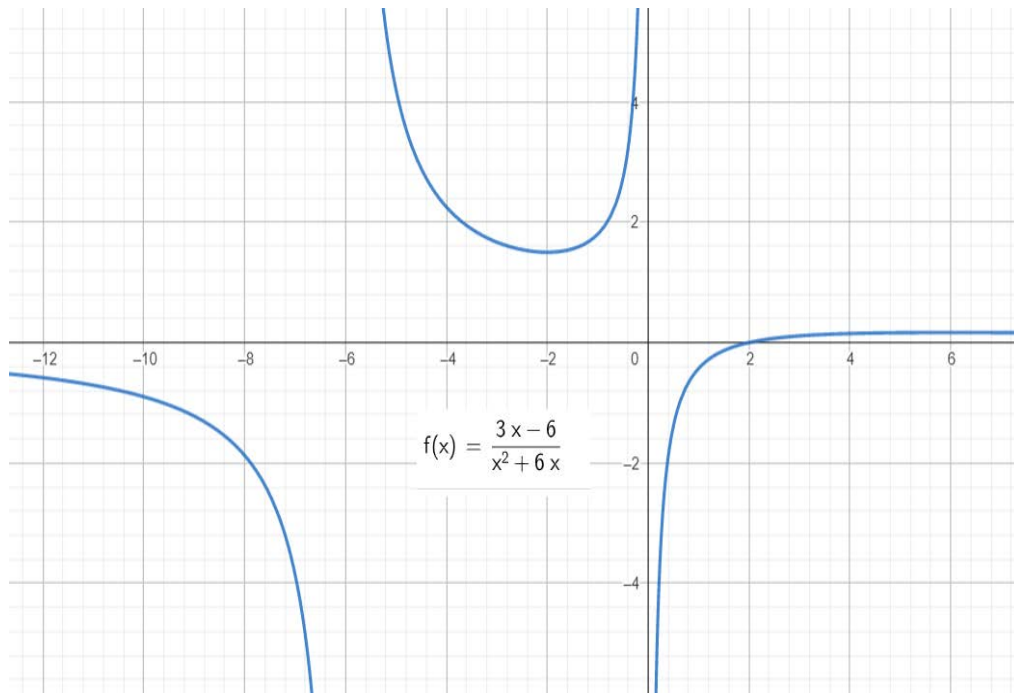
Επίσης η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-2,0) \cup (0,6)$ και φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -6) \cup (-6, -2) \cup (6, +\infty)$.

Παρατηρούμε:

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

Επομένως οι ευθείες $x = -6$ και $x = 0$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες** και η ευθεία $y = 0$ **οριζόντια ασύμπτωτος** στο γράφημα της συνάρτησης f .

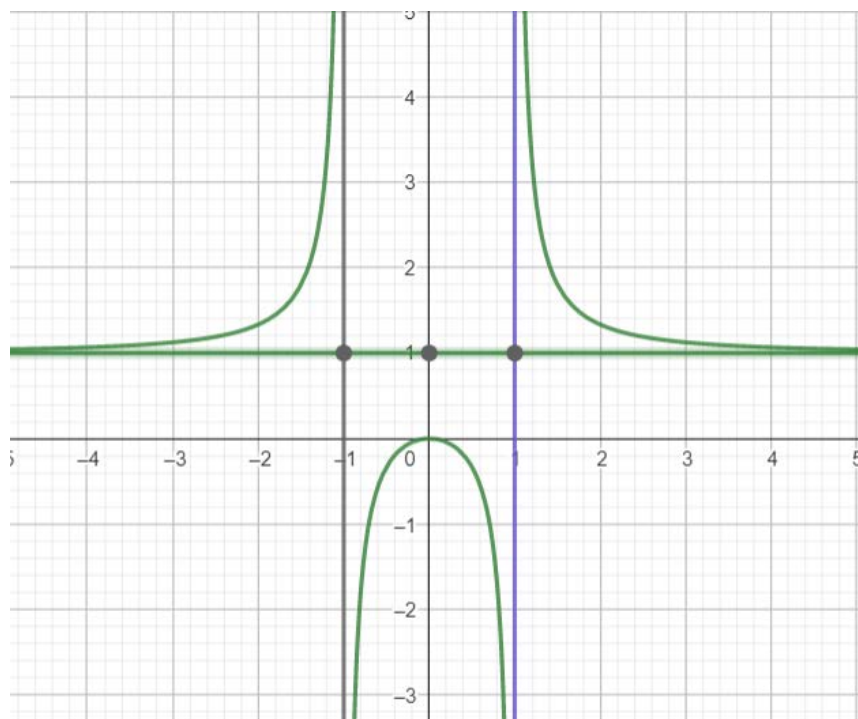
Η μορφή του γραφήματος προκύπτει από τις ασύμπτωτες, τα ακρότατα, το πρόσημο της f και της f' .



Από το γράφημα προκύπτει πως το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι $\left(y \leq \frac{1}{6}\right) \cup \left(y \geq \frac{3}{2}\right)$.

Εφαρμογή

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.



12. Εφαρμογές των παραγώγων

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν δύο αριθμοί που το άθροισμά τους να είναι ίσο με 20 και το γινόμενό τους το μέγιστο δυνατό.

Λύση

Αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε $x+y=20$, δηλαδή ο ένας αριθμός είναι ο x και ο άλλος ο $(y=) 20-x$. Άρα το γινόμενό τους:

$$P(x)=x(20-x)=20x-x^2$$

Για να είναι το γινόμενό τους μέγιστο θα πρέπει:

$$P'(x)=(20x-x^2)'=20-2x=0 \Rightarrow x=10$$

$$(P''(x)=-2 \Rightarrow P''(10)=-2 \text{ δηλ. } x=10 \text{ μέγιστο})$$

Αλλά $x=10 \Rightarrow y=20-x=10$ δηλαδή το μέγιστο γινόμενο επιτυγχάνεται για $x=y=10$

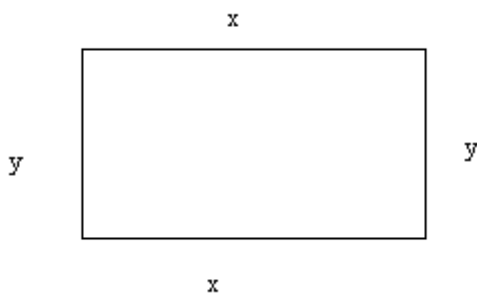
■

Εφαρμογή 2

Βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο 100 μέτρα, του οποίου το εμβαδόν να είναι το μέγιστο δυνατό.

Λύση

Εάν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου,



τότε η περίμετρος του είναι ίση με $2x+2y=100 \Rightarrow x+y=50$, το δε εμβαδόν του ισούται με

$$E(x)=x \cdot y=x(50-x)=50x-x^2$$

Παρατηρούμε ότι το $0 \leq x \leq 50$ (;). Για να βρούμε το μέγιστο εμβαδόν, βρίσκουμε:

$$E'(x)=(50x-x^2)'=50-2x=0 \Rightarrow x=25$$

Και επειδή $0 \leq x \leq 50$, το μέγιστο θα συμβαίνει σε κάποιο από τα σημεία:

$x=0$ (άκρο διαστήματος)

$x=25$ (ακρότατο)

$x=50$ (άκρο διαστήματος)

Αλλά $E(0)=50 \cdot 0 - 0^2 = 0$, $E(25)=50 \cdot 25 - 25^2 = 625$, $E(50)=50 \cdot 50 - 50^2 = 0$, δηλαδή το ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν (και περίμετρο 100 μέτρα) έχει διαστάσεις

$x=25$ & $y=50-x=50-25=25$ δηλαδή $x=y=25$ (τετράγωνο).

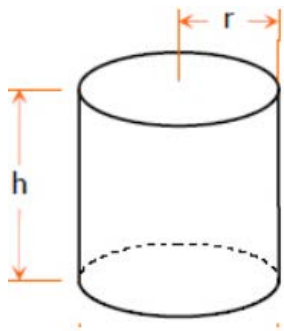
■

Εφαρμογή 3

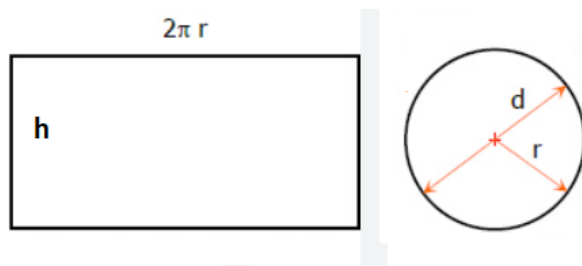
Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο λαδιού στο σχήμα ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου, ώστε να περιέχει 1 lt λαδιού. Ποιές θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου ώστε να απαιτείται για την κατασκευή του η μικρότερη ποσότητα υλικού.

Λύση

Έστω ότι το (κυλινδρικό) δοχείο που θέλουμε να κατασκευάσουμε έχει ακτίνα βάσης r και ύψος h .



Το υλικό που χρειάζεται για την κατασκευή του έχει να κάνει με το εμβαδόν της (εξωτερικής) επιφάνειάς του, η οποία αποτελείται από ένα ορθογώνιο (με διαστάσεις: η μία ίση με το ύψος του κυλίνδρου και η 2^η ίση με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου) και 2 κύκλους με ακτίνα r (πάνω και κάτω μέρος του δοχείου).



Το εμβαδόν λοιπόν της επιφάνειας του δοχείου είναι ίσο με:

$$E(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Ο όγκος του δοχείου δίνεται από τη σχέση:

$$V(h) = \pi r^2 h$$

Αλλά $V(r) = 1 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$, οπότε το εμβαδόν της επιφάνειας γίνεται:

$$E(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2 \frac{1}{r}$$

της οποίας ζητάμε το ελάχιστο. Αλλά:

$$E'(r) = 2 \cdot 2\pi r - 2 \frac{1}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2\pi r = 2 \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Επιπλέον:

$$E''(r) = 2 \cdot 2\pi + 2 \cdot 2 \frac{1}{r^3} = 4\pi + 4 \frac{1}{r^3} > 0 \text{ (πάντα)}$$

και $E''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4\pi + 4 \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^3} = 4\pi + 8\pi = 12\pi$, οπότε το σημείο $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ είναι σημείο ελαχίστου.

Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι:

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \& \quad h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \right)^2} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

■

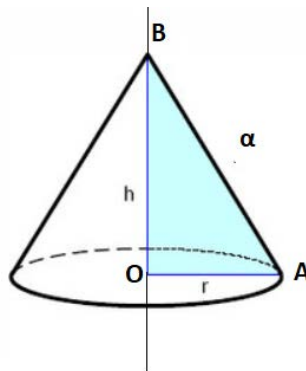
Εφαρμογή 4.

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους α περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές ώστε να παράγει έναν ορθό κυκλικό κώνο. Βρείτε τις διαστάσεις του κώνου μέγιστου όγκου (δηλαδή την ακτίνα βάσης του και το ύψος).

Λύση

Εάν r είναι η ακτίνα βάσης του κώνου και h το ύψος του, τότε ο όγκος του είναι ίσος με:

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο AOB έχουμε: $r^2 + h^2 = \alpha^2 \Rightarrow r^2 = \alpha^2 - h^2$ οπότε ο όγκος του κώνου γίνεται:

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (\alpha^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi \alpha^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3$$

Για το μέγιστο της συνάρτησης αυτής έχουμε:

$$\frac{dV(h)}{dh} = \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{3} \pi \alpha^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 \right) = \frac{1}{3} \pi \alpha^2 - \frac{1}{3} 3 \pi h^2 = 0 \Leftrightarrow 3h^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

Επιπλέον:

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2} = \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{3} \pi \alpha^2 - \pi h^2 \right) = -2\pi h < 0$$

οπότε και $\frac{d^2V\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)}{dh^2} = -2\pi \frac{\alpha}{\sqrt{3}} < 0$ δηλαδή το σημείο $h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ είναι σημείο μεγίστου. Τέλος, οι ζητούμενες διαστάσεις του κώνου είναι ίσες με:

$$h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \& \quad r^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha$$

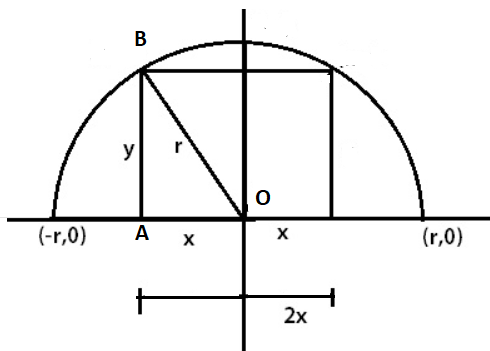
■

Εφαρμογή 5

Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεγίστου εμβαδού, που μπορεί να εγγραφεί σ' ένα ημικύκλιο ακτίνας r .

Λύση

Αν x, y είναι όπως στο παρακάτω σχήμα (x το μισό της μιάς από της διαστάσεις του ορθογωνίου και y η 2^η των διαστάσεων),



τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με:

$$E(x) = 2xy$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο AOB έχουμε:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται:

$$E(x) = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Για το μέγιστο της συνάρτησης αυτής έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(2x\sqrt{r^2 - x^2} \right) = \sqrt{r^2 - x^2} \frac{d}{dx} (2x) + 2x \cdot \frac{d}{dx} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right) = \\ &= 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \frac{dE(x)}{dx} = 0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow r^2 - x^2 = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = r^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r \end{aligned}$$

Η 2^η των διαστάσεων του είναι ίση με:

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r \right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{2}{4}r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}r^2} = r\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}r}{2}$$

Τέλος, οι ζητούμενες διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες με:

$$w = 2x = 2 \frac{\sqrt{2}r}{2} = \sqrt{2}r \quad \& \quad y = \frac{\sqrt{2}r}{2}$$

■

Παρατήρηση

Επειδή η παραπάνω προς παραγωγή συνάρτηση περιέχονται ριζικά, οπότε είναι δύσκολη η παραγωγή της, θα μπορούσε κανείς να ζητήσει το μέγιστο του τετραγώνου της συνάρτησης (δηλαδή το μέγιστο του τετραγώνου του εμβαδού). Θα μπορούσε δηλαδή να ζητήσει το μέγιστο της συνάρτησης:

$$Z(x) = E^2(x) = 4x^2 y^2 = 4x^2 \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 = 4x^2 (r^2 - x^2) = 4x^2 r^2 - 4x^4.$$

Για το μέγιστο της συνάρτησης αυτής έχουμε:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (4x^2 r^2 - 4x^4) = 8xr^2 - 16x^3$$

Αλλά:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 8xr^2 - 16x^3 = 0 \Leftrightarrow 8x(r^2 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad r^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

Επιπλέον:

$$\frac{d^2 Z(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} (8xr^2 - 16x^3) = 8r^2 - 48x^2$$

οπότε και:

$$\frac{d^2 Z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)}{dx^2} = 8r^2 - 48\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = 8r^2 - 48\frac{r^2}{2} = -16r^2 < 0$$

δηλαδή το σημείο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r$ είναι σημείο μεγίστου.

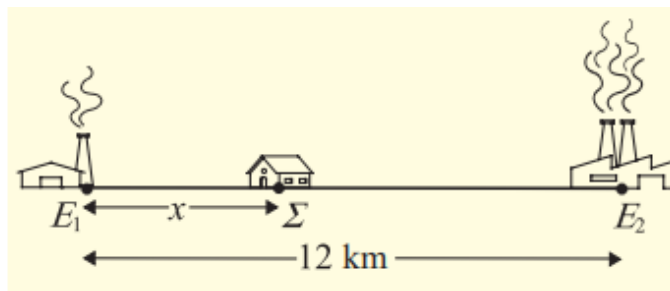
■

Εφαρμογή 6

Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και $8P$ αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d , να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου)

Λύση

Έστω ότι ο εργολάβος κτίζει το σπίτι σε απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 (οπότε και σε απόσταση $12-x$ από το εργοστάσιο E_2).



Εάν ρ_1 η πυκνότητα του καπνού που εκπέμπει το εργοστάσιο E_1 και ρ_2 η πυκνότητα του καπνού που εκπέμπει το εργοστάσιο E_2 , τότε από την υπόθεση έχουμε:

$$\rho_1 = k \cdot \frac{P}{x^2} \quad \text{και} \quad \rho_2 = k \cdot \frac{8P}{(12-x)^2} \quad (\text{γιά κάποια σταθερά } k)$$

οπότε, η συνολική μόλυνση (συνολική πυκνότητα καπνού) που δέχεται το σπίτι (από τα δύο εργοστάσια) είναι ίση με:

$$\rho = \rho(x) = \rho_1 + \rho_2 = k \cdot \frac{P}{x^2} + k \cdot \frac{8P}{(12-x)^2}$$

και της οποίας το ελάχιστο θα πρέπει να υπολογίσουμε. Αλλά:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(k \cdot \frac{P}{x^2} + k \cdot \frac{8P}{(12-x)^2} \right) = -2k \cdot \frac{P}{x^3} + k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3}$$

Επομένως:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2k \cdot \frac{P}{x^3} + k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2k \cdot \frac{P}{x^3} = k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3} \Leftrightarrow 16x^3 = 2(12-x)^3 \Leftrightarrow$$

$$8x^3 - (12-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (2x)^3 - (12-x)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

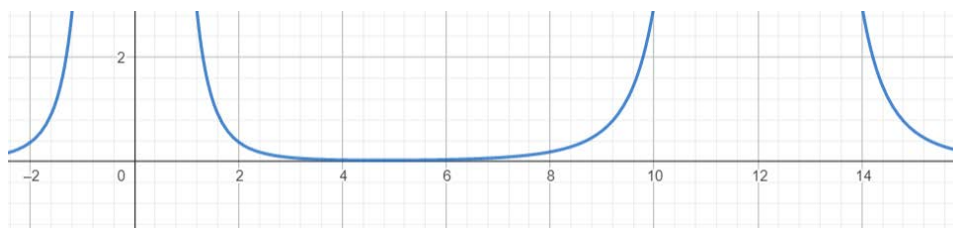
$$(2x - (12-x))((2x)^2 + (2x)(12-x) + (12-x)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - (12-x))(3x^2 + 144) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad (x \in (0,12))$$

(χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ και το ότι $3x^2 + 144 > 0$).

Επιπλέον:

$$\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-2k \cdot \frac{P}{x^3} + k \cdot \frac{16P}{(12-x)^3} \right) = 6k \cdot \frac{P}{x^4} + k \cdot \frac{48P}{(12-x)^4} > 0 \quad \forall x \in (0,12)$$

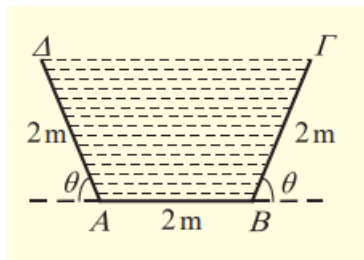


Δηλαδή το σημείο $x = 4$ είναι σημείο ελαχίστου. Επομένως, ο εργολάβος πρέπει να κτίσει το σπίτι σε απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1 .

■

Εφαρμογή 7

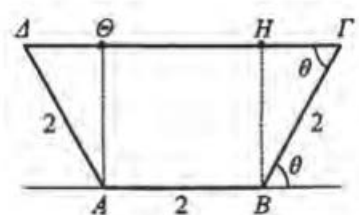
Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

Λύση

Η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ, όπως φαίνεται, είναι σχήματος τραπεζίου.



Το εμβαδόν της διατομής είναι ίσο με: $E(\theta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot A\Theta$

Αλλά, από το ορθογώνιο τρίγωνο BHΓ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{HB}{2} = \frac{A\Theta}{2} \Rightarrow HB = A\Theta = 2\eta\mu\theta.$$

Ακόμα,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{\Delta\Theta}{2} \Rightarrow H\Gamma = \Delta\Theta = 2\sigma\upsilon\nu\theta,$$

Οπότε:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Theta + \Theta H + H\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta$$

Επομένως:

$$E(\theta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot A\Theta = \frac{2 + 2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta}{2} \cdot 2\eta\mu\theta = (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 2\eta\mu\theta = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 4\eta\mu\theta$$

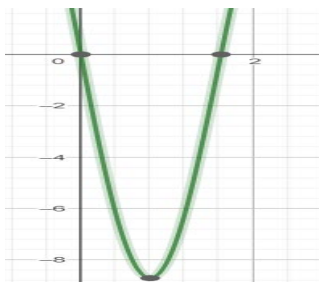
οπότε:

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= (-\eta\mu\theta) \cdot 4\eta\mu\theta + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot 4\sigma\upsilon\nu\theta = -4\eta\mu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= 4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1) = 0 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε: $x = \sigma\upsilon\nu\theta$ τότε θα πρέπει $2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$. Αλλά $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ Όμως}$$

$$E''(\theta) = (4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1))' = -16\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta - \eta\mu\theta < 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

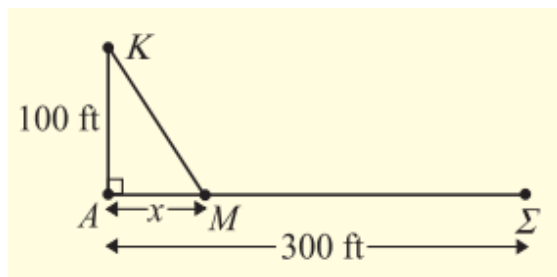


οπότε το σημείο $\theta = \frac{\pi}{3}$ είναι (το ζητούμενο) σημείο ελαχίστου.

■

Εφαρμογή 8

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300 ft μακριά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.



Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

Λύση

Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να περπατήσει από το Μ στο Σ.

Έχουμε:

$$t_1 = \frac{(KM)}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} \quad \& \quad t_2 = \frac{(M\Sigma)}{v_2} = \frac{300-x}{5}$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ είναι:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$$

και τον οποίο θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε. Αλλά:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{2} \frac{2x}{3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2}} - \frac{1}{5} = 0 \\ 5x &= 3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} \Leftrightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 100^2) \Leftrightarrow 16x^2 = 9 \cdot 100^2 \\ \Leftrightarrow x &= 75 \end{aligned}$$

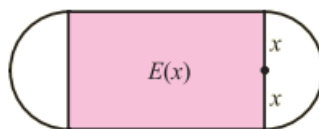
$$T''(x) = \left(\frac{x}{3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2}} - \frac{1}{5} \right)' = \frac{3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} - x \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 100^2}}}{\left(3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} \right)^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot (x^2 + 100^2) - 3x^2}{\left(3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} \right)^2 \sqrt{x^2 + 100^2}} = \frac{100^2}{\left(3 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} \right)^2 \sqrt{x^2 + 100^2}} > 0$$

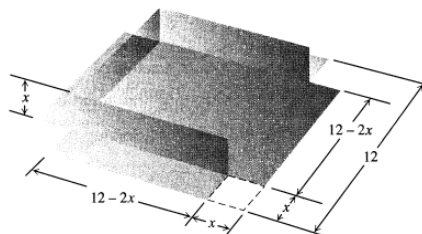
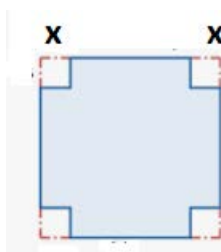
Δηλαδή, η συνάρτηση T παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 75$ ft. Άρα, όταν $x = 75$ ft, τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

Εφαρμογές

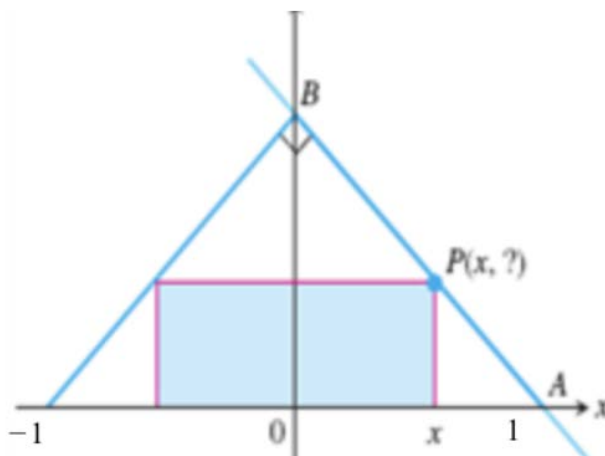
- Είναι γνωστό ότι, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



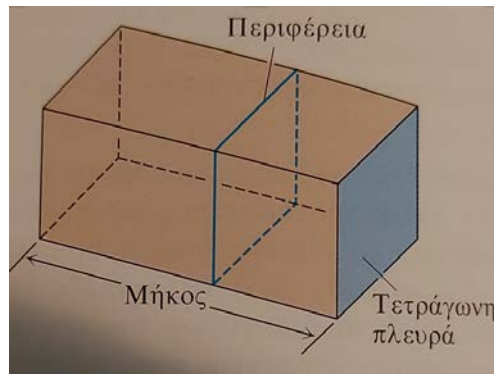
- Ένα κουτί ανοικτό από πάνω πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα τετραγωνικό φύλλο κασσιτερου διαστάσεων 15x15 cm αποκόπτοντας τέσσερα ίσα τετράγωνα από τις κορυφές του φύλλου και κατόπιν διπλώνοντας τις προεξέχουσες πλευρές. Πόσο μεγάλα πρέπει να κάνουμε τα τετράγωνα που αποκόβουμε για να έχει το κουτί τη μέγιστη χωρητικότητα;



- Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο εγγεγραμμένο σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους 2 μονάδων. Ποιό είναι το μέγιστο εμβαδόν του παραλληλογράμμου και ποιές οι διαστάσεις του;

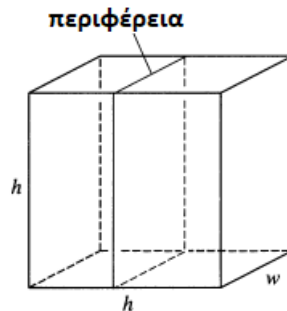


4. (α) Έστω ότι τα ταχυδρομεία δέχονται δέματα εσωτερικού μόνο όταν το άθροισμα του μήκους και της περιφέρειας του δέματος δεν υπερβαίνει τα 108 cm.

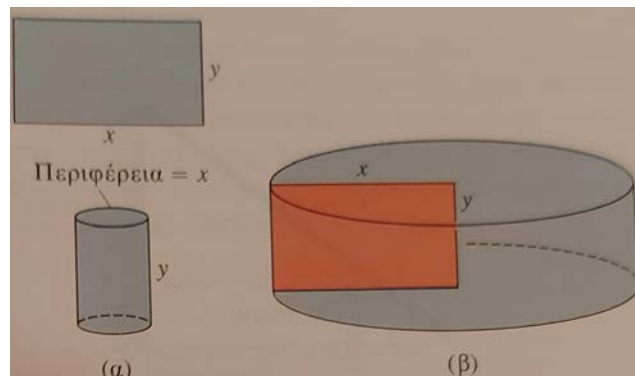


Εάν έχουμε ένα δέμα με δύο τετράγωνες πλευρές, ποιές διαστάσεις πρέπει να έχει για μέγιστη χωρητικότητα;

- (β) Έστω ότι αντί για ένα δέμα με δύο τετραγωνικές πλευρές είχαμε ένα άλλο με τέσσερες τετραγωνικές πλευρές. Ποιές διαστάσεις θα δώσουν τώρα τη μέγιστη χωρητικότητα;



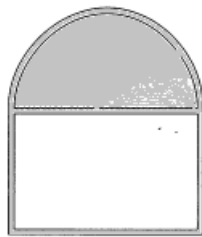
5. (α) Ένα ορθογώνιο φύλλο περιμέτρου 36 cm και διαστάσεων x και y τυλίγεται σε κύλινδρο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (α). Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις x και y για να μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;



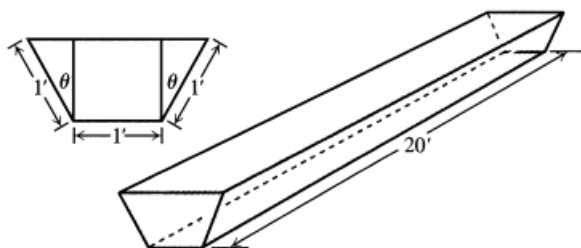
- (β) Το ίδιο φύλλο περιστρέφεται γύρω από τη μία πλευρά του y διαγράφοντας τον κύλινδρο που φαίνεται στο σχήμα (β). Για ποιές τιμές των x, y μεγιστοποιείται ο όγκος του κυλίνδρου;

6. Ένα παράθυρο έχει σχήμα ορθογωνίου στο οποίο επικάθεται ένα ημικύκλιο. Το ορθογώνιο τμήμα του παραθύρου αποτελείται από καθαρό γυαλί ενώ το γυαλί του ημικύκλιου έχει χρώμα που αφήνει να περάσει μόνο το μισό φως ανά μονάδα επιφάνειας σε σχέση με το καθαρό γυαλί. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου

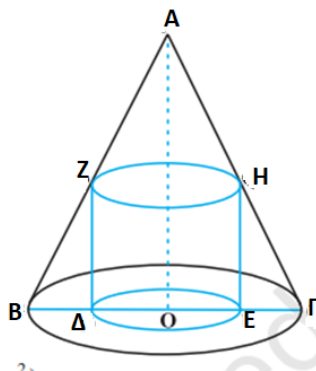
είναι σταθερή (ας πούμε c). Να βρεθούν οι διαστάσεις του παραθύρου που θα αφήσουν να περάσει το περισσότερο φως. Αγνοείτε το πάχος του πλαισίου.



7. Η σκάφη του σχήματος θα κατασκευαστεί με τις διαστάσεις που σημειώνονται. Μονάχα τη γωνία θ μπορούμε να μεταβάλλουμε. Για ποιά τιμή της θ μεγιστοποιείται ο όγκος της σκάφης;



8. Δείξτε ότι η ακτίνα ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου, με μέγιστη την εξωτερική του επιφάνεια, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος σ' έναν κώνο, είναι η μισή της ακτίνας του κώνου.



13. ΣΕΙΡΑ TAYLOR

Είναι γνωστό ότι, οι καλύτερες συναρτήσεις από πλευράς ιδιοτήτων (τιμές, ρίζες, παράγωγος, ολοκλήρωμα ακόμα και η γραφική παράσταση) είναι τα **πολυνώνυμα**. Ένα **πολυνώνιο n-οστού βαθμού** με πραγματικούς συντελεστές έχει τη μορφή:

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k=0,1,\dots,n, \quad \alpha_n \neq 0$$

Όταν έχουμε μια «πολύπλοκη» συνάρτηση **f**, προσπαθούμε να την «προσεγγίσουμε» τοπικά με ένα πολυνώνιο (αντικαθιστούμε δηλαδή τη συνάρτηση «τοπικά», δηλαδή γύρω από ένα σημείο **x=a**, με ένα κατάλληλο πολυνώνιο έτσι ώστε το σφάλμα αυτής της αντικατάστασης να είναι μικρό). Το **σφάλμα** της αντικατάστασης (προσέγγισης) της συνάρτησης **f** από ένα πολυνώνιο $P_n(x)$ δίνεται από την (συνάρτηση):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Ένα τέτοιο προσεγγιστικό πολυνώνιο, για προσέγγιση της συνάρτησης **f** στο σημείο **a**, είναι το λεγόμενο **προσεγγιστικό πολυνώνιο Taylor n^{ου} βαθμού** της **f** (στο σημείο **x=a**) και ορίζεται από τη σχέση:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Στην περίπτωση που το **a=0** έχουμε το **n^{ου} βαθμού προσεγγιστικό πολυνώνιο Maclaurin** της **f**, το οποίο θα έχει τη μορφή:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Το **σφάλμα της προσέγγισης** μπορεί ναδειχθεί (ένας από τους τρόπους υπολογισμού του, υπάρχουν αρκετοί άλλοι) ότι είναι ίσο με:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a,x)$$

Έτσι η συνάρτηση **f** είναι ίση με (στην περιοχή του σημείου **x=a**, δηλαδή σε ένα ανοικτό διάστημα **I** που περιέχει το σημείο **a**):

$$f(x) = R_n(x) + P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Η μορφή αυτή καλείται **ανάπτυγμα Taylor της f στο σημείο x=a**.

Αν **a=0** τότε το ανάπτυγμα έχει την μορφή:

$$f(x) = R_n(x) + P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

το οποίο καλείται **ανάπτυγμα Maclaurin της f**.

Αν η συνάρτηση **f** έχει παράγωγο κάθε τάξης, τότε η σειρά Taylor της f στο σημείο x=a είναι ίση με:

$$f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Αν $\alpha=0$, η σειρά Taylor της f καλείται **σειρά Maclaurin**. Δηλαδή η σειρά Maclaurin είναι της μορφής:

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

Παρατήρηση 1

Εάν η συνάρτηση f έχει παράγωγο κάθε τάξης και το υπόλοιπο R_n τείνει στο μηδέν, για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή I που περιέχει το σημείο α , τότε η συνάρτηση f περιγράφεται σε ένα σημείο $x=\alpha$ με τη βοήθεια της σειράς Taylor (στο σημείο $x=\alpha$), δηλαδή:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

ή με τη βοήθεια της σειράς Maclaurin, στο σημείο $x=0$, δηλαδή:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι, η **σειρά** (Taylor ή Maclaurin) **συγκλίνει** στη συνάρτηση f .

Τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο να υπολογίσει κανείς το υπόλοιπο $R_n(x)$. Μια εκτίμηση του υπολοίπου αυτού δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα εκτίμησης του υπολοίπου

Αν υπάρχουν θετικές σταθερές M, r τέτοιες ώστε $|f^{(n+1)}(t)| \leq M r^{n+1}$, $\forall t \in (\alpha, x)$, τότε το υπόλοιπο $R_n(x)$, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|R_n(x)| \leq M r^{n+1} \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Αν επιπλέον η f είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη, για κάθε n , σε μια περιοχή I του σημείου α , τότε το υπόλοιπο $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ και η σειρά Taylor της f συγκλίνει στην συνάρτηση f .

Εφαρμογή 1

(α) Να βρεθεί το 2^ο βαθμού πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$.

(β) Να βρεθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$.

(β) Για ποια σημεία (αν υπάρχουν) συγκλίνει η σειρά στο $\frac{1}{x}$; Ποιο το **διάστημα σύγκλισης** και ποια η **ακτίνα σύγκλισης** της σειράς αυτής;
Λύση

(α) Βρίσκοντας τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο

$\alpha=2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow & f(2) = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(2) = -\frac{1}{2^2} = (-1)^1 \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2\frac{1}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = 2\frac{1}{2^3} = (-1)^2 2! \frac{1}{2^3} \end{aligned}$$

Επομένως, το 2^ο βαθμού πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$ είναι:

$$P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2! \frac{1}{2^3}}{2!}(x-2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2$$

(α) Βρίσκοντας τις διαδοχικές παραγώγους της $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} & \Rightarrow & f(2) = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(2) = -\frac{1}{2^2} = (-1)^1 \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2\frac{1}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = 2\frac{1}{2^3} = (-1)^2 2! \frac{1}{2^3} \\ f'''(x) &= -2 \cdot 3 \frac{1}{x^4} & \Rightarrow & f'''(2) = -2 \cdot 3 \frac{1}{2^4} = (-1)^3 3! \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$$

Η **σειρά Taylor** της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $\alpha=2$, είναι:

$$\begin{aligned} & f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots = \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2! \frac{1}{2^3}}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{(-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}}{n!}(x-2)^n + \dots = \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n + \dots = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ρίζας, με $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n$, η παραπάνω σειρά συγκλίνει εάν:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Αλλά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n\right|} = \frac{|x-2|}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{2} < 1$$

Δηλαδή η σειρά συγκλίνει εάν:

$$\frac{|x-2|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

Για $x=4$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (4-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots$$

Δηλαδή, η σειρά αποκλίνει.

Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (0-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots = +\infty$$

και πάλι η σειρά αποκλίνει.

Άρα η σειρά συγκλίνει στα σημεία του διαστήματος $(0,4)$. Το διάστημα $(0,4)$ καλείται **διάστημα σύγκλισης** της σειράς, ενώ το μισό του μήκους του εν λόγω διαστήματος (όταν το διάστημα είναι πεπερασμένο) καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της σειράς και συμβολίζεται με **R**, δηλαδή εδώ $R=2$.

Για όλα τα x : $0 < x < 4$, επειδή η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση, έχουμε:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n$$

■

Εφαρμογή 2

(α) Να βρεθεί το 3^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

(β) Να βρεθεί η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Λύση

(α) Βρίσκουμε τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης και τρίτης τάξης της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ στο σημείο $a=2$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(0) = \frac{0}{1-0} = 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow & f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\
 f''(x) &= 2 \frac{1}{(1-x)^3} & \Rightarrow & f''(0) = 2 \frac{1}{(1-0)^3} = 2! \\
 f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-x)^4} & \Rightarrow & f'''(0) = 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 3!
 \end{aligned}$$

Επομένως, το 3^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι ίσο με:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 0 + x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 = x + x^2 + x^3$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(0) = \frac{0}{1-0} = 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & \Rightarrow & f'(0) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1 \\
 f''(x) &= 2 \frac{1}{(1-x)^3} & \Rightarrow & f''(0) = 2 \frac{1}{(1-0)^3} = 2! \\
 f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(x-1)^4} & \Rightarrow & f'''(0) = 2 \cdot 3 \frac{1}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 3! \\
 & \dots\dots\dots \\
 f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!
 \end{aligned}$$

Άρα η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ισούται με:

$$f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Παρατήρηση 2

(1) Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλέγει κανείς αν χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι, η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\frac{1}{1-x}$ ισούται με:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Οπότε $\frac{x}{1-x} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

- (2) Η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1-x}$ συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)$ για όλα τα x : $-1 < x < 1$ γιατί, χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου με $a_n = x^n$, έχουμε (για σύγκλιση):

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Στο σημείο $x=1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1+1+1\ldots = +\infty$ δηλαδή αποκλίνει ενώ στο

$x=-1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1\ldots$ και πάλι αποκλίνει Άρα, το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω σειράς είναι το $(-1,1)$ και η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $R=1$.

Για όλα τα x : $-1 < x < 1$, επειδή η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

■

Εφαρμογή 3

Χρησιμοποιώντας ότι $e < 4$, υπολογίστε το $e (= e^1)$ με ακρίβεια $3^{\text{ων}}$ δεκαδικών ψηφίων ή ισοδύναμα με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

Λύση

Για τον παραπάνω υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε ένα $n^{\text{οστον}}$ πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση e^x (με n προς προσδιορισμό). Είναι γνωστό ότι το σφάλμα (προσέγγισης/εκτίμησης) σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{για κάποιο } \xi$$

Αλλά, $(e^x)', (e^x)'' , (e^x)''' , \ldots , (e^x)^{(n)} = e^x$, $\forall n$, επομένως $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$ και έτσι:

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{4}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

(γιατί $x=1 \Rightarrow e^x = e = 2.71828 < 4$). Οπότε:

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{4}{(n+1)!} |1|^{n+1} = \frac{4}{(n+1)!}$$

Θέλουμε:

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{4}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} = 0,001.$$

Αν $n=1$, τότε: $\frac{4}{(1+1)!} = 2 > 0,001$

Αν $n=2$, τότε: $\frac{4}{(2+1)!} = \frac{2}{3} = 0,666\ldots > 0,001$

$$\text{Αν } n=3, \text{ τότε: } \frac{4}{(3+1)!} = \frac{4}{24} = 0,166... > 0,001$$

$$\text{Αν } n=4, \text{ τότε: } \frac{4}{(4+1)!} = \frac{4}{120} = 0,033... > 0,001$$

$$\text{Αν } n=5, \text{ τότε: } \frac{4}{(5+1)!} = \frac{4}{720} = 0,0055... > 0,001$$

$$\text{Αν } n=6, \text{ τότε: } \frac{4}{(6+1)!} = 0,0007... < 0,001.$$

Επομένως χρειαζόμαστε ένα 6^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση e^x και:

$$\begin{aligned} e^1 &\simeq 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \\ &\simeq 1 + 1 + 0,167 + 0,042 + 0,008 + 0,001 = 2,718 \quad (\text{πραγματική τιμή } e \simeq 2,7182818...) \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί ο $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

Λύση

Για τον παραπάνω υπολογισμό, επειδή $\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right)$, θα χρησιμοποιήσουμε ένα $n^{\text{ο}}$ πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$ (με n προς προσδιορισμό). Είναι γνωστό ότι το σφάλμα (προσέγγισης/εκτίμησης) σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{για κάποιο } \xi$$

Αλλά, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ οπότε:

$$\left| R_{n+1}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right|$$

Θέλουμε

$$\left| R_{n+1}\left(\frac{1}{5}\right) \right| \leq \left| \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{(n+1)} \right| < 10^{-3} = 0,001$$

Αν $n=1$, τότε: $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{3} = 0,013 > 0,001$

Αν $n=2$, τότε: $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{4} = 0,002 > 0,001$

Αν $n=3$, τότε: $\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^4}{5} = 0,00032 < 0,001$

Επομένως χρειαζόμαστε ένα 3^ο βαθμού πολυώνυμο Maclaurin για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$ και:

$$\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} = 0,1827 \quad (\text{πραγματική τιμή } 0,18232\dots)$$

■

Η σειρά Maclaurin μερικών βασικών συναρτήσεων δίνεται παρακάτω.

Σειρά Maclaurin	Διάστημα σύγκλισης
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$-1 < x < 1$
$\eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x < 1$

Εφαρμογή 5

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin των συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = e^{ax}$ β) $f_2(x) = x^2 e^{-x}$ γ) $f_3(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$

Λύση

Στον υπολογισμό της σειράς Maclaurin των παραπάνω συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τη σειρά Maclaurin ήδη γνωστών συναρτήσεων.

(α) Είναι γνωστό ότι:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....$$

Άρα η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f_1(x)=e^{ax}$ ισούται με:

$$\begin{aligned} e^{ax} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = 1+ax+\frac{(ax)^2}{2!}+\frac{(ax)^3}{3!}+\frac{(ax)^4}{4!}+.....= \\ &= 1+ax+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^3}{3!}x^3+\frac{a^4}{4!}x^4+..... \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει εάν υπολογίσουμε τις διαδοχικές παραγώγους της συνάρτησης $f_1(x)=e^{ax}$ (εργαζόμενοι ανάλογα με την εφαρμογή 1).

(β) Πάλι, από το ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+.....$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^4}{4!}+.....= \\ &= 1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+..... \end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} x^2 e^{-x} &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = x^2 \left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+..... \right) = \\ &= x^2-x^3+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^5+\frac{1}{4!}x^6+..... \end{aligned}$$

(γ) Είναι γνωστό ότι:
$$\eta_{\mu x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+.....$$

Άρα η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f_3(x)=\eta_{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)$ ισούται με

$$\begin{aligned} \eta_{\mu x}\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{7!} + \\ &= \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7 \cdot 7!} + \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 4

Με τη βοήθεια των σειρών Taylor (ή Maclaurin) μπορούμε να υπολογίσουμε αθροίσματα άλλων σειρών.

Εφαρμογή 6

(1) Να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα:

$$1 - \ln 3 + \frac{1}{2!}(\ln 3)^2 - \frac{1}{3!}(\ln 3)^3 + \frac{1}{4!}(\ln 3)^4 + \dots$$

(2) Να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα:

$$\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 - \frac{1}{7!}\pi^7 + \dots$$

Λύση

(1) Η σειρά «μοιάζει» με την $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$. Άρα η δοθείσα σειρά είναι ίση με :

$$1 - \ln 3 + \frac{1}{2!}(\ln 3)^2 - \frac{1}{3!}(\ln 3)^3 + \frac{1}{4!}(\ln 3)^4 + \dots = e^{-\ln 3} = e^{\ln \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

(2) Όμοια ξέρουμε ότι $\eta \mu x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

$$\text{Άρα } \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots = \eta \mu \pi = 0.$$

■

Εφαρμογή 7

Υπολογίστε το 3^ο βαθμού (προσεγγιστικό) πολώνυμο Taylor στο σημείο $a = -1$ για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Επίσης το 4^ο και 6^ο βαθμού και να γίνει η γραφική παράσταση των πολωνύμων και της συνάρτησης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

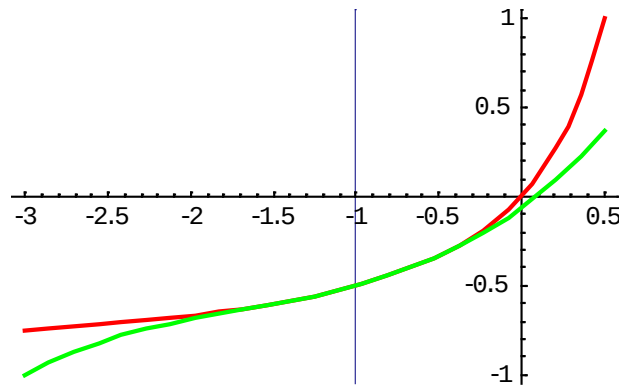
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1-x} & \Rightarrow & f(-1) = -\frac{1}{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2} & \Rightarrow & f'(-1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \\ f''(x) &= 2 \frac{1}{(x-1)^3} & \Rightarrow & f''(-1) = 2 \cdot \frac{1}{8} = 2! \cdot \frac{1}{2^3} \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3 \frac{1}{(x-1)^4} & \Rightarrow & f'''(-1) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} = 3! \cdot \frac{1}{2^4} \\ & \dots & & \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(-1) = n! \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Άρα το $n^{\text{ο}}$ βαθμού πολώνυμο Taylor στο σημείο $a = -1$ για την $f(x) = \frac{x}{1-x}$ είναι ίσο με:

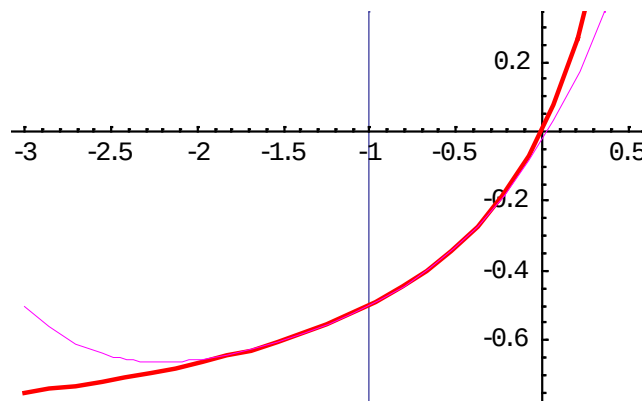
$$\begin{aligned} f(-1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (x-(-1))^k &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{k!}{2^{k+1}k!} (x-(-1))^k = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} (x+1)^k = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} (x+1)^1 + \frac{1}{2^3} (x+1)^2 + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} (x+1)^n \end{aligned}$$

(α) **3^ο βαθμού:** $P_3(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3$



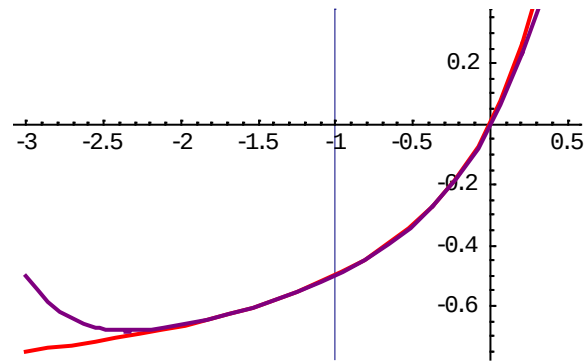
(με κόκκινο χρώμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης)

(β) **4^ο βαθμού:** $P_4(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{32}(x+1)^4$

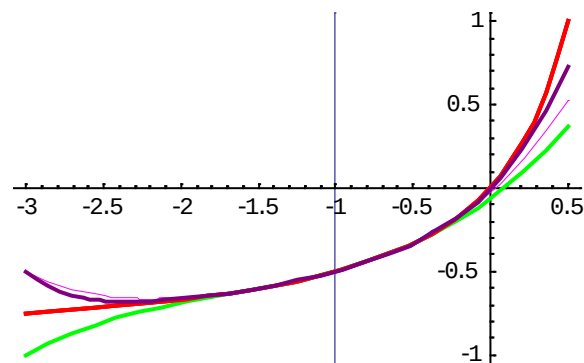


(γ) **6^ο βαθμού:**

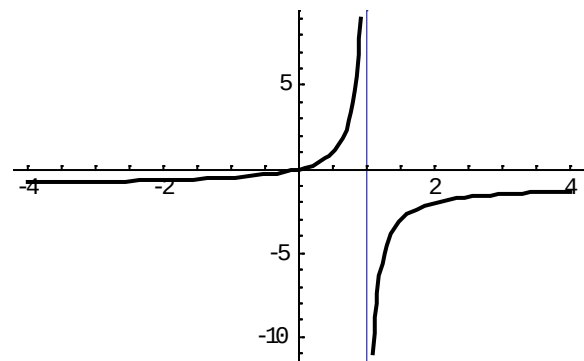
$$P_6(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{32}(x+1)^4 + \frac{1}{64}(x+1)^5 + \frac{1}{128}(x+1)^6$$



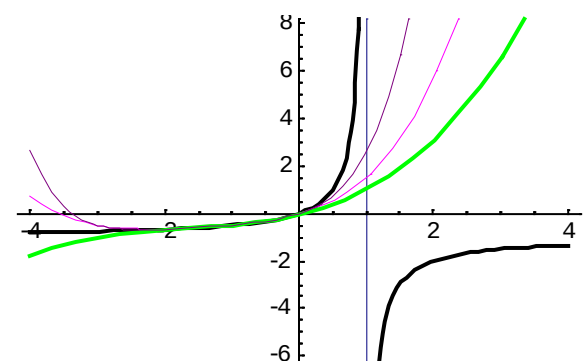
(δ) Στο παρακάτω γράφημα υπάρχει η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ (μερική) και των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a = -1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού.



(ε) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{1-x}$ φαίνεται παρακάτω:



(στ) Γραφική Παράσταση $f(x) = \frac{x}{1-x}$ και των πολωνύμων Taylor στο σημείο $a = -1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού.



Από το σχήμα είναι φανερό ότι η εκτίμηση της f , με τη βοήθεια των πολωνύμων Taylor στο σημείο $\alpha = -1$ 3^{ου}, 4^{ου} και 6^{ου} βαθμού, είναι καλή γύρω από το σημείο $\alpha = -1$

■

Παρατήρηση 5

Με τη βοήθεια των σειρών ή αναπτυγμάτων Taylor (ή Maclaurin) μπορούμε να υπολογίσουμε

(α) προσεγγιστικές τιμές συναρτήσεων

(β) ολοκληρώματα συναρτήσεων κ.λ.π.

Εφαρμογή 8

Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή του $\ln 0,97$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Άρα για $x = -0,03$ έχουμε

$$\ln 0,97 = \ln(1 - 0,03) = -0,03 - \frac{(-0,03)^2}{2!} + \frac{(-0,03)^3}{3!} - \frac{(-0,03)^4}{4!} + \dots \approx -0,0304592$$

■

Εφαρμογή 9

Υπολογίστε (προσεγγιστικά) το:

$$\int_0^1 \frac{\eta \mu x}{x} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin:

$$\eta \mu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\eta \mu x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right) \Bigg|_0^1 \approx 0,946083 \end{aligned}$$

(το σφάλμα της προσέγγισης χρησιμοποιώντας π.χ. του τέσσερες πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin είναι το πολύ 0,0000003(!!!)).

■

14. Δυναμοσειρές

Μια **δυναμοσειρά** είναι μια άπειρη σειρά της μορφής:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-c)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-c) + \alpha_2(x-c)^2 + \alpha_3(x-c)^3 + \dots$$

όπου α_n είναι ο συντελεστής του $n^{\text{ου}}$ όρου, c είναι μια σταθερά, το δε x μεταβάλλεται γύρω από το c (για τον λόγο αυτό, λέμε ότι η σειρά έχει **κέντρο** το c ή είναι **δυναμοσειρά γύρω από το σημείο c**). Η σειρά αυτή είναι συνήθως (όχι όμως απαραίτητα) η σειρά Taylor κάποιας γνωστής συνάρτησης.

Σε μερικές περιπτώσεις το $c=0$ π.χ όταν θεωρούμε τη σειρά Maclaurin. Στην περίπτωση αυτή, η δυναμοσειρά έχει την απλούστερη μορφή:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

Παραδείγματα

(α) η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

για $|x| < 1$, είναι ένα από τα σπουδαιότερα παραδείγματα δυναμοσειράς.

(β) Ένα ακόμα παράδειγμα είναι αυτό της **εκθετικής** συνάρτησης:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(γ) Ένα τρίτο παράδειγμα είναι αυτό της συνάρτησης του **ημιτόνου**:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Αυτά είναι επίσης παραδείγματα σειράς Taylor.

Ακτίνα σύγκλισης

Μια δυναμοσειρά θα συγκλίνει για μερικές τιμές του x και θα αποκλίνει για άλλες. Όλες οι δυναμοσειρές συγκλίνουν στο σημείο $x = c$. Εάν το c δεν είναι το μόνο σημείο που συγκλίνει η δυναμοσειρά, θα υπάρχει ένας αριθμός r με $0 < r \leq \infty$, τ.ω. η δυναμοσειρά να συγκλίνει όταν $|x - c| < r$ και να αποκλίνει όταν $|x - c| > r$. Ο αριθμός r καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Η ακτίνα σύγκλισης, εφ' όσον το όριο υπάρχει, δίνεται από τον τύπο:

$$r^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| \quad (*)$$

Η δυναμοσειρά θα συγκλίνει απόλυτα όταν $|x - c| < r$. Για $|x - c| = r$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε, γενικά, αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αντικαθιστώντας όμως το $x = c$ προκύπτει μια σειρά της οποίας η σύγκλιση εξετάζεται με ένα από τα γνωστά κριτήρια.

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Να εξετάσετε τη σύγκλιση της δυναμοσειράς και στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης.

Λύση

Πρώτος τρόπος: Είναι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$$

Λίγο διαφορετικά:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt[1]{1} = 1$$

και από τα δύο αυτά όρια βρίσκουμε (με χρήση του τύπου (*)) ότι, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(1-1, 1+1) = (0, 2)$, στο οποίο θα πρέπει να επισυνάψουμε ένα ή κανένα ή και τα δύο άκρα του.

Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (\text{εναλλάσσουσα})$$

και συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz γιατί η ακολουθία $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι

$$(i) \text{ φθίνουσα: } n < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \alpha_n \text{ και}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και αποκλίνει γιατί είναι σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p \leq 1$ αλλά και γιατί είναι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[0,2)$.

Δεύτερος τρόπος: Είναι (με τη βοήθεια του κριτηρίου του λόγου, των απολύτων τιμών)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x-1| = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}} \cdot |x-1| = |x-1|$$

ή λίγο διαφορετικά (με τη βοήθεια του κριτηρίου της $n^{\text{οστης}}$ ρίζας)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} |x-1| = |x-1|$$

Άρα η σειρά συγκλίνει όταν $|x-1| < 1$ και αποκλίνει όταν $|x-1| > 1$. Και από τα δύο αυτά όρια βρίσκουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με 1 και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(1-1, 1+1) = (0,2)$, στο οποίο θα πρέπει να επισυνάψουμε ένα ή κανένα ή και τα δύο άκρα του. Συνεχίζουμε όπως με τον πρώτο τρόπο.

•

Εφαρμογή 2

(α) Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Τι μπορείτε να πείτε για την σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης;

(β) Εάν είναι γνωστό ότι: $\text{τοξεφ}\chi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, να δείξετε ότι $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (των απολύτων τιμών), έχουμε:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2 \quad (\text{γιατί } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1)$$

Εάν $-1 < x < 1$ (δηλαδή $x^2 < 1$), τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα, οπότε συγκλίνει.

Για $x = -1$, η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

η οποία είναι εναλλάσσουσα (αρμονική), οπότε συγκλίνει (απόδειξη ανάλογη της εφαρμογής 1, με το κριτήριο του Leibniz).

Επίσης, για $x = 1$, η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

η οποία είναι και αυτή εναλλάσσουσα αρμονική, οπότε συγκλίνει.

Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, είναι: $[-1, 1]$, ενώ η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $R = 1$

(β) Επειδή $\text{τοξεφ}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ (για τα x που ανήκουν στο διάστημα σύγκλισης), έχουμε για $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \text{τοξεφ}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

•

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (των απολύτων τιμών), έχουμε:

$$\left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1) \times |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad (> 1)$$

γιά όλα τα x , εκτός από την περίπτωση που το $x=0$ (και το άθροισμα θα είναι 0). Το διάστημα σύγκλισης σε αυτή την περίπτωση είναι μόνο το σημείο 0 και η ακτίνα σύγκλισης $R=0$.

•

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (των απολύτων τιμών), έχουμε:

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό. Επομένως, το διάστημα σύγκλισης σε αυτή την περίπτωση είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $R = \infty$.

•

Πρόταση (παράγωγος δυναμοσειράς)

Εάν έχουμε μια δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ που συγκλίνει σε κάποιο διάστημα (x_0-r, x_0+r) , για (κάποιο) $r \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης ισχύει ότι, η παράγωγός της $f(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

Δηλαδή, η παράγωγος δυναμοσειρά προκύπτει παραγωγίζοντας κάθε έναν από τους όρους της αρχικής σειράς και αθροίζοντάς τους.

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί η (δυναμοσειρά) σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (στο διάστημα σύγκλισής της).

Λύση

1^{ος} τρόπος

Χρησιμοποιώντας το ότι: για $-1 < x < 1$ έχουμε:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+x^4+.....$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+(-x^2)^4+..... = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-.....$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής με x παίρνουμε τελικά:

$$\frac{x}{1+x^2} = x-x^3+x^5-x^7+x^9-..... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

2^{ος} τρόπος

Χρησιμοποιώντας το ότι: για $-1 < x < 1$ έχουμε:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$$

προκύπτει ότι:

$$\ln(1+x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} + \frac{(x^2)^5}{5} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} -$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής έχουμε:

$$\left(\ln(1+x^2) \right)' = \frac{2x}{1+x^2} = 2x - \frac{4x^3}{2} + \frac{6x^5}{3} - \frac{8x^7}{4} + \frac{10x^9}{5} = 2(x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

αποτέλεσμα που συμπίπτει με το προηγούμενο

■

15. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός 1

Εάν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (όπου I ένα διάστημα), και έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

τότε, η συνάρτηση F καλείται **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγωγος** της f στο I .

Παρατήρηση

Εάν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f στο I , τότε υπάρχουν άπειρες και είναι οι συναρτήσεις της μορφής $F+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2

Εάν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, και έστω ότι υπάρχει μια αρχική συνάρτηση $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ της f στο I . Τότε, το **αόριστο ολοκλήρωμα** της **f στο I** (συμβολίζεται με $\int f(x)dx$) είναι το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων $F+c$, $c \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

Παρατήρηση

Είναι φανερό ότι ισχύει: $\int f'(x)dx = f(x)+c$

Πρόταση 1 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Εάν $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(\alpha) \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(\beta) \int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Παρατήρηση

Δεν ισχύει (εν γένει): $\int (f(x) \cdot g(x))dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

Ακόμα, **δεν ισχύει** (εν γένει): $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

Πρόταση 2 (αόριστο ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων)

Ισχύουν τα παρακάτω:

$$(1) \int dx = x + c$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$(3) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$(4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$$

$$(5) \int \eta \mu x dx = -\sigma \nu x + c$$

$$(6) \int \sigma \nu x dx = \eta \mu x + c$$

$$(7) \int \frac{1}{\sigma \nu^2 x} dx = \epsilon \phi x + c \quad ((\epsilon \phi x)' = \frac{1}{\sigma \nu^2 x})$$

$$(8) \int e^x dx = e^x + c$$

$$(9) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, \quad 0 < a \neq 1 \quad ((a^x)' = a^x \ln a)$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int (e^{x+2} + \sqrt{x}) dx \quad (\beta) \int \frac{1 - \sigma \nu^2 x}{\sigma \nu^2 x} dx \quad (\gamma) \int x \sqrt{x} dx$$

$$(\delta) \int \frac{x + \sqrt{x}}{x} dx \quad (\epsilon) \int (x - \sqrt{x})^2 dx \quad (\sigma \tau) \int \frac{\sigma \nu^2 x}{1 - \eta \mu x} dx$$

$$(\zeta) \int \frac{\sigma \nu 2x}{\eta \mu x + \sigma \nu x} dx$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} \int (e^{x+2} + \sqrt{x}) dx &= \int e^x e^2 dx + \int \sqrt{x} dx = e^2 \int e^x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = e^2 \int e^x dx + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= e^2 e^x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = e^{x+2} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$(\beta) \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = \epsilon\phi x - x + c$$

$$(\gamma) \int x\sqrt{x} dx = \int x x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$$

(δ)

$$\begin{aligned} \int \frac{x+\sqrt{x}}{x} dx &= \int \frac{x}{x} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = x + \int x^{\frac{1}{2}-1} dx = x + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= x + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + c = x + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$(\epsilon) \int (x-\sqrt{x})^2 dx = \int x^2 dx + 2 \int x\sqrt{x} dx + \int (\sqrt{x})^2 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$$

(στ)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1-\eta\mu x} dx &= \int \frac{1-\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu x} dx = \int \frac{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{1-\eta\mu x} dx = \int (1+\eta\mu x) dx = \\ &= \int dx + \int \eta\mu x dx = x - \sigma\upsilon\nu x + c \end{aligned}$$

(ζ) Είναι γνωστό ότι: $\sin 2x = \sin^2 x - \eta\mu^2 x$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx &= \int \frac{\sin^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \\ &= \int (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx = \int \sigma\upsilon\nu x dx - \int \eta\mu x dx = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c \end{aligned}$$

■

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 3

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, και έστω ότι υπάρχει μια παράγουσα συνάρτηση $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ της f στο I , δηλαδή $\int f(x) dx = F(x) + c$. Η ποσότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$** ή **ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) της συνάρτησης f από**

το σημείο α μέχρι το σημείο β. Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται/αποδεικνύεται ότι είναι ίσο με:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Παρατήρηση

Το ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, \beta]$ ορίζεται γενικότερα/αυστηρότερα με τη βοήθεια διαμερίσεων του διαστήματος $[a, \beta]$.

Πρόταση 3 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Εάν $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

$$(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} c f(x) dx = c \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (\text{από το } (\alpha), (\beta): \text{ γραμμικότητα ορισμένου ολοκληρώματος})$$

$$(\gamma) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \quad \alpha < \gamma < \beta$$

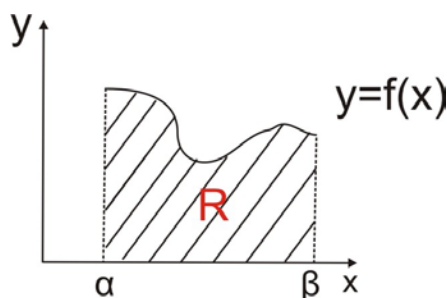
$$(\delta) \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$(\epsilon) \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

Παρατήρηση (ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος)

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και R το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$. Εάν $f(x) \geq 0$, τότε το **εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R** , είναι ίσο με:

$$E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$



Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

$$(α) \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx \quad (β) \int_0^4 (x-\sqrt{x})^2 \, dx \quad (γ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx$$

Λύση

(α) Είδαμε ότι: $\int x\sqrt{x} \, dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$ οπότε:

$$\int_0^1 x\sqrt{x} \, dx = \left. \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \right|_0^1 = \frac{2}{5} 1^2 \sqrt{1} - \frac{2}{5} 0^2 \sqrt{0} = \frac{2}{5}$$

(β) Είδαμε ότι: $\int (x-\sqrt{x})^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$ οπότε:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (x-\sqrt{x})^2 \, dx &= \left. \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = \frac{4^3}{3} + \frac{4}{5} 4^2 \sqrt{4} + \frac{4^2}{2} - \frac{0^3}{3} - \frac{4}{5} 0^2 \sqrt{0} - \frac{0^2}{2} = \\ &= \frac{64}{3} + \frac{64}{5} \sqrt{4} + 8 = .. \end{aligned}$$

(γ) Είδαμε ότι: $\int \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$ οπότε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \, dx = \left. \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$$

■

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Πρόταση 1

Εάν $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες, με συνεχείς πρώτες παραγώγους, τότε ισχύει:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Πράγματι, είναι γνωστός ο κανόνας παραγώγισης του γινομένου συναρτήσεων:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Απ' όπου, ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε τον κανόνα:

$$\begin{aligned} \int (f(x)g(x))' dx &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow \\ \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int x^2 e^x dx$$

$$(\beta) \int \ln x dx$$

$$(\gamma) \int x \eta\mu 2x dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} (\alpha) \int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int x' e^x dx \right) = \\ &= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c \end{aligned}$$

$$(\beta) \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

(γ)

$$\begin{aligned} \int x \cdot \eta\mu 2x dx &= \int x \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)' dx = -\frac{x \sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \frac{1}{2} \int x' (-\sigma\upsilon\nu 2x) dx = -\frac{x \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x dx = \\ &= -\frac{x \sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{\eta\mu 2x}{4} + c \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int x \ln x dx$$

$$(\beta) \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 (\ln x)' \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} + c\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx &= \int \left(-\frac{1}{x} \right)' \ln x \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x} (\ln x)' \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x} \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int x^{-2} \, dx = -\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες κάνουμε, συνήθως, όταν βρισκόμαστε στις ακόλουθες καταστάσεις: (ή η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι)

(α) γινόμενο πολυωνυμικής με εκθετική ή λογαριθμική

(β) γινόμενο πολυωνυμικής με τριγωνομετρική (ημίτονο ή συνημίτονο)

(γ) γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική (ημίτονο ή συνημίτονο)

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int e^x \sin x \, dx$

Λύση

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx = e^x \sin x + \int e^x \eta \mu x \, dx = \\ &= e^x \sin x + \int (e^x)' \eta \mu x \, dx = e^x \sin x + e^x \eta \mu x - \int e^x (\eta \mu x)' \, dx = \\ &= e^x \sin x + e^x \eta \mu x - \int e^x \cos x \, dx\end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x + e^x \eta \mu x - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x + e^x \eta \mu x \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x + e^x \eta \mu x}{2} + c$$

■

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \eta \mu (\ln x) \, dx$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu(\ln x) dx &= \int x' \eta\mu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - \int x \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - \int \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = \\ &= x \eta\mu(\ln x) - \int x' \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) - \int x \frac{1}{x} \eta\mu(\ln x) dx = \\ &= x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) - \int \eta\mu(\ln x) dx\end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } \int \eta\mu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) - \int \eta\mu(\ln x) dx$$

(μεταφέροντας το $\int \eta\mu(\ln x) dx$ στο αριστερό μέλος)

$$\Rightarrow 2 \int \eta\mu(\ln x) dx = x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \eta\mu(\ln x) dx = \frac{x \eta\mu(\ln x) - x \sigma\upsilon\nu(\ln x)}{2} + c$$

■

Παρατήρηση (αναδρομικές σχέσεις)

Πολλές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μια συνάρτησης το οποίο εξαρτάται από κάποιο ακέραιο αριθμό n (συνήθως κάποιος από τους παράγοντες της συνάρτησης που θέλουμε να ολοκληρώσουμε είναι υψωμένος στη δύναμη n). Στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό καταλήγουμε σε μια **αναδρομική σχέση**, μια σχέση δηλαδή που συνδέει αυτό το ολοκλήρωμα με κάποιο άλλο, του ίδιου τύπου, ολοκλήρωμα αλλά το δεύτερο ολοκλήρωμα εξαρτάται τώρα από κάποιον από τους προηγούμενους (του n) ακέραιους (δηλαδή τον $n-1$, $n-2$, ...).

Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό του πως υπολογίζουμε τέτοιου τύπου ολοκληρώματα.

Εφαρμογή 5

(α) Εάν $I_n = \int x^n e^x dx$, τότε να δειχθεί ότι: $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$

(β) να υπολογιστεί το I_3

(γ) να υπολογιστεί το $\int_0^1 x^3 e^x dx$

Λύση

(α) Έχουμε, κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned}I_n &= \int x^n e^x dx = \int x^n (e^x)' dx = x^n e^x - \int e^x (x^n)' dx = \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}\end{aligned}$$

(β) Από το (α) έχουμε:

$$I_3 = \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_2$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1$$

$$I_1 = x e^x - I_0 \quad \text{οπου} \quad I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + c$$

Δηλαδή:

$$I_3 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x e^x - I_0)) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$$

(γ) χρησιμοποιώντας το (β), έχουμε:

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = \left(x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c \right) \Big|_0^1 = e - 3e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e$$

■

Εφαρμογή 6

Αν $I_n = \int (\ln x)^n dx$, για $n \in \mathbb{N}^*$ και $x \in (0, +\infty)$,

(α) να αποδείξετε την αναδρομική σχέση $I_n + nI_{n-1} = x(\ln x)^n$

(β) να υπολογίσετε το I_3 .

Λύση

(α) Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_n &= \int (x)' (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x n (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = \\ &= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1} \end{aligned}$$

οπότε ισχύει η αναδρομική σχέση : $I_n + nI_{n-1} = x(\ln x)^n$.

(β) Για να υπολογίσουμε το I_3 , υπολογίζουμε αρχικά το I_1 :

$$I_1 = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

και κατόπιν χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση :

$$I_2 + 2I_1 = x(\ln x)^2 \quad \text{ή} \quad I_2 = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$$

$$I_3 + 3I_2 = x(\ln x)^3 \quad \text{ή} \quad I_3 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + c.$$

■

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ**Πρόταση 1**

Έστω $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: g(I) \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η g είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η f είναι συνεχής και έστω ότι $\int f(x)dx = F(x) + c$. Το ολοκλήρωμα:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(g(x)) + c$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$(α) \int \frac{1}{x+2} dx \quad (β) \int 3x(x^2+2)^2 dx \quad (γ) \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx \quad (δ) \int \eta\mu 2x dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε $u=x+2 \Rightarrow du=dx$ και

$$\int \frac{1}{x+2} dx \stackrel{\substack{u=x+2 \\ du=dx}}{=} \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c \stackrel{u=x+2}{=} \ln|x+2| + c$$

(β) Θέτουμε $u=x^2+2 \Rightarrow du=2x dx$ και

$$\int 3x(x^2+2)^2 dx = \frac{3}{2} \int 2x(x^2+2)^2 dx = \frac{3}{2} \int u^2 du = \frac{3}{2} \frac{u^3}{3} + c \stackrel{u=x^2+2}{=} \frac{(x^2+2)^3}{2} + c$$

(γ) Θέτουμε $u=1-2x^2 \Rightarrow du=-4x dx$ και

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx &= -\frac{1}{4} \int -4x\sqrt{1-2x^2} dx = -\frac{3}{4} \int \sqrt{u} du = -\frac{3}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{3}{4} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{3}{4} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= -\frac{2}{4} u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{2} \sqrt{u^3} + c \stackrel{u=1-2x^2}{=} -\frac{1}{2} \sqrt{(1-2x^2)^3} + c \end{aligned}$$

(δ) Θέτουμε $u=2x \Rightarrow du=2dx$ και

$$\int \eta\mu 2x dx = \frac{1}{2} \int \eta\mu u du = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu u + c \stackrel{u=2x}{=} -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x + c$$

■

Παρατήρηση

Όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα με αντικατάσταση, προσοχή πρέπει να γίνεται αλλαγή και στα όρια ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 x^2 (x^3+2)^5 dx$.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Θέτουμε $u=x^3+2 \Rightarrow du=3x^2 dx$ και (για τα νέα όρια ολοκλήρωσης):

εάν $x=0 \Rightarrow u=0^3+2=2$ ενώ εάν $x=2 \Rightarrow u=2^3+2=10$.

Επομένως:

$$\int_0^2 x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int_0^2 3x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int_2^{10} u^5 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} \Big|_2^{10} = \frac{1}{18} \cdot 10^6 - \frac{1}{18} \cdot 2^6 = \dots$$

2^{ος} τρόπος

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα, και χρησιμοποιούμε τα παλιά όρια ολοκλήρωσης

Θέτουμε $u=x^3+2 \Rightarrow du=3x^2 dx$. Επομένως

$$\int x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18} \cdot u^6 + c = \frac{1}{18} \cdot (x^3+2)^6 + c$$

Οπότε:

$$\int_0^2 x^2 (x^3+2)^5 dx = \frac{1}{18} \cdot (x^3+2)^6 \Big|_0^2 = \frac{1}{18} \cdot (2^3+2)^6 - \frac{1}{18} \cdot (0^3+2)^6 = \frac{1}{18} \cdot 10^6 - \frac{1}{18} \cdot 2^6 = \dots$$

■

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(α) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (β) \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (γ) \int x e^{x^2} dx \quad (δ) \int \frac{x}{(x^2+1)^{100}} dx$$

$$(ε) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (στ) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (ζ) \int \frac{\varepsilon \varphi^7 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε: $u=1-x^2 \Rightarrow du=-2x dx$ και

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot u^{\frac{1}{2}+1} + c = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε: $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx$ και

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

(γ) Θέτουμε: $u=x^2 \Rightarrow du=2x dx$ και

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

(δ) Θέτουμε: $u=x^2+1 \Rightarrow du=2x dx$ και

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)^{100}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^{100}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{100}} du = \frac{1}{2} \int u^{-100} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-100+1} u^{-100+1} + c = \\ &= -\frac{1}{198} \frac{1}{u^{99}} + c \stackrel{u=x^2+1}{=} -\frac{1}{198} \frac{1}{(x^2+1)^{99}} + c \end{aligned}$$

(ε) Θέτουμε $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx$ και

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c \stackrel{u=\ln x}{=} \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

(στ) Θέτουμε $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x} dx$ και $x=e^u$, οπότε:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int \ln x \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx = \int u \frac{1}{e^u} du = \int u e^{-u} du = \int u (-e^{-u})' du = \\ &= -u e^{-u} + \int u' e^{-u} du = -u e^{-u} + \int e^{-u} du = -u e^{-u} - e^{-u} + c = -\frac{u}{e^u} - \frac{1}{e^u} + c \stackrel{u=\ln x}{=} \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

(αποτέλεσμα που συμπίπτει με την εφαρμογή 2(β) κατά παράγοντες).

(ζ) Κάνουμε την αντικατάσταση: $u = \varepsilon\varphi x \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ οπότε:

$$\int \frac{\varepsilon\varphi^7 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \varepsilon\varphi^7 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + c \stackrel{u=\varepsilon\varphi x}{=} \frac{\varepsilon\varphi^8 x}{8} + c$$

■

Εφαρμογή 3

(α) Να δείξετε ότι: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \quad (ii) \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx \quad (iii) \int \epsilon\phi x \, dx$$

Λύση

(α) Θέτουμε $u=f(x) \Rightarrow du=f'(x)dx$ και

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$$

(β) (i) για το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ παρατηρούμε ότι:

$$f(x)=x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=2x+1$$

οπότε (χρησιμοποιώντας το (α)):

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx \stackrel{(a)}{=} \ln|x^2+x+1| + c$$

(ii) για το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$ παρατηρούμε ότι:

$$f(x)=x^2+2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x+2$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το κλάσμα με 2 (και χρησιμοποιώντας το (α)):

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} dx \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + c \end{aligned}$$

$$(iii) \int \epsilon\phi x \, dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \int \frac{-(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$

■

Εφαρμογή 4

Εάν είναι γνωστό ότι: $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{τοξ}\epsilon\phi x + c$ (όπου $f(x)=\text{τοξ}\epsilon\phi x$ μια συνάρτηση που καλείται **τόξο εφαπτομένης** και είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης π.χ $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \Rightarrow \text{τοξ}\epsilon\phi 1 = \frac{\pi}{4}$), τότε να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int \frac{1}{9x^2+1} dx \quad (ii) \int \frac{1}{x^2+5} dx \quad (iii) \int \frac{1}{9x^2+5} dx$$

Λύση

(i) $\int \frac{1}{9x^2+1} dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1} dx$ Θέτοντας: $u=3x \Rightarrow du=3dx$ έχουμε:

$$\int \frac{1}{(3x)^2+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{(3x)^2+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{3} \text{τοξεφ} u + c = \frac{1}{3} \text{τοξεφ}(3x) + c$$

(ii) Βγάζοντας κοινό παράγοντα το 5 από τον παρονομαστή έχουμε:

$$\int \frac{1}{x^2+5} dx = \int \frac{1}{5\left(\frac{x^2}{5}+1\right)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

και θέτοντας: $u = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{5}} dx$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ} u + c = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{τοξεφ}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c \end{aligned}$$

(iii) Βγάζοντας και πάλι κοινό παράγοντα το 5 από το παρονομαστή έχουμε:

$$\int \frac{1}{9x^2+5} dx = \int \frac{1}{(3x)^2+5} dx = \int \frac{1}{5\left(\frac{(3x)^2}{5}+1\right)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

και θέτοντας: $u = \frac{3x}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{3}{\sqrt{5}} dx$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx &= \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \int \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \text{τοξεφ} u + c = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3 \cdot 5} \text{τοξεφ}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} \text{τοξεφ}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Από την παραπάνω εφαρμογή συμπεραίνουμε ότι:

$$\int \frac{1}{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \text{τοξεφ}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} x\right) + c, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Εφαρμογή 5 (μη-παραγοντοποίηση τριωνύμου του παρονομαστή)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

Λύση

Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, γιατί $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, οπότε δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Στην περίπτωση αυτή συμπληρώνουμε το τετράγωνο, ως εξής:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + 1 = (x+2)^2 + 1$$

Οπότε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx \stackrel{u=x+2}{\underset{du=dx}{=}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \text{τοξεφ} u + c = \text{τοξεφ}(x+2) + c$$

•

16. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων (κλασμάτων), δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα ως προς x . Ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$ και τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

(Α) $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$

Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή, $Q(x)$, οπότε περιέχει παράγοντες της μορφής: $(x+\alpha)^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ και της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (γιατί;)

(α) Εάν $P(x) = \lambda$ (σταθερά), έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{\lambda}{(x+\alpha)^k} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $u = x + \alpha$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{\lambda}{(x+\alpha)^k} dx \stackrel{u=x+\alpha}{\underset{du=dx}} = \lambda \int \frac{1}{u^k} du = \lambda \int u^{-k} du = \frac{\lambda}{-k+1} u^{-k+1} + c = \frac{\lambda}{-k+1} (x+\alpha)^{-k+1} + c$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{(x+2)^3} dx$$

Λύση

Θέτουμε $u = x + 2 \Rightarrow du = dx$ και

$$\int \frac{1}{(x+2)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = \int u^{-3} du = \frac{1}{-3+1} u^{-3+1} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+2)^2} + c$$

■

(β) Εάν $P(x) = \delta \epsilon \nu$ είναι σταθερά, έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{(x+\alpha)^k} dx$$

Αναλύουμε την προς ολοκλήρωση ποσότητα **σε απλά κλάσματα**, ως εξής:

$$\frac{P(x)}{(x+\alpha)^k} = \frac{A_1}{(x+\alpha)^1} + \frac{A_2}{(x+\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x+\alpha)^k}$$

(δηλαδή σε τόσα κλάσματα, όση είναι και η δύναμη του παράγοντα του παρονομαστή). Κατόπιν για καθένα από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν, χρησιμοποιούμε το (α).

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow A(x+1)+B=x \Rightarrow \begin{cases} x=-1 & B=-1 \\ x=0 & A=1 \end{cases}$$

οπότε:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

■

(γ) Έστω ότι ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $Q(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ δεν παραγοντοποιείται (έχει δηλαδή μιγαδικές ρίζες, $\Delta < 0$). Τότε:

(I) Εάν το $P(x)=\lambda$ (σταθερά), τότε έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{\lambda}{ax^2+\beta x+\gamma} dx$$

Στην περίπτωση αυτή, συμπληρώνουμε το τετράγωνο του παρονομαστή και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι: $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx$$

Λύση

Το τριώνυμο x^2+2x+6 δεν έχει πραγματικές ρίζες, γιατί $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 6=-20<0$, οπότε **δεν** μπορεί να πααραγοντοποιηθεί. Στην περίπτωση αυτή συμπληρώνουμε το τετράγωνο, ως εξής:

$$x^2+2x+6 = x^2+2\cdot 1\cdot x+1+5 = (x+1)^2+5$$

Οπότε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+2x+6} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+5} dx \stackrel{u=x+1}{du=dx} = \int \frac{1}{u^2+5} du = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2+1} du \\ &\stackrel{t=\frac{u}{\sqrt{5}} \Rightarrow u=\sqrt{5}t}{du=\sqrt{5}dt} = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ} t + c = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{τοξεφ} \left(\frac{u}{\sqrt{5}} \right) + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \text{τοξεφ} \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}} \right) + c \end{aligned}$$

■

(II) Εάν το $P(x)$ = **δεν** είναι σταθερά, τότε έχουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+\beta x+\gamma} dx$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ και ακόμα ότι:

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{τοξεφ} x + c$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+6} dx$$

Λύση

Όπως και προηγούμενα, το τριώνυμο x^2+2x+6 δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε **δεν** μπορεί να πααραγοντοποιηθεί. Ακόμα, η: $(x^2+2x+6)' = 2x+2$ και ο αριθμητής του ολοκληρώματος μπορεί να γραφεί σαν:

$$x+6 = \frac{1}{2}(2x+2)+5$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+5}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} dx + \int \frac{5}{x^2+2x+6} dx$$

Αλλά το:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{(x^2+2x+6)'}{x^2+2x+6} dx = \ln|x^2+2x+6| + c$$

Ακόμα:

$$\int \frac{5}{x^2+2x+6} dx = \frac{5}{\sqrt{5}} \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c$$

(όπως είδαμε παραπάνω)

Τελικά:

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6} dx + \int \frac{5}{x^2+2x+6} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+6| + \frac{5}{\sqrt{5}} \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c$$

■

(δ) Έστω ότι ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται (έχει δηλαδή δύο πραγματικές, άνισες, ρίζες) ως εξής:

$$Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x-p_1)(x-p_2)$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε ανάλυση σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{P(x)}{ax^2 + \beta x + \gamma} = \frac{P(x)}{a(x-p_1)(x-p_2)} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{A}{(x-p_1)} + \frac{B}{(x-p_2)} \right\}$$

καθένα δε από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν είναι της μορφής (α)

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί το $\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx$.

Λύση

Αναλύοντας την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε **απλά κλάσματα** έχουμε:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{5x-10}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow A(x-4)+B(x+1)=5x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \nu & x=4 & 5B=10 & \Rightarrow B=2 \\ \alpha \nu & x=-1 & -5A=-15 & \Rightarrow A=3 \end{cases}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{5x-10}{x^2-3x-4} &= \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-4} \Rightarrow \int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-4} dx = \\ &= 3\ln|x+1| + 2\ln|x-4| + c = \ln|(x+1)^3(x-4)^2| + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Αν οι ρίζες (του τριωνύμου του παρονομαστή) είναι πραγματικές και ίσες τότε το ολοκλήρωμα είναι της μορφής (α). ($Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a(x-p)(x-p) = a(x-p)^2$).

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων γίνεται όπως στις περιπτώσεις Α (α), (β)).

(ε) Στην γενική περίπτωση, ο παρονομαστής θα αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων (γιατί;). Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε το κλάσμα σε απλά κλάσματα, για τη δε ανάλυση χρησιμοποιούμε κλάσματα (παράγοντες), ανάλογα με τη μορφή των παραγόντων του παρονομαστή (όπως είδαμε παραπάνω).

Εφαρμογή 6

Να υπολογιστεί το $\int \frac{2x+4}{x^3+4x^2} dx$

Λύση

Αναλύοντας την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $\frac{2x+4}{x^3+4x^2}$ σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{2x+4}{x^3+4x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x+4} \Rightarrow Ax(x+4)+B(x+4)+\Gamma x^2=2x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \nu & x=0 & 4B=4 & \Rightarrow B=1 \\ \alpha \nu & x=-4 & 16\Gamma=-4 & \Rightarrow \Gamma=-\frac{1}{4} \\ \alpha \nu & x=1 & 5A+5B+\Gamma=6 & \Rightarrow A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Δηλαδή:

$$\int \frac{2x+4}{x^3+4x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \ln|x+4| + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + c$$

■

Παρατήρηση Στους λογαρίθμους, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$1. \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$3. \ln a^b = b \cdot \ln a$$

Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2+x} dx$$

Λύση

Παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή έχουμε: $x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$ και το τριώνυμο x^2+x+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες (δεν παραγοντοποιείται).

Χρησιμοποιώντας ανάλυση σε απλά κλάσματα, έχουμε:

$$\frac{x+2}{x^3+x^2+x} = \frac{x+2}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1} \Rightarrow A(x^2+x+1) + x(Bx+\Gamma) = x+2 \Rightarrow$$

$$(A+B)x^2 + (A+\Gamma)x + A = x+2 \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A+B=0 \\ A+\Gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ \Gamma=-1 \end{cases}$$

Οπότε, το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3+x^2+x} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x-1}{x^2+x+1} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \\ &= 2 \ln|x| - \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx = 2 \ln|x| - \ln|x^2+x+1| + c \\ &= \ln x^2 - \ln|x^2+x+1| + c = \ln \left(\frac{x^2}{x^2+x+1} \right) + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Εάν ένας από τους παράγοντες του παρονομαστή (μετά την παραγοντοποίηση) είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μιγαδικές ρίζες, δηλαδή **δεν παραγοντοποιείται**, τότε το κλάσμα που αντιστοιχεί σε αυτόν τον παράγοντα, στην ανάλυση των απλών κλασμάτων, θα έχει τη μορφή:

$$\frac{Ax+B}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

(δηλαδή ο αριθμητής είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού, ενώ στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι μια σταθερά).

(B) $\deg (P(x)) \geq \deg (Q(x))$

Διαιρούμε το $P(x)$ με το $Q(x)$ και έστω $\Pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης και $U(x)$ το υπόλοιπό της. Στην περίπτωση αυτή είναι γνωστό ότι ισχύει η εξής ισότητα (ταυτότητα της διαίρεσης):

$$P(x) = Q(x) \cdot \Pi(x) + U(x), \quad \text{με} \quad \deg (U(x)) < \deg (Q(x))$$

Αλλά τότε (διαιρώντας με το $Q(x)$), έχουμε:

$$P(x) = Q(x) \cdot \Pi(x) + U(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{U(x)}{Q(x)}$$

και το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \Pi(x) dx + \int \frac{U(x)}{Q(x)} dx$$

όπου το $\int \frac{U(x)}{Q(x)} dx$ υπολογίζεται όπως στην περίπτωση (A) ($\deg (U(x)) < \deg (Q(x))$)

Εφαρμογή 8

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + x} dx$$

Λύση

Διαιρώντας το πολυώνυμο $x^3 + 2x^2 + x + 1$ με το πολυώνυμο $x^2 + x$, έχουμε:

$$\begin{array}{r}
 x^3+2x^2+x+1 \quad | \quad \underline{x^2+x} \\
 -x^3-x^2 \\
 \hline
 x^2+x+1 \\
 -x^2-x \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

Δηλαδή: $x^3+2x^2+x+1=(x^2+x) \cdot (x+1)+1$ (ταυτότητα της διαίρεσης), από όπου:

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x}=(x+1)+\frac{1}{x^2+x}$$

και το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x}dx=\int (x+1)dx+\int \frac{1}{x^2+x}dx$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow A(x+1)+Bx=1\Rightarrow \begin{cases} \alpha\nu \ x=0 & A=1 \\ \alpha\nu \ x=-1 & -B=1 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

Οπότε:

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x|-\ln|x+1|+c=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

Τελικά:

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x}dx=\int (x+1)dx+\int \frac{1}{x^2+x}dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

■

2^ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Θεώρημα 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα I και a σημείο του, τότε:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Γενικότερα:

Θεώρημα 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα I και a σημείο του, τότε

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Εφαρμογή

$$(I) \quad \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}$$

$$(II) \quad \frac{d}{dx} \left(\int_3^{\eta \mu x} \frac{1}{1+t^2} dt \right) = \frac{1}{1+\eta \mu^2 x} \cdot (\eta \mu x)' = \frac{\sigma \nu \nu x}{1+\eta \mu^2 x}$$

■

Παρατήρηση Αν προσπαθήσει κάποιος να υπολογίσει το ολοκλήρωμα πρώτα και μετά (να υπολογίσει) την παράγωγο, είναι (λίγο) πιο δύσκολα.

Π.χ. για την $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt \right)$ έχουμε ότι $\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^{x^3} = \ln x^3 - \ln 1 = \ln x^3$ και

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^3} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{d}{dx} (\ln x^3) = \frac{1}{x^3} (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

Ολοκλήρωση δυνάμεων ημιτόνου και συνημιτόνου

(Α) Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int \eta\mu^m x \cdot \sigma\upsilon\nu^n x \, dx, \quad m, n=0,1,2,\dots$$

χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα:

		n	
		Περιττός	Άρτιος
m	Περιττός	1) Δημιουργούμε παράγοντα $\sigma\upsilon\nu x$ 2) Θέτουμε $u=\eta\mu x$ 3) Χρησιμοποιούμε την $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$	1) Δημιουργούμε παράγοντα $\eta\mu x$ 2) Θέτουμε $u= \sigma\upsilon\nu x$ 3) Χρησιμοποιούμε την $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
	Άρτιος	1) Δημιουργούμε παράγοντα $\sigma\upsilon\nu x$ 2) Θέτουμε $u= \eta\mu x$ 3) Χρησιμοποιούμε την $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$	Χρησιμοποιούμε τις (α) $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ (β) $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και καταλήγουμε σε μια από τις άλλες περιπτώσεις

Παρατήρηση

Αν **m** = περιττός και **n** = περιττός μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση **u= σινx**.

Παραδείγματα

(1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

Λύση

Εδώ m=4 άρτιος και n=3 περιττός, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u=\eta\mu x \Rightarrow du=\sigma\upsilon\nu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
 \int \eta \mu^4 x \cdot \sigma \nu \nu^3 x \, dx &= \int \eta \mu^4 x \cdot \sigma \nu \nu^2 x \cdot \sigma \nu \nu x \, dx = \int \eta \mu^4 x \cdot (1 - \eta \mu^2 x) \cdot \sigma \nu \nu x \, dx = \\
 &= \int u^4 (1 - u^2) du = \int (u^4 - u^6) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = \\
 &= \frac{\eta \mu^5 x}{5} - \frac{\eta \mu^7 x}{7} + c
 \end{aligned}$$

(2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta \mu^5 x \cdot \sigma \nu \nu^4 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=5$ περιττός και $n=4$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$u = \sigma \nu \nu x \Rightarrow du = -\eta \mu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
 \int \eta \mu^5 x \cdot \sigma \nu \nu^4 x \, dx &= -\int \eta \mu^4 x \cdot \sigma \nu \nu^4 x \cdot (\eta \mu x) \, dx = -\int (\eta \mu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu \nu^4 x \cdot (\eta \mu x) \, dx \\
 &= -\int (1 - \sigma \nu \nu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu \nu^4 x \cdot (\eta \mu x) \, dx = -\int (1 - u^2)^2 \cdot u^4 \, du \\
 &= -\int (1 - 2u^2 + u^4) \cdot u^4 \, du = -\int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\right) + c \\
 &= -\left(\frac{\sigma \nu \nu^5 x}{5} - \frac{2\sigma \nu \nu^7 x}{7} + \frac{\sigma \nu \nu^9 x}{9}\right) + c
 \end{aligned}$$

(3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sigma \nu \nu^5 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=0$ άρτιος και $n=5$ περιττός, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$u = \eta \mu x \Rightarrow du = \sigma \nu \nu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
 \int \sigma \nu \nu^5 x \, dx &= \int \sigma \nu \nu^4 x \cdot \sigma \nu \nu x \, dx = \int (\sigma \nu \nu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu \nu x \, dx \\
 &= \int (1 - \eta \mu^2 x)^2 \cdot \sigma \nu \nu x \, dx = \int (1 - u^2)^2 \, du \\
 &= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = \left(u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c \\
 &= \left(\eta \mu x - \frac{2\eta \mu^3 x}{3} + \frac{\eta \mu^5 x}{5}\right) + c
 \end{aligned}$$

(4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta \mu x \cdot \sigma \nu \nu^3 x \, dx$

Λύση

1ος τρόπος

Εδώ $m=1$ περιττός και $n=3$ περιττός, άρα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$u = \eta \mu x \Rightarrow du = \sigma \nu \nu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx &= \int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int \eta\mu x \cdot (1 - \eta\mu^2 x) \, \sigma\upsilon\nu x \, dx = \\
&= \int u \cdot (1 - u^2) \, du = \int (u - u^3) \, du = \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} + C = \\
&= \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{\eta\mu^4 x}{4} + C
\end{aligned}$$

2ος τρόπος

Εδώ $m=1$ περιττός και $n=3$ περιττός, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (λόγω της παρατήρησης) την αντικατάσταση $u=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du=-\eta\mu x \, dx$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx &= -\int -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx = -\int u^3 \, du = -\frac{u^4}{4} + C = \\
&= -\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C
\end{aligned}$$

Παρατήρηση

Τα αποτελέσματα του 1^{ου} και 2^{ου} τρόπου ενώ φαίνονται να είναι διαφορετικά, στην πραγματικότητα δεν είναι. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{\eta\mu^4 x}{4} + C &= \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{(\eta\mu^2 x)^2}{4} + C = \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{4} + C = \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C \\
&= \frac{\eta\mu^2 x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C = \frac{\eta\mu^2 x}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C = -\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + \frac{1}{4} + C = -\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + C, \quad C = \frac{1}{4} + C
\end{aligned}$$

(5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=2$ άρτιος και $n=2$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες: $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και

$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ οπότε:

$$\begin{aligned}
\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \cdot \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx
\end{aligned}$$

Αλλά στο ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx$, $m=0$ άρτιος και $n=2$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την

ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu^2 2x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 4x}{2}$ οπότε:

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 4x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \eta\mu 4x + c$$

Τελικά:

$$\int \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \eta\mu 4x + c = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \eta\mu 4x + c$$

(6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=0$ άρτιος και $n=2$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$,

οπότε:

$$\begin{aligned} \int \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx &= \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = \\ &\stackrel{\substack{u=2x \\ du=2dx \\ \frac{1}{2}du=dx}}{=} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu u \, du = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu u + c \stackrel{u=2x}{=} \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c \end{aligned}$$

(7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^4 x \, dx$

Λύση

Εδώ $m=4$ άρτιος και $n=0$ άρτιος, άρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$,

οπότε:

$$\begin{aligned} \int \eta\mu^4 x \, dx &= \int (\eta\mu^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1-\sigma\upsilon\nu 2x)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1-2\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} 2 \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \sigma\upsilon\nu^2 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} 2 \cdot \frac{1}{2} \eta\mu 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2} \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \eta\mu 4x + c = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + \frac{1}{32} \eta\mu 4x + c \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

Στην περίπτωση ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων (κλασμάτων), που περιέχουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ δεν ισχύουν απαραίτητα οι παραπάνω αντικαταστάσεις.

(8) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (α) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x} dx$ (β) $\int \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x} dx &= \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int \frac{1-\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= \int \frac{(1-\eta\mu x) \cdot (1+\eta\mu x)}{1-\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x dx = \int (1+\eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= \int \sigma\upsilon\nu x dx + \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx \quad \begin{matrix} u=\eta\mu x \\ du=\sigma\upsilon\nu x dx \end{matrix} = \\ &= \eta\mu x + \int u du = \eta\mu x + \frac{u^2}{2} + c = \eta\mu x + \frac{u^2}{2} + c \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \eta\mu x + \frac{\eta\mu^2 x}{2} + c\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx &= \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx + \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\phi x + \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \begin{matrix} u=\sigma\upsilon\nu x \\ du=-\eta\mu x dx \end{matrix} = \\ &= \varepsilon\phi x - \int \frac{1}{u^2} du = \varepsilon\phi x - \int u^{-2} du = \varepsilon\phi x - \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} + c = \\ &= \varepsilon\phi x + \frac{1}{u} + c = \varepsilon\phi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + c\end{aligned}$$

■

(B) Τα ολοκληρώματα των μορφών:

(α) $\int \eta\mu(mx) \cdot \eta\mu(nx) dx$

(β) $\int \eta\mu(mx) \cdot \sigma\upsilon\nu(nx) dx$

(γ) $\int \sigma\upsilon\nu(mx) \cdot \sigma\upsilon\nu(nx) dx$ όπου $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους:

(i) $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2}$

(ii) $\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta)}{2}$

(iii) $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2}$

Ακόμα είναι γνωστό ότι: $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x \, dx$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x \, dx &= \int \left(\frac{\eta\mu(3x-7x) + \eta\mu(3x+7x)}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (\eta\mu(-4x) + \eta\mu(10x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \eta\mu(-4x) \, dx + \frac{1}{2} \int \eta\mu(10x) \, dx = -\frac{1}{2} \int \eta\mu(4x) \, dx + \frac{1}{2} \int \eta\mu(10x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \sigma\upsilon\nu 4x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{10} \right) \sigma\upsilon\nu 10x + c \\ &= \frac{1}{8} \sigma\upsilon\nu 4x - \frac{1}{20} \sigma\upsilon\nu 10x + c\end{aligned}$$

•

17. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Όταν ορίζει κανείς το **ορισμένο ολοκλήρωμα** μιάς συνάρτησης f σ' ένα διάστημα της μορφής $[α,β]$, $α,β \in \mathbb{R}$ (δηλαδή το $\int_a^b f(x) dx$), θεωρεί ότι:

- (I) η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα $[α,β]$ και
- (II) το διάστημα $[α,β]$ έχει πεπερασμένα άκρα.

Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται κάποια από τις δύο αυτές συνθήκες λέμε ότι έχουμε ένα **γενικευμένο ολοκλήρωμα**.

(Α) Γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $[α, +\infty)$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα της μορφής $[α, c]$, $c \geq α$ (ή ανάλογα ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, α]$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα της μορφής $[c, α]$, $c \leq α$).

Ορισμός 1

Καθένα από τα ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους** (στο διάστημα $[α, +\infty)$ ή στο διάστημα $(-\infty, α]$ αντίστοιχα). Η **τιμή** των ολοκληρωμάτων υπολογίζεται ως εξής: εάν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$$

και είναι πεπερασμένος αριθμός, τότε:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **συγκλίνει**. Στην περίπτωση που το όριο $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx = \pm \infty$ ή δεν υπάρχει, λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **αποκλίνει**.

Ανάλογα υπολογίζεται το $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ στην περίπτωση που υπάρχει το $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\beta^a f(x) dx$:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\beta^a f(x) dx$$

Εφαρμογή 1

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$(α) \int_{-\infty}^1 e^x dx \quad (β) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Λύση

$$(α) \int_{-\infty}^1 e^x dx \quad \alpha' \text{ είδους (λόγω της ύπαρξης του } -\infty)$$

$$\int_{-\infty}^1 e^x dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^1 e^x dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^x \Big|_{\beta}^1 = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (e^1 - e^{\beta}) = e^1 - \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{\beta} = e^1 \text{ συγκλίνει.}$$

$$(\text{το } \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^{\beta} = 0)$$

$$(β) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha' \text{ είδους (λόγω της ύπαρξης του } +\infty)$$

Θέτουμε $u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx$ και λύνουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{u} + c \stackrel{u=x^2+1}{=} -\frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(x^2+1)} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(\beta^2+1)} + \frac{1}{2(\alpha^2+1)} \right) = \\ &= 0 + \frac{1}{2(\alpha^2+1)} \text{ συγκλίνει.} \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση

(α) **Πρόταση:** Το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ υπάρχει τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει το

$\int_c^{+\infty} f(x) dx$, για κάποιο $\alpha < c$, $c \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Αποδεικνύεται ότι, η τιμή του $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ είναι ανεξάρτητη από την τιμή του $c \in \mathbb{R}$.

(β) Εάν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx$, για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

ορίζεται να είναι ίσο με:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Αποδεικνύεται ότι, η τιμή του $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ είναι ανεξάρτητη από την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

για οποιοδήποτε άλλο $c \in \mathbb{R}$.

(γ) (γεωμετρική ερμηνεία). Έστω ότι υπάρχει το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και έστω ότι $f(x) \geq 0$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)$, τον άξονα xox' και την ευθεία $x=a$.

Θεώρημα 1.

Ισχύουν τα ακόλουθα (για τα **p-ολοκληρώματα**)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{συγκλίνει} & \text{για } p > 1 \\ \text{αποκλίνει} & \text{για } p \leq 1 \end{cases}$$

Απόδειξη

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c$$

$$(I) \text{ Εάν } p > 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c = \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p > 1$, το x^{p-1} παραμένει στον παρονομαστή) και

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} \frac{1}{\beta^{p-1}} \right) - \frac{1}{1-p} \frac{1}{1^{p-1}} = -\frac{1}{1-p} \text{ συγκλίνει.}$$

$$(II) \text{ Εάν } p < 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{1-p} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p < 1$, το x^{1-p} παραμένει στον αριθμητή) και

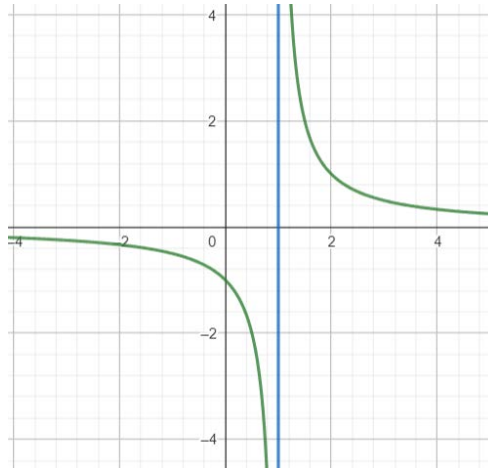
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} \beta^{1-p} \right) - \frac{1}{1-p} 1^{1-p} = +\infty \text{ αποκλίνει.}$$

$$(III) \text{ Τέλος, εάν } p=1 \text{ τότε } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty \text{ αποκλίνει.}$$

■

(B) Γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους

Το σημείο x_0 ονομάζεται **ιδιόμορφο ή ανώμαλο** σημείο της συνάρτησης f , όταν η f είναι ορισμένη σε μια γειτονιά $[a, x_0)$ ή $(x_0, b]$ ή $[a, x_0) \cup (x_0, b]$ του x_0 και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αντίστοιχα απειρίζεται θετικά ή αρνητικά (το γράφημα παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτο στο σημείο x_0). Π.χ. το σημείο $x_0=1$ είναι ιδιόμορφο σημείο της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x-1}$



Ορισμός 2

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(a, b]$, ολοκληρώσιμη στα υποδιαστήματα της μορφής $[c, b]$, $c > a$ και το a είναι ιδιόμορφο σημείο. Το ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_{a^+}^b f(x) dx \quad (\text{ή συμβ. } \int_a^b f(x) dx)$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους**. Η τιμή του ολοκληρώματος υπολογίζεται ως εξής: εάν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

και είναι πεπερασμένος αριθμός, τότε:

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\int_{a^+}^b f(x) dx$ **συγκλίνει**. Στην περίπτωση που το όριο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \pm \infty \quad \text{ή δεν υπάρχει, λέμε ότι το } \int_{a^+}^b f(x) dx \text{ **αποκλίνει**}.}$$

Ανάλογα ορίζεται και υπολογίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^{\beta^-} f(x) dx$ (με β ιδιόμορφο σημείο) στην περίπτωση που υπάρχει $\lim_{\varepsilon \rightarrow \beta^+} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x) dx$, δηλαδή

$$\int_a^{\beta^-} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \beta^+} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x) dx$$

Εφαρμογή 2

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$(α) \int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx \quad (β) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Λύση

$$(α) \int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx \quad \text{β' είδους} \quad (\text{η } f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ δεν ορίζεται στο σημείο } x_0=1)$$

$$\int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \int_{\beta}^2 \frac{1}{1-x} dx \quad (1)$$

Θέτουμε $u=1-x \Rightarrow du=-dx$ και λύνουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + c \stackrel{u=1-x}{=} -\ln|1-x| + c \quad (2)$$

Άρα

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(-\ln|1-x| \Big|_{\beta}^2 \right) = \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(-\ln|1-2| + \ln|1-\beta| \right) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(-\ln|1| \right) + \lim_{\beta \rightarrow 1^+} \left(\ln|1-\beta| \right) = 0 - \infty = -\infty \end{aligned}$$

Το $\int_{1^+}^2 \frac{1}{1-x} dx$ αποκλίνει.

$$(β) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (1) \quad \text{β' είδους} \quad (\text{η } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ δεν ορίζεται στο σημείο } x_0=0)$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \quad (*)$$

Άρα

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_{\beta}^3 \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{\beta} \right) = 2\sqrt{3}$$

Το $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ συγκλίνει.

■

Παρατήρηση

Είναι δυνατόν η ιδιομορφία να εμφανίζεται σαν το εσωτερικό σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε το ολοκλήρωμα σε δύο

ολοκληρώματα β' είδους, ένα με την ιδιομορφία στο κάτω άκρο ολοκλήρωσης και ένα στο άνω άκρο ολοκλήρωσης. Πράγματι, αν το γ είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης και $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(με την προϋπόθεση ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα συγκλίνουν).

Θεώρημα 2.

Ισχύουν τα ακόλουθα (για τα **p-ολοκληρώματα**)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{συγκλίνει} & \text{για } p \leq 1 \\ \text{αποκλίνει} & \text{για } p > 1 \end{cases}$$

Προσοχή στα όρια της ολοκλήρωσης και στην **δύναμη του p** για τη σύγκλιση.

Απόδειξη

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c$$

$$(I) \text{ Εάν } p > 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} + c = \frac{1}{1-p} \frac{1}{x^{p-1}} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p > 1$, το x^{p-1} παραμένει στον παρονομαστή) και

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \frac{1}{1^{p-1}} - \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} \frac{1}{\beta^{p-1}} \right) = -\infty \text{ αποκλίνει.}$$

$$(II) \text{ Εάν } p < 1, \int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{1-p} + c$$

(παρατηρείστε ότι επειδή το $p < 1$, το x^{1-p} παραμένει στον αριθμητή) και

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} 1^{1-p} - \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} \beta^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p} \text{ συγκλίνει.}$$

$$(III) \text{ Τέλος, εάν } p=1 \text{ τότε } \int_0^1 \frac{1}{x} dx = x \Big|_0^1 = 1 \text{ συγκλίνει.}$$

■

(Γ) Γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' είδους.

Ορισμός 3

Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα που είναι συγχρόνως α' και β' είδους ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' είδους**, δηλαδή είναι ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ όπου το a είναι ιδιόμορφο σημείο. Ο τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος αυτού είναι ο εξής: εάν υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ για κάποιο $c > a$, τότε:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

(το $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ είναι α είδους και $\int_a^c f(x) dx$ β είδους). Και σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει. Μπορεί ναδειχθεί ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του $c > a$.

Εφαρμογή 3

Να εξεταστεί η σύγκλιση του ολοκληρώματος $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Λύση

Το $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ γ' είδους, γιατί:

το ολοκλήρωμα $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ έχει ένα από τα όριά του $+\infty$ αλλά και η $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ δεν ορίζεται στο σημείο $x_0 = 0$ άρα το «σπάμε» σε δύο άλλα ολοκληρώματα π.χ. $\int_{0^+}^{\infty} = \int_{0^+}^1 + \int_1^{\infty}$ όπου $\int_1^{\infty}$ = γενικευμένο α' είδους, $\int_{0^+}^1$ = γενικευμένο β' είδους άρα το $\int_{0^+}^{\infty} =$ γενικευμένο γ' είδους,

Τώρα, το:

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (1)$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα :

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{1/3}} dx = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + c = \frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2} x^{2/3} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c \quad (2)$$

Άρα

$$(1) \Rightarrow \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right) \Big|_0^\beta = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} \right) = \frac{3}{2} - \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left(-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} \right) = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

Και (ανάλογα):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right) \Big|_1^\beta = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} \right) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\beta^2} \right) - \frac{3}{2} = +\infty$$

Δηλαδή το $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ απειρίζεται (αποκλίνει)

Τελικά, αφού $\int_{0^+}^{\infty} = \int_{0^+}^1 + \int_1^{\infty}$ και το $\int_1^{\infty}$ απειρίζεται θα έχουμε και το ολοκλήρωμα

$\int_{0^+}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ να απειρίζεται (αποκλίνει).

■

Κριτήρια σύγκλισης

Θεώρημα 3.

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και $0 \leq f(x) \leq g(x)$, τότε εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ **συγκλίνει**, έπεται ότι **συγκλίνει** και το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Θεώρημα 4.

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και $0 \leq g(x) \leq f(x)$, τότε εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ **αποκλίνει**, έπεται ότι **αποκλίνει** και το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει:

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Θεώρημα 5 (απόλυτη σύγκλιση)

Αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ και ισχύει:

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Εφαρμογή 4

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων. Τι είδους είναι τα καθένα από αυτά;

$$(α) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \quad (β) \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx \quad (γ) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (δ) \int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+1} dx \quad (ε) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Λύση

(α) Το $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$). Αν

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad \& \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$\text{Άρα } \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c \quad \text{οπότε}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right|_1^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln \beta)^2}{2} \right) - \frac{(\ln 1)^2}{2} = +\infty \quad \text{άρα αποκλίνει.}$$

(β) Το $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

$$\text{Έχουμε } x^5+1 > x^5 \Rightarrow \frac{1}{x^5+1} < \frac{1}{x^5} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^5+1} < \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4} = g(x) \quad \text{Αλλά το } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$$

συγκλίνει (σύμφωνα με θεώρημα 1, με $p = 4$), άρα και το $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^5+1} dx$ συγκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 3).

(γ) Το $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

$$\text{Έχουμε } x^3+1 > x^3 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} > \frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = x^{\frac{1}{2}}. \quad \text{Αλλά το:}$$

$$\int_2^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right|_2^{+\infty} = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right|_2^{+\infty} = \left. \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right|_2^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\beta^3} \right) - \frac{2}{3} \sqrt{2^3} = +\infty$$

αποκλίνει, άρα και το $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ αποκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 4).

(δ) Το $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

Έχουμε $e^x \geq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} = g(x)$. Αλλά το

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln(\beta+1) - \ln(0+1) = +\infty$$

αποκλίνει, άρα και το $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$ αποκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 4 παραπάνω).

(ε) Το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ είναι **α' είδους** (λόγω της ύπαρξης του $+\infty$).

Έχουμε ότι: $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$. Αλλά το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 1 παραπάνω, $p=2$), άρα και το $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ συγκλίνει, δηλαδή το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει (σύμφωνα με το θεώρημα 5 παραπάνω).

■

Θεώρημα 6 (οριακό κριτήριο σύγκρισης)

Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, +\infty)$ και έστω:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(α) εάν $0 < L < +\infty$, τότε τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) dx$ έχουν την **ίδια συμπεριφορά** (δηλαδή συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα)

(β) εάν $L = 0$ τότε, εάν το $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) dx$ **συγκλίνει** τότε **συγκλίνει** και το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$.

(γ) εάν $L = +\infty$ τότε, εάν το $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) dx$ **αποκλίνει** τότε **αποκλίνει** και το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx$.

Εφαρμογή 5

Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$(α) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 e^x} dx \quad (β) \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3} dx$$

Λύση

(α) Εάν θεωρήσουμε σαν $f(x) = \frac{1}{x^3 e^x}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^3 e^x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 = L$$

Αλλά από το θεώρημα 1, το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ($p=3$) συγκλίνει, οπότε από το θεώρημα 6 (β)

θα συγκλίνει και το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 e^x} dx$.

(β) Εάν θεωρήσουμε σαν $f(x) = \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ (γιατί $\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3} \simeq \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^4 - 2x^2 + 3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 3} = 1 = L$$

Αλλά από το θεώρημα 1, το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ ($p=3$) συγκλίνει, οπότε από το θεώρημα 6 (α)

θα συγκλίνει και το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 e^x} dx$.

■

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι στενά συνδεδεμένα με τις σειρές, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7 (γενικευμένο ολοκλήρωμα και σειρές)

Έστω f μία ολοκληρώσιμη και φθίνουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$ και $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει τότε και μόνον τότε όταν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Εφαρμογή 6

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

$$(α) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1} \quad (β) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{3x+1}$. Η f είναι φθίνουσα γιατί:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3x+1} \right)' = \frac{-3}{(3x+1)^2} < 0$$

και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{3x+1} dx$. Αλλά:

$$\int \frac{1}{3x+1} dx \stackrel{u=3x+1}{\underset{du=3dx}{=}} \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} dx = \frac{1}{3} \ln|u| + c = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + c$$

οπότε: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x+1} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln(3\beta+1) - \frac{1}{3} \ln(3 \cdot 1) = +\infty$ αποκλίνει.

Επομένως, από το θεώρημα 7, αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$.

(β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Η f είναι φθίνουσα γιατί:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^3} \right)' = \frac{-3x^2}{x^6} < 0$$

Ακόμα, το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} x^{-3} dx = -\frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1^2} = \frac{1}{2}$$

συγκλίνει. Επομένως, από το θεώρημα 7, συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

■

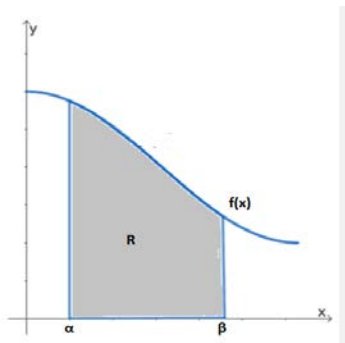
18. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ – Α μέρος

Α. ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ

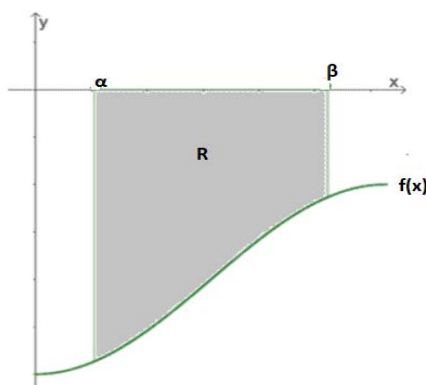
Θεωρία

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και R το χωρίο που περικλείεται από το γράφημα της, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=α$ και $x=β$. Το **εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R** , υπολογίζεται ως εξής:

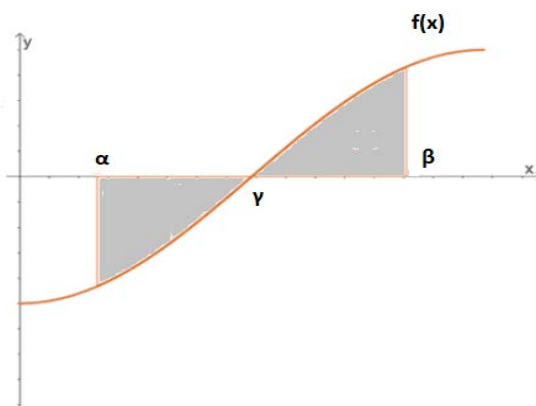
(α) Αν $f(x) \geq 0$ τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$



(β) Αν $f(x) \leq 0$ τότε $E(R) = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (0 - f(x)) dx$



(γ) Αν η $f(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$

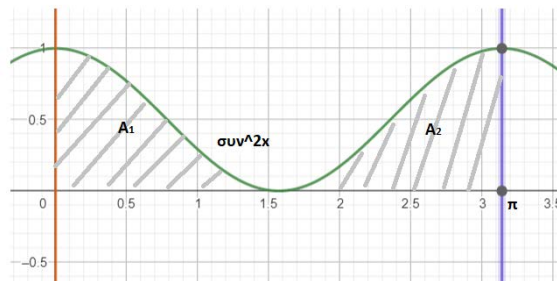


Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\sin^2 x$, τις ευθείες $x=0$, $x=\pi$ και τον άξονα των x (χοχ').

Λύση

Το εμβαδόν του χωρίου:



υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα ($\sin^2 x \geq 0$):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \sin 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \sin 2x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{4} \eta\mu 2\pi - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{4} \eta\mu 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 1

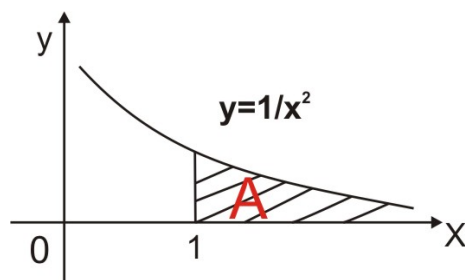
Λόγω συμμετρίας το εμβαδόν θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$A = 2A_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

Εφαρμογή 2

Αν A είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την $y = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=1$, να βρεθεί το A .

Λύση



Έχουμε :

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} \, dx \quad (1)$$

Αλλά

$$\int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^{\beta} x^{-2} \, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^{\beta} = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{\beta} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\beta} = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{\beta}$$

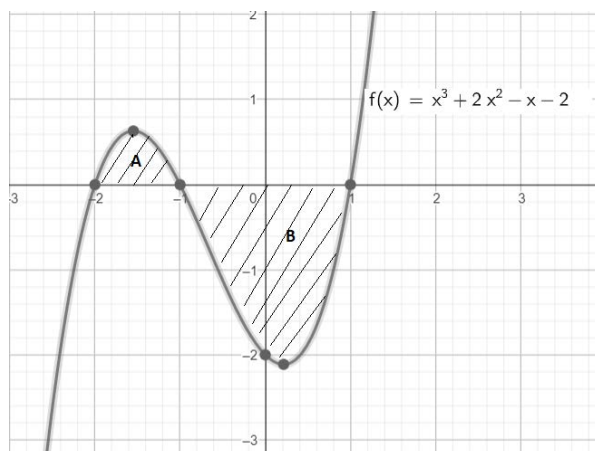
Άρα

$$(1) \Rightarrow A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) = 1 - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\beta} \right) = 1 - 0 = 1$$

■

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ και τον άξονα των x .



Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ τέμνει τον άξονα στα σημεία:

$$x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1, x=-2$$

Ακόμα, είναι φανερό, από το γράφημά της, ότι η f δεν είναι πάντα θετική. Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-2}^1 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^3+2x^2-x-2) dx &= \left. \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1^4}{4} + 2\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - 2\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} (x^3+2x^2-x-2) dx &= \left. \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right|_{-2}^{-1} = \\ &= \frac{(-1)^4}{4} + 2\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Τελικά

$$E = \int_{-2}^1 |f(x)| dx = \frac{5}{12} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{37}{12}$$

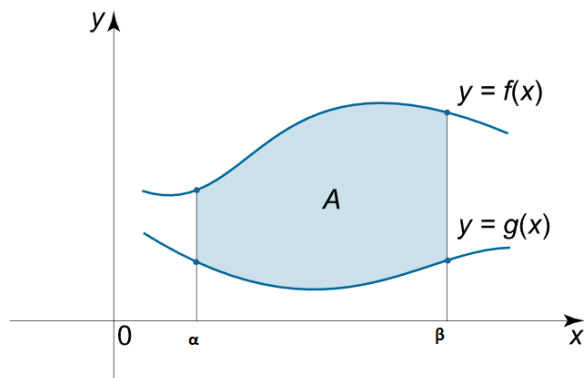
■

Παρατήρηση 2

- Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ δεν είναι πάντα ίσο με το εμβαδόν του χωρίου «κάτω» από το γράφημα της συνάρτησης f (τα δύο συμπίπτουν αν η συνάρτηση είναι μη-αρνητική).

2. Αν το χωρίο R περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, τότε το **εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R** , υπολογίζεται ως εξής

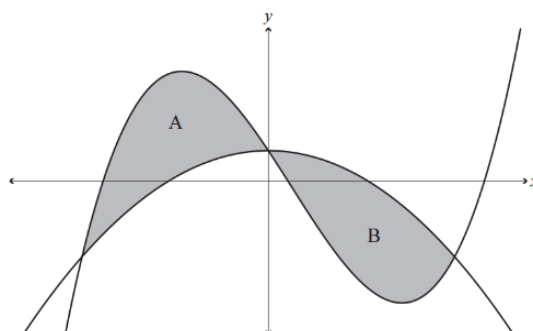
(α) Αν $f(x) \geq g(x)$ τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$



(β) Αν $f(x) \leq g(x)$ τότε $E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x)) dx$

(γ) Αν η διαφορά $f(x) - g(x) = h(x)$ **δεν** διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε

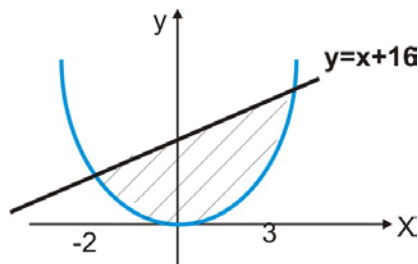
$$E(R) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |h(x)| dx$$



Εφαρμογή 4

Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2$ & $y=x+6$.

Λύση



Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία:

$$\left. \begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x+6 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\int_{-2}^3 (x+6) dx - \int_{-2}^3 x^2 dx$$

(«άνω συνάρτηση» - «κάτω συνάρτηση»)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^3 (x+6-x^2) = \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^3 = \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\
 &= \frac{9}{2} + 18 - 9 - 2 + 12 - \frac{8}{3} = \frac{27}{6} + \frac{114}{6} - \frac{16}{6} = \frac{125}{6}
 \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή 5

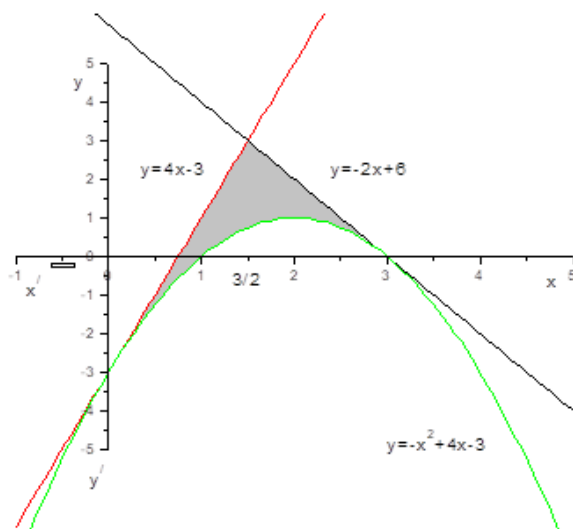
Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της παραβολής $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ και των εφαπτόμενων της στα σημεία $(0, -3)$ και $(3, 0)$

Λύση

Για τον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής $f(x)$ που διέρχονται από τα σημεία $(0, -3)$ και $(3, 0)$. Αυτές είναι της μορφής $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, όπου x_0 η τετμημένη του σημείου $(x_0, f(x_0))$, και $f'(x_0)$ είναι η παράγωγος της παραβολής στο σημείο με τετμημένη x_0 .

Η $f'(x) = -2x + 4$, και στο σημείο $(0, -3)$ η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $f_1(x) = 4x - 3$, ενώ στο $(3, 0)$ γίνεται $f_2(x) = -2x + 6$.

Η τετμημένη του σημείου τομής των εφαπτόμενων είναι $3/2$.



Επειδή η f είναι άνω κοίλη ($f''(x) = -2 < 0$) οι εφαπτόμενες βρίσκονται πάνω από το γράφημά της. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το τμήμα που περιέχεται πάνω από την παραβολή και κάτω από την κάθε μία εφαπτόμενη. Αυτό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \int_0^{3/2} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{3/2}^3 [(-2x + 6) - (-x^2 + 4x - 3)] dx = \dots = \frac{9}{4}$$

■

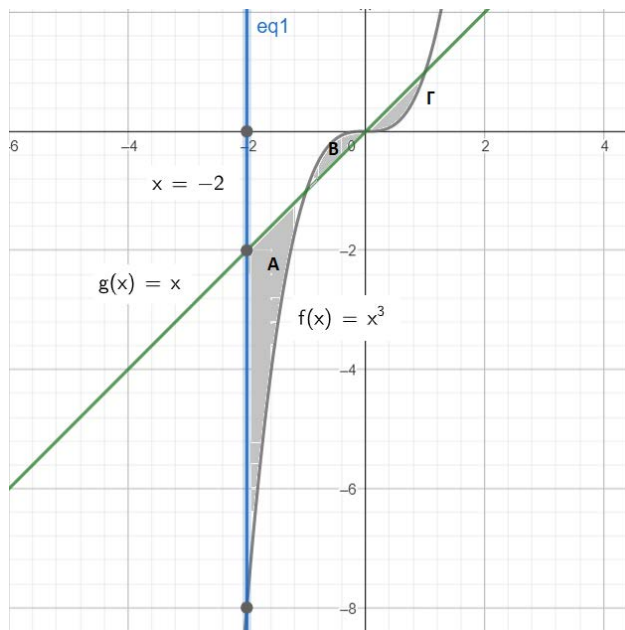
Εφαρμογή 6

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ και την ευθεία $x = -2 (= h(x))$.

Λύση

Οι καμπύλες f , g τέμνονται στα σημεία:

$$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = 0$$



Σχχεδιάζοντας το γράφημα των συναρτήσεων, μπορούμε να δούμε ότι το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-2}^{-1} (g(x) - f(x)) dx + \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} (x - x^3) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

■

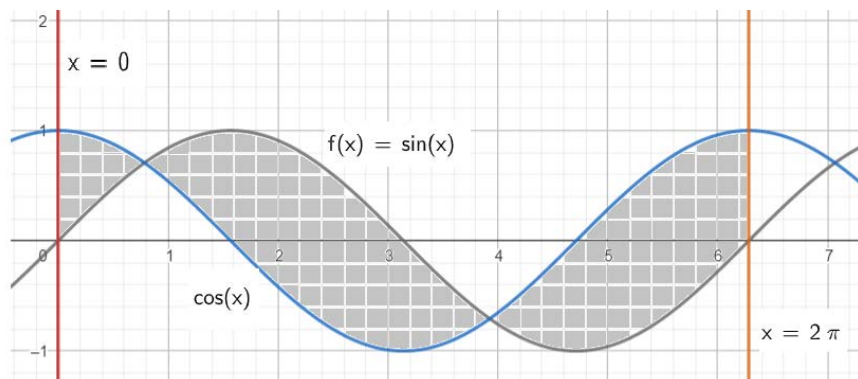
Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, και των ευθειών $x = 0$, $x = 2\pi$.

Λύση

Οι καμπύλες f , g τέμνονται στα σημεία:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \& \quad x = \frac{5\pi}{4}$$



Σχχεδιάζοντας το γράφημα των συναρτήσεων, μπορούμε να δούμε ότι το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x)-f(x)) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (f(x)-g(x)) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (g(x)-f(x)) \, dx$$

Επομένως:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \, dx$$

Οπότε

$$\begin{aligned} E &= (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} = \\ &= \eta\mu \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 - \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} - \eta\mu \frac{5\pi}{4} + \\ &\quad + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + \eta\mu \frac{\pi}{4} + \eta\mu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 2\pi - \eta\mu \frac{5\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

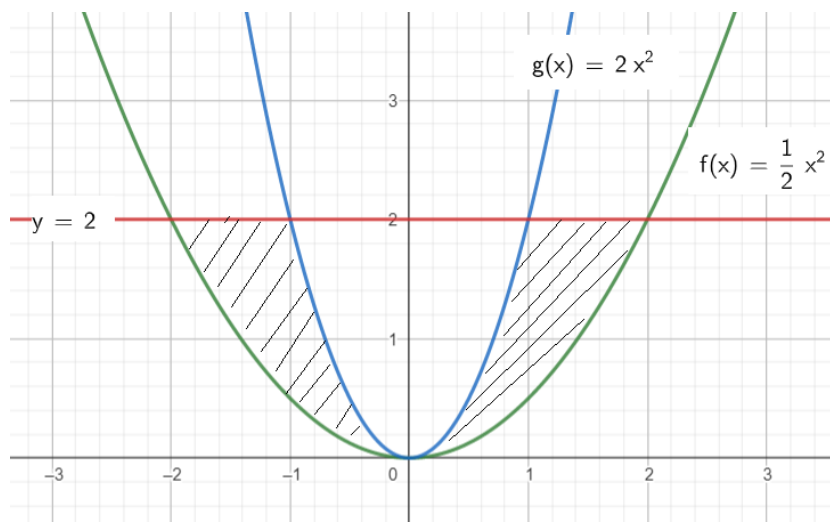
■

Εφαρμογή 8 (ολοκλήρωση ως προς y)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = 2x^2$ και της ευθείας $y = 2$.

Λύση

Κάνοντας τη γραφική παράσταση των τριών συναρτήσεων έχουμε το παρακάτω σχήμα. Λόγω συμμετρίας είναι αρκετό να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Οι καμπύλες $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και $y = 2$ τέμνονται στα σημεία $x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ενώ οι $g(x) = 2x^2$, $y = 2$ στα σημεία $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.



1^{ος} τρόπος (ολοκλήρωση ως προς x)

Έχουμε:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx + \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + 4 - \frac{8}{6} - 2 + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Τέλος, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$E = 2E_1 = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

2^{ος} τρόπος (ολοκλήρωση ως προς y)

Μερικές φορές είναι ευκολότερο να ολοκληρώσουμε ως προς y, δηλαδή να θεωρήσουμε το y σα μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τις συναρτήσεις $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2y}$ και

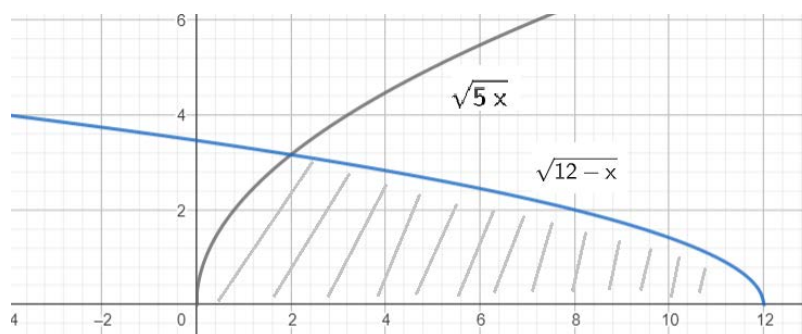
$y = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}$. Και πάλι, το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^2 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y} \right) dy = \int_0^2 \left(\sqrt{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{2}} \right) dy = \left(\sqrt{2} \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \sqrt{2} \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■

Εφαρμογή

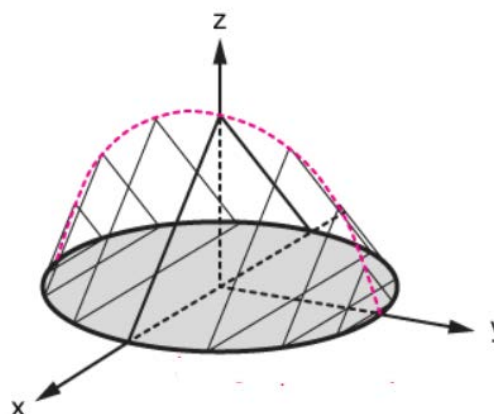
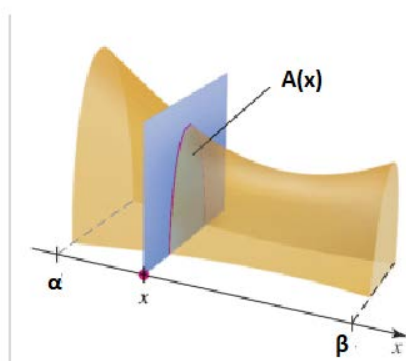
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του (φραγμένου) χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $f(x) = \sqrt{5x}$, $g(x) = \sqrt{12-x}$ και του άξονα των x.



Β. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ

(Ι) ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού (δείτε τα παρακάτω σχήματα), το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: το κάθετο επίπεδο στον x -άξονα (xOx'), σε ένα σημείο του με τετμημένη x ($x \in [a, \beta]$), τέμνει το στερεό (διατομή) σ' ένα επίπεδο χωρίο $R(x)$ του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με $A(x)$.

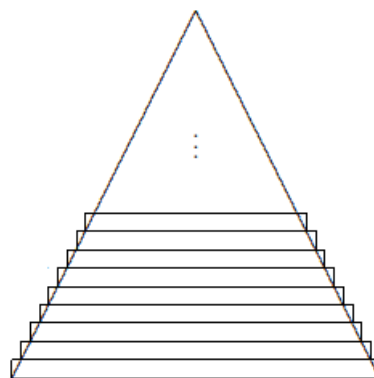
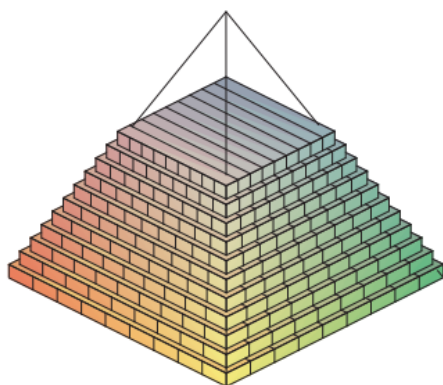


Αποδεικνύεται ότι ο όγκος του στερεού αυτού δίνεται από τον τύπο:

$$V = \int_a^{\beta} A(x) dx$$

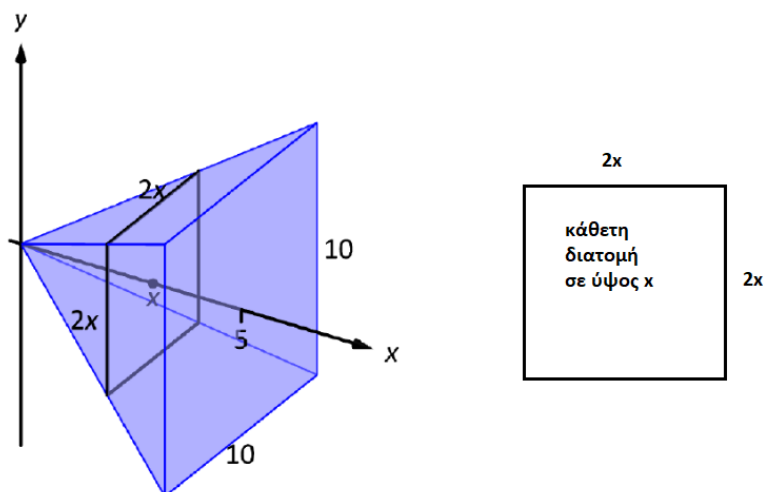
Εφαρμογή 9

Μιά (τετραγωνική) πυραμίδα με ύψος 5m έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 10m. Η κάθετη διατομή της πυραμίδας σε απόσταση x m από την κορυφή, είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $2x$ m. Να βρεθεί ο όγκος της πυραμίδας.



Λύση

Σχεδιάζοντας την πυραμίδα, σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (δείτε το παρακάτω γράφημα), βλέπουμε ότι η διατομή της σε απόσταση x m από την κορυφή, είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $2x$ m.



Επομένως το εμβαδόν της διατομής (στο σημείο αυτό) είναι ίσο με:

$$A(x) = 2x \cdot 2x = 4x^2$$

Ο όγκος της πυραμίδας δίνεται (σύμφωνα με τα παραπάνω) από το ολοκλήρωμα:

$$V = \int_0^5 A(x) dx = \int_0^5 4x^2 dx = 4 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^5 = 4 \frac{5^3}{3} = \frac{500}{3}$$

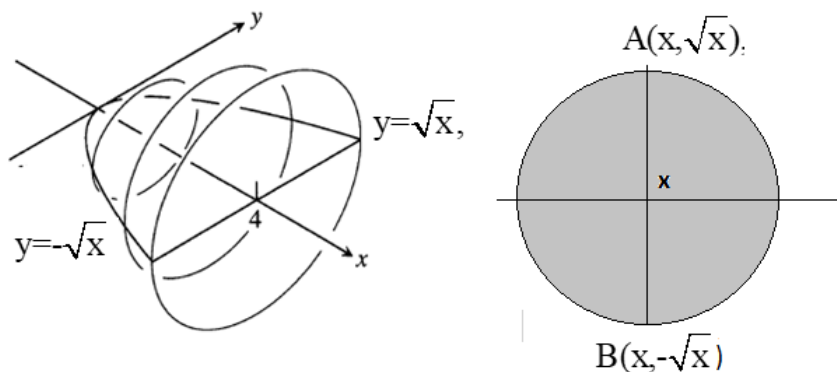
■

Παρατήρηση 3

Είναι γνωστό ότι, ο όγκος μίας πυραμίδας με εμβαδόν βάσης B και ύψος h δίνεται από τον τύπο $V = \frac{1}{3}Bh$, οπότε εδώ: $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}10 \cdot 10 \cdot 5 = \frac{500}{3}$ που συμφωνεί με το αποτέλεσμα της εφαρμογής.

Εφαρμογή 10

Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι κυκλικοί δίσκοι κάθετοι στον x -άξονα (xOx'), με μιά διάμετρο στο σημείο x κάθετη στον άξονα και τα άκρα της να βρίσκονται στις παραβολές $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$ και $0 \leq x \leq 4$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



Λύση

Σχεδιάζοντας το στερεό (δείτε το παραπάνω γράφημα), βλέπουμε ότι η διατομή του σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων, είναι ένας κυκλικός δίσκος κάθετος στον x -άξονα και ακτίνα ίση με $r = \sqrt{x}$.

Επομένως το εμβαδόν της διατομής (στο σημείο αυτό) είναι ίσο με:

$$A(x) = \pi r^2 = \pi (\sqrt{x})^2 = \pi x$$

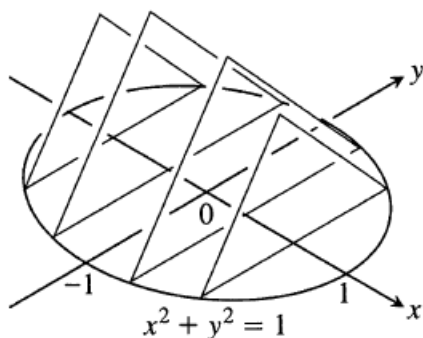
Ο όγκος του στερεού δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V = \int_0^4 A(x) dx = \int_0^4 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi$$

■

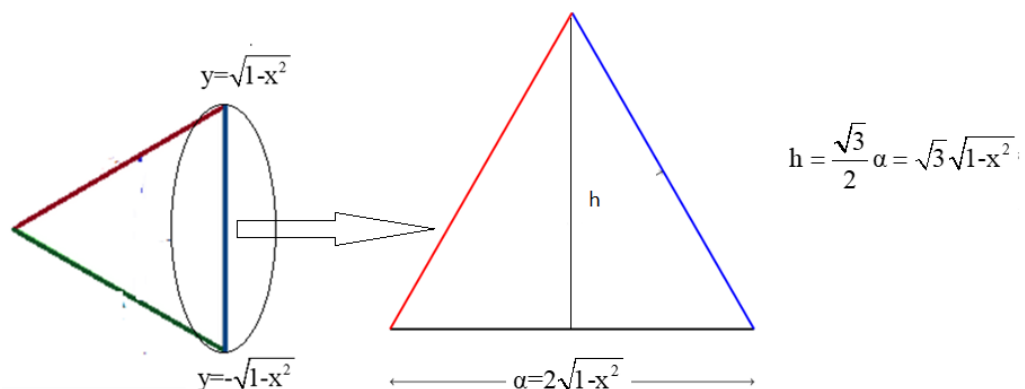
Εφαρμογή 11

Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι ισόπλευρα τρίγωνα με μιά πλευρά κάθετη στον x -άξονα, και τα δύο άκρα της (πλευράς) να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



Λύση

Σχεδιάζοντας το στερεό (δείτε το παραπάνω γράφημα), βλέπουμε ότι η διατομή του σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων ($-1 \leq x \leq 1$), είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μία πλευρά κάθετη στον x -άξονα, και τα άκρα της (πλευράς) να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Η πλευρά του τριγώνου θα έχει μήκος: $\alpha = \sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) = 2\sqrt{1-x^2}$. Αλλά τό ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά α είναι ίσο με $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$, οπότε εδώ $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.



Επομένως το εμβαδόν της (τριγωνικής) διατομής (στο σημείο x) είναι ίσο με:

$$A(x) = \frac{1}{2} \alpha h = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{2} \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

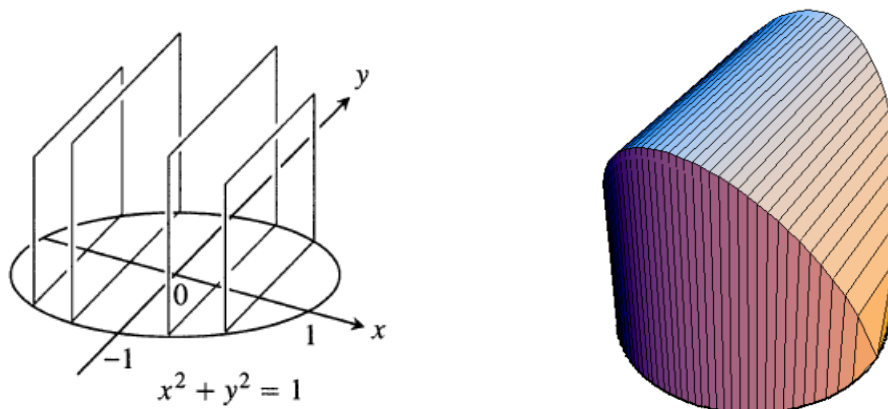
Ο όγκος του στερεού δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

■

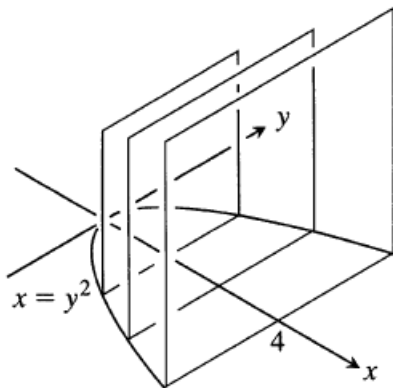
Εφαρμογή

Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι τετράγωνα κάθετα στον x -άξονα, με μία πλευρά στο σημείο x κάθετη στον άξονα και τα δύο άκρα της να βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



Εφαρμογή

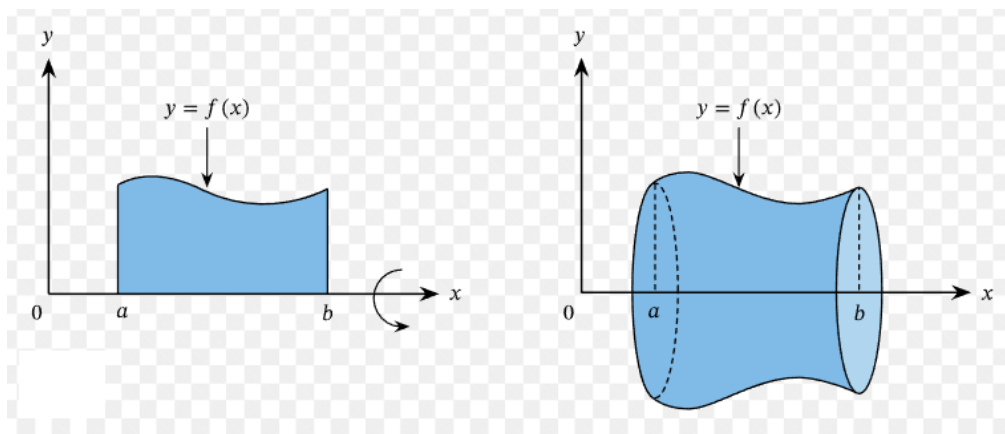
Δίνεται το στερεό του παρακάτω σχήματος: οι διατομές είναι τετράγωνα κάθετα στον x -άξονα, με μία πλευρά στο σημείο x κάθετη στον άξονα και τα άκρα της να βρίσκονται στις παραβολές $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$ και $0 \leq x \leq 4$. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού.



(II) ΌΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

(α) ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ γύρω από τον x -άξονα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και έστω ότι η εν λόγω συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αν το χωρίο R που περικλείεται από το γράφημα της τον άξονα των x και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$,



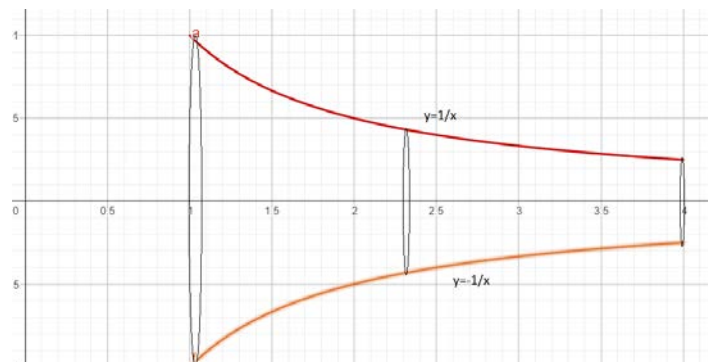
περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x , δημιουργεί ένα στερεό του οποίου ο **όγκος** είναι ίσος με:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Εφαρμογή 12

Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 4$ γύρω από τον άξονα των x .

Λύση



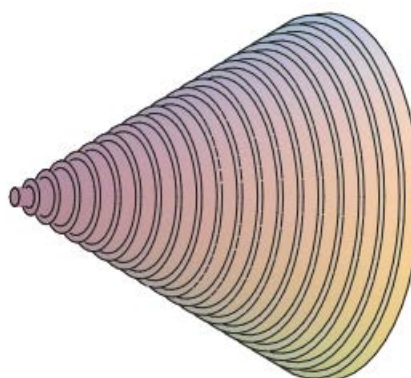
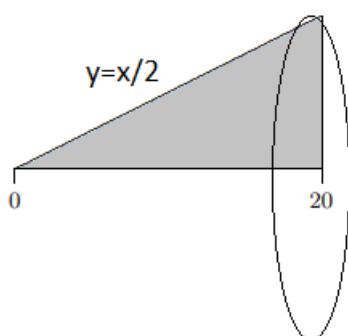
Ο όγκος είναι ίσος με:

$$V = \int_1^4 \pi y^2 dx = \int_1^4 \pi \frac{1}{x^2} dx = \int_1^4 \pi x^{-2} dx = \pi \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^4 = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^4 = -\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4} \pi$$

■

Εφαρμογή 13

Υπολογίστε τον όγκο ορθού κυκλικού κώνου με ακτίνα βάσης 10 και ύψος 20.



Λύση

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το στερεό προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου, γύρω από τον άξονα των x , που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{2}x$ και τον άξονα των x με $0 \leq x \leq 20$.

Ο συγκεκριμένος όγκος V είναι ίσος με:

$$V = \pi \int_0^{20} \left(\frac{1}{2}x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^{20} = \frac{2000\pi}{3}$$

Παρατήρηση

(I) Εάν ο κώνος έχει τυχούσα ακτίνα βάσης r και ύψος h τότε αποδείξτε όπως παραπάνω ότι, ο όγκος του κώνου δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(II) Εάν εφαρμόσουμε τον τύπο του (1) στην παραπάνω εφαρμογή, τότε έχουμε:

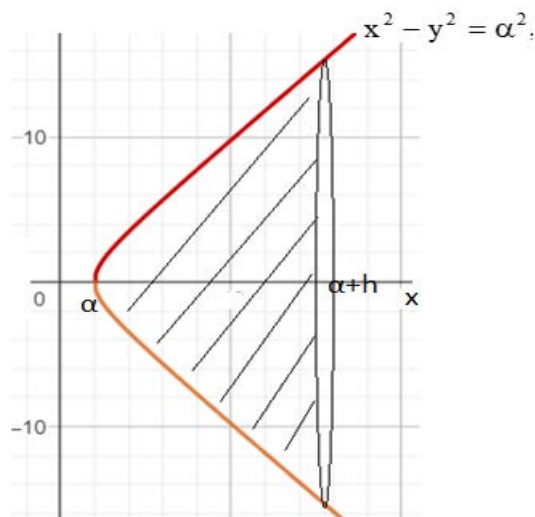
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = \frac{2000\pi}{3}$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με αυτό που υπολογίσαμε.

Εφαρμογή 14

Το τμήμα του xy -επιπέδου που περικλείεται από την υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$, $\alpha > 0$, $x > 0$ και την ευθεία $x = \alpha + h$, $h > 0$ περιστρέφεται γύρω από τον x -άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x .

Λύση



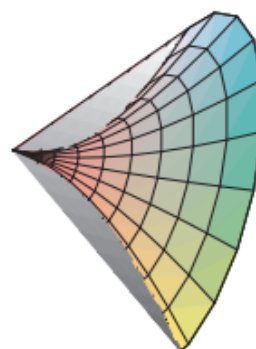
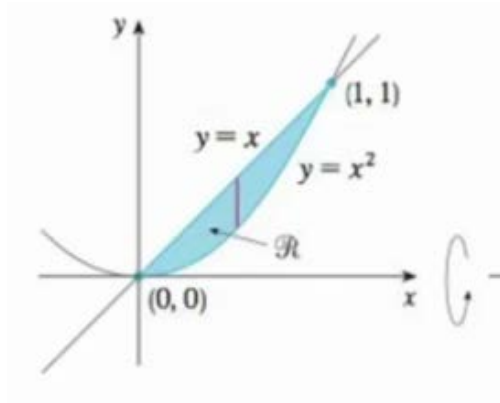
Ο συγκεκριμένος όγκος V είναι:

$$V = \int_{\alpha}^{\alpha+h} \pi(x^2 - \alpha^2) dx = \frac{\pi}{3} [(\alpha+h)^3 - \alpha^3] - \pi\alpha^2 h = \frac{\pi}{3} (3\alpha^2 h + 3\alpha h^2 + h^3) - \pi\alpha^2 h = \frac{\pi h^2}{3} (3\alpha + h)$$

■

Εφαρμογή 15

Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ περιστρέφεται γύρω από τον x -άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή που δημιουργείται.

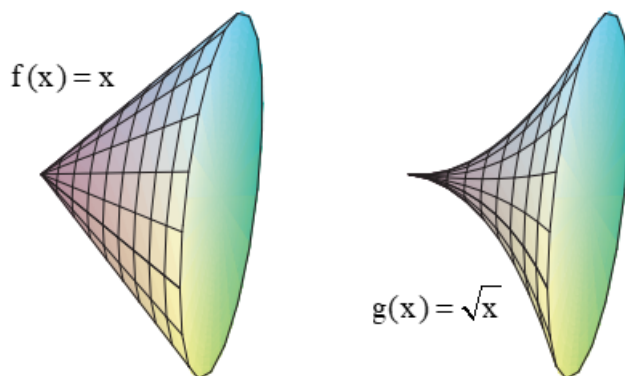


Λύση

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία:

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$$

Ο όγκος του ζητούμενου στερεού υπολογίζεται ως εξής: από τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε το χωρίο που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $f(x) = x$ (με $0 \leq x \leq 1$) και πάνω από τον x -άξονα θα αφαιρέσουμε τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε το χωρίο που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $g(x) = x^2$ και πάνω από τον x -άξονα.



Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = \int_0^1 \left(\pi x^2 - \pi (x^2)^2 \right) dx = \left(\frac{\pi x^3}{3} - \frac{\pi x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}$$

■

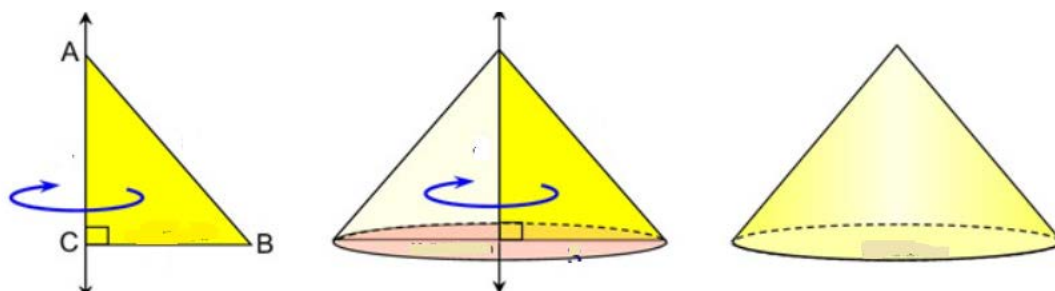
(β) ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ γύρω από τον άξονα $x=y$ και τον y -άξονα.

Εάν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και περιστρέψουμε το χωρίο που περικλείεται κάτω από το γραφικό της γύρω από την ευθεία (άξονα) $x = c$, $c < \alpha$, τότε αποδεικνύεται ότι: ο όγκος του στερεού που δημιουργείται δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi(x-c)f(x)dx$$

Στην περίπτωση που περιστρέφουμε το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες $y = f(x)$ (πάνω καμπύλη) και $y = g(x)$ κάτω καμπύλη, τότε ο όγκος του στερεού που δημιουργείται δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi(x-c)(f(x)-g(x))dx$$



(Περιστροφή γύρω από τον y-άξονα) Εάν $x = 0$ τότε έχουμε περιστροφή γύρω από τον y-άξονα, και ο όγκος του στερεού που προκύπτει δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x f(x) dx$$

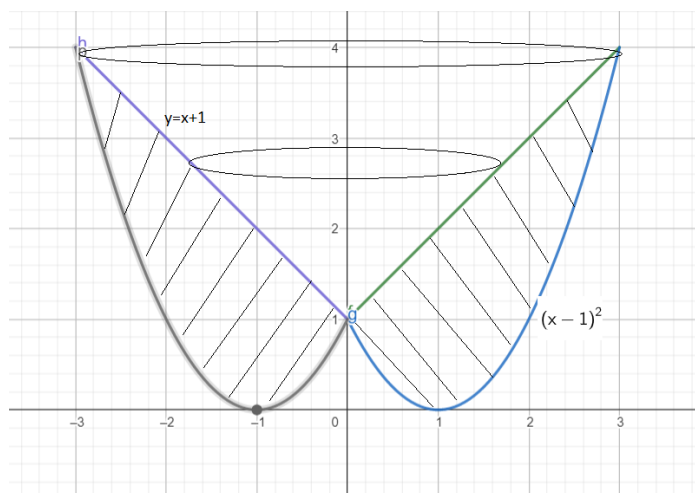
Στην περίπτωση που περιστρέφουμε το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες $y = f(x)$ (πάνω καμπύλη) και $y = g(x)$ (κάτω καμπύλη), γύρω από τον y-άξονα, τότε ο όγκος του στερεού που δημιουργείται δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x (f(x) - g(x)) dx$$

Εφαρμογή 16

Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$ περιστρέφεται γύρω από τον y-άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού, από περιστροφή, που δημιουργείται.

Λύση



Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία:

$$x + 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$$

Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = \int_0^3 2\pi x \left((x+1) - (x-1)^2 \right) dx = \int_0^3 2\pi (-x^3 + 3x^2) dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} \right) \bigg|_0^3 = \frac{27\pi}{2}$$

■

Εφαρμογή 17

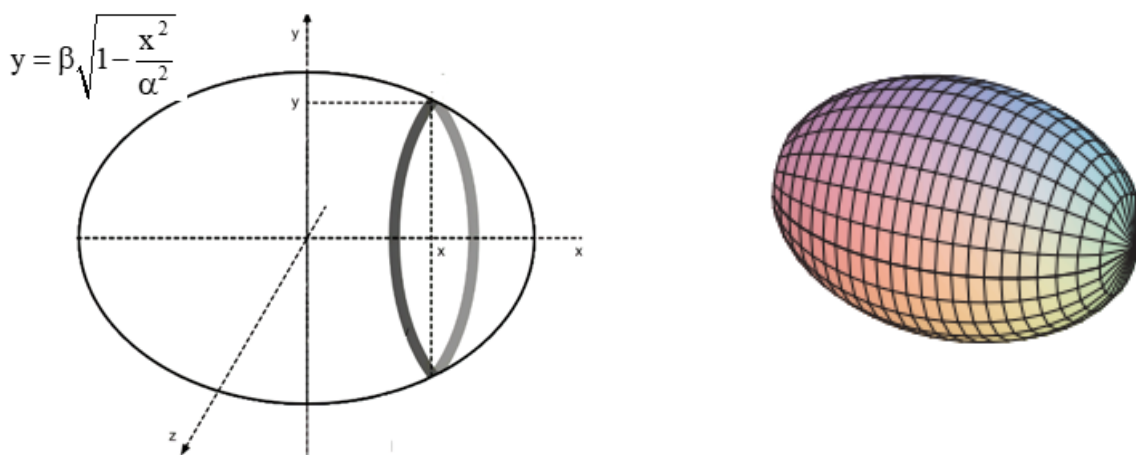
Έστω ότι έχουμε το χωρίο που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται εάν περιστρέψουμε το χωρίο αυτό γύρω από τον:

(α) x-άξονα

(β) τον y-άξονα (τα στερεά σε αυτή την περίπτωση ονομάζονται **ελλειψοειδή**)

Λύση

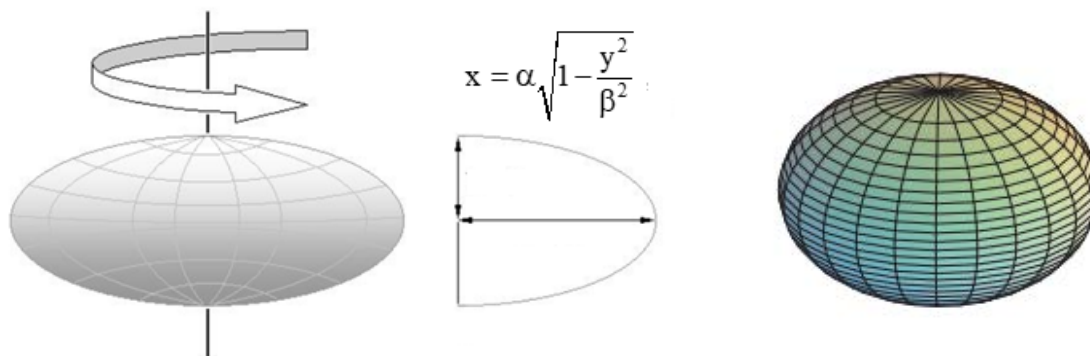
(α) Το ζητούμενο στερεό προκύπτει εάν περιστρέψουμε το χωρίο που περικλείεται από την συνάρτηση $y = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$, $-\alpha \leq x \leq \alpha$ και x-άξονα γύρω από τον x-άξονα.



Επομένως, ο ζητούμενος όγκος δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} \pi \left(\beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} \right)^2 dx = \pi \beta^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right) dx = \pi \beta^2 \left(x - \frac{x^3}{3\alpha^2} \right) \bigg|_{-\alpha}^{\alpha} = 2\pi \beta^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3\alpha^2} \right) = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta^2$$

(β) Ανάλογα, το ζητούμενο στερεό προκύπτει εάν περιστρέψουμε το χωρίο που περικλείεται από την συνάρτηση $x = \alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}$, $-\beta \leq y \leq \beta$ και y-άξονα γύρω από τον y-άξονα.



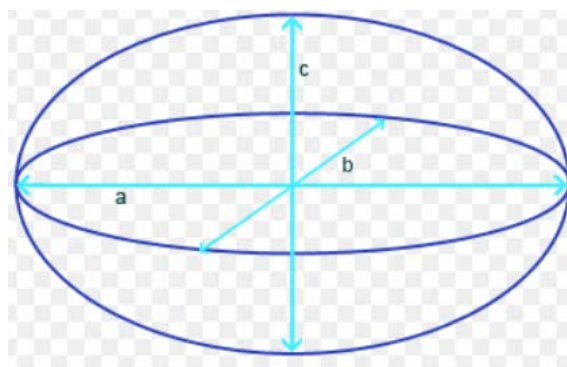
$$V = \int_{-\beta}^{\beta} \pi \left(\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} \right)^2 dy = \pi \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2} \right) dy = \pi \alpha^2 \left(y - \frac{y^3}{3\beta^2} \right) \Big|_{-\beta}^{\beta} = 2\pi \alpha^2 \left(\beta - \frac{\beta^3}{3\beta^2} \right) = \frac{4}{3} \pi \alpha^2 \beta$$

■

Παρατήρηση 4

(α) Είναι γνωστό ότι ο όγκος ενός ελλειψοειδούς με μήκος (θετικών) αξόνων α, β, c είναι ίσος με:

$$V = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta c$$



Στην (α) περίπτωση είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\beta = c$, οπότε ο όγκος με χρήση του τύπου είναι ίσος

$$V = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta \beta = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta^2$$

Ανάλογα, στην (β) περίπτωση είναι εύκολο να δει κανείς ότι $a = c$, οπότε ο όγκος με χρήση του τύπου είναι ίσος

$$V = \frac{4}{3} \pi \alpha \alpha \beta = \frac{4}{3} \pi \alpha^2 \beta.$$

(β) Ο όγκος στην περίπτωση (β) θα μπορούσε να υπολογιστεί με τη βοήθεια του τύπου

$$V = \int_{-\beta}^{\beta} 2\pi x f(x) dx \quad \text{με} \quad f(x) = \beta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}, \quad \text{η ολοκλήρωση όμως είναι αρκετά δύσκολη}$$

(απαιτεί χρήση αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων).