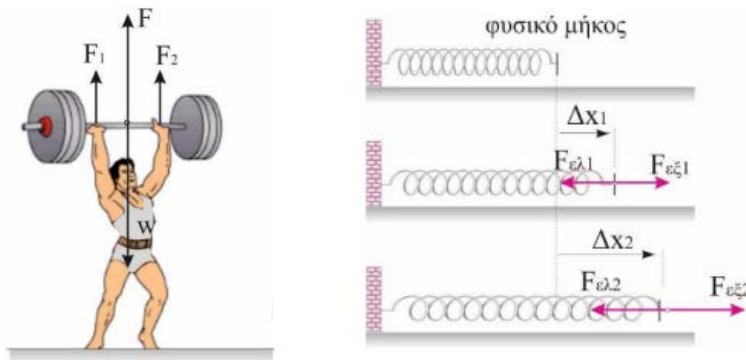


19. Εφαρμογές ολοκληρωμάτων 2^ο μέρος -- ΕΡΓΟ

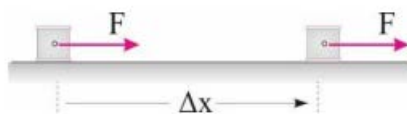
Σαν **έργο**, στη Φυσική, θεωρούμε την ποσότητα της ενέργειας που παράγεται ή καταναλώνεται από ένα σώμα κατά τη διάρκεια μιας μεταβολής στην κινητική του κατάσταση. Είναι το γινόμενο μιας δύναμης επί τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της (έχουν κοινή διεύθυνση).

Εναλλακτικά, μπορεί να ειπωθεί ότι, είναι το φυσικό εκείνο μέγεθος που εκφράζει την ενέργεια που μετετρέπεται από μια μορφή σε μιά άλλη ή μεταφέρεται από ένα σώμα σ' ένα άλλο (η ενέργεια που μια δύναμη μεταφέρει σε ένα κινούμενο σώμα).



(Α) Σταθερή δύναμη

(I) Το **έργο W** μιας σταθερής δύναμης F ορίζεται ως το γινόμενο της δύναμης F (σε N) επί τη μετατόπιση x (σε m) που προκαλεί.



$$W = F \cdot x \quad (x = \text{μετατόπιση})$$

Η μονάδα μέτρησης του έργου, που προκύπτει από την παραπάνω σχέση, είναι το:

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$$

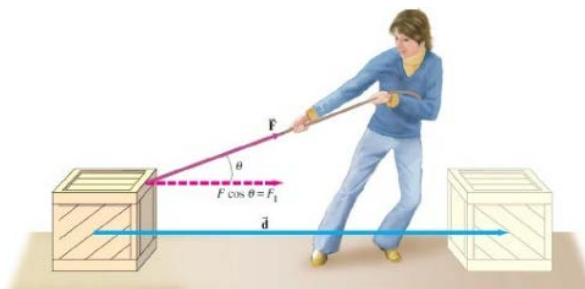
Στο παρακάτω σχήμα δείχνεται η γραφική παράσταση του μέτρου μιας δύναμης F σε συνάρτηση με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, Δx . Αν υπολογίσουμε το γραμμοσκιασμένο εμβαδό αυτό είναι ίσο με:

$$\text{Εμβαδόν} = \text{Υψος} \times \text{Βάση} = \text{Δύναμη} \times \text{Μετατόπιση} = \text{Έργο}$$



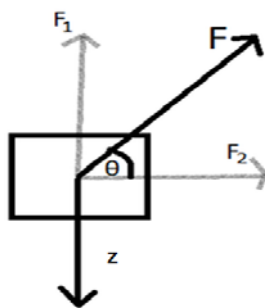
- (II) Εάν η δύναμη F σχηματίζει γωνία θ με τη μετατόπιση, το έργο ισούται με το έργο της συνιστώσας της F_x της δύναμης F (συνιστώσα στη διεύθυνση της κίνησης). Δηλαδή:

$$W = F \cdot x \cdot \cos\theta$$



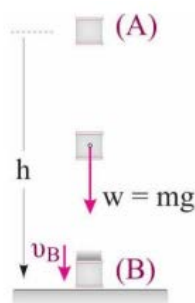
Παράδειγμα

- (I) Έστω ότι έχουμε τις δυνάμεις του παρακάτω σχήματος (και το αντικείμενο κινείται οριζόντια).



Η δύναμη Z ισούται με την F_1 και η συνιστώσα δύναμη F_2 παράγει έργο. Η δύναμη F_2 ισούται με $F \cdot \cos\theta$, οπότε παράγει έργο ίσο με $F \cdot \Delta x \cdot \cos\theta$. Η δύναμη F_1 δεν παράγει έργο γιατί το σώμα δεν κινείται σε αυτή τη διεύθυνση.

- (II) Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει ένα σώμα που ελευθερώνεται σε ύψος h πάνω από το δάπεδο και πέφτει ελεύθερα λόγω του **βάρους** του (βαρυτική έλξη). Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Η μετατόπιση h του σώματος (μάζας m) είναι κατακόρυφη προς τα κάτω και η διεύθυνση της δύναμης του βάρους το ίδιο, άρα το έργο της δύναμης του βάρους είναι θετικό και ίσο με:

$$W=m \cdot g \cdot h$$

όπου $g=9,8 \frac{m}{s^2}$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Εφαρμογή 1.

Να υπολογιστεί το έργο που απαιτείται για να σηκώσουμε:

(α) μία σακούλα (με περιεχόμενο) 2kg από το έδαφος σε ύψος 1,5m.

(β) ένα όχημα 3 τόνων από το έδαφος σε ύψος 2 m.

Λύση

(α) Η δύναμη που δρα στη σακούλα, και την οποία θα πρέπει να την εξουδετερώσουμε για να την σηκώσουμε στο απαιτούμενο ύψος, είναι το **βάρος** της το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$F=m \cdot g=2 \cdot 9,8=19,6 \text{ N}$$

Επομένως, το απαιτούμενο έργο είναι ίσο με:

$$W=F \cdot x=19,6 \cdot 1,5 = 29,4 \text{ J}$$

(β) Εργαζόμενοι ανάλογα έχουμε ότι, το απαιτούμενο έργο είναι ίσο με:

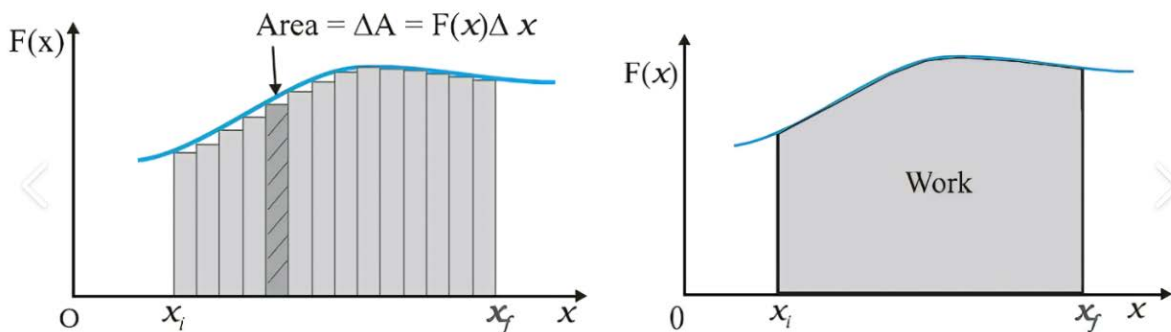
$$W=F \cdot x=3000 \cdot 9,8 \cdot 2 = 58.800 \text{ J}.$$

■

(B) Μεταβαλλόμενη δύναμη

Αν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη, τότε όπως θα δούμε παρακάτω, το έργο της υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $F(x)$ δύναμης-μετατόπισης ολοκληρώνοντάς την πάνω στη μετατόπιση (όρια της).

Πράγματι, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο W που παράγεται από μια μεταβλητή δύναμη $F(= F(x))$. Θεωρούμε ότι η δύναμη αυτή ασκείται σ' ένα αντικείμενο με αποτέλεσμα αυτό να κινείται οριζόντια, κατά μήκος του άξονα των x , από ένα σημείο α μέχρι ένα σημείο β . Έστω ότι στη θέση x η ασκούμενη δύναμη είναι ίση με $F(x)$ και έστω ότι η συνάρτηση $F:[\alpha,\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.



Διαμερίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε υποδιαστήματα ίσου μήκους ($h=\frac{\beta-\alpha}{n}$) με τη βοήθεια των σημείων: $\alpha=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$.

Εάν το πλάτος h της διαμέρισης είναι αρκετά μικρό, τότε η τιμή της F στο (κάθε) διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ είναι σχεδόν σταθερή, αφού η F είναι συνεχής. Εάν εφαρμόσουμε τον ορισμό του έργου δύναμης, τότε το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση αντικειμένου από το σημείο x_{i-1} μέχρι το σημείο x_i (υπό την επίδρασή της) είναι ίσο με:

$$W_i \approx F(x_i) \cdot \Delta x_i$$

όπου $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Επομένως, το συνολικό **έργο** που παράγεται κατά τη μετακίνηση του αντικειμένου από το σημείο α μέχρι ένα σημείο β , είναι ίσο με:

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Εάν τελικά, το πλάτος h της διαμέρισης τείνει στο μηδέν το παραπάνω άθροισμα Riemann συγκλίνει. Το όριο αυτό είναι ο ορισμός του **έργου μιάς μεταβλητής δύναμης**, δηλαδή το έργο ισούται με:

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx$$

Εφαρμογές

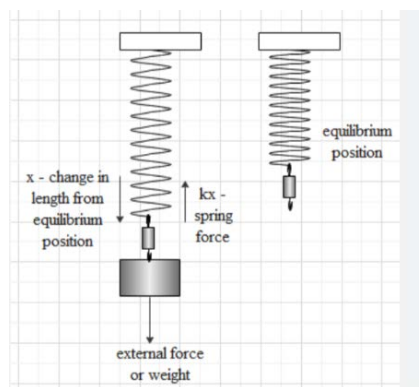
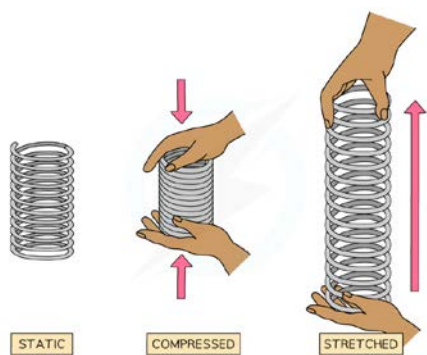
(Α) Ελατήριο

Νόμος Hooke

Ο **νόμος του Hooke** είναι εκείνος ο νόμος της Φυσικής που δηλώνει ότι: η δύναμη F που απαιτείται για να επεκταθεί ή να συμπιεστεί ένα ελατήριο κατά κάποια απόσταση x είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης αυτής, δίνεται δηλαδή από μία σχέση:

$$F = k \cdot x$$

όπου k είναι μιά σταθερά, χαρακτηριστικό του ελατηρίου (π.χ. αναφέρεται στην η ακαμψία του) και το x είναι μικρό σε σύγκριση με τη συνολική πιθανή παραμόρφωση του ελατηρίου.



Παράδειγμα 1

Μιά δύναμη 50 N χρειάζεται για να επιμηκύνει ένα ελατήριο από το φυσικό του μήκος των 2 μέτρων σε ένα μήκος των 2,5 μέτρων.

(α) Να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου.

- (β) Βρείτε το έργο που χρειάζεται για να τεντώσουμε το ελατήριο κατά μήκος, 0,5 μέτρα από αυτό φυσικό μήκος.

Λύση

- (α) Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Hooke, η δύναμη (F) που απαιτείται για να επιμηκύνει ένα ελατήριο από το φυσικό του μήκος των 2 μέτρων σε ένα μήκος των 2,5 μέτρων, δίνεται δηλαδή από τη σχέση (επιμήκυνση κατά 0,5m):

$$F=k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{50}{0,5} = 100$$

- (β) Το έργο που απαιτείται για να επιμηκύνουμε το ελατήριο από τη θέση ηρεμίας/ισορροπίας του κατά 0,5 μέτρα, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_0^{0,5} k \cdot x \, dx = 100 \int_0^{0,5} x \, dx = 100 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,5} = 100 \frac{0,5^2}{2} = 12,5 \, \text{J}$$

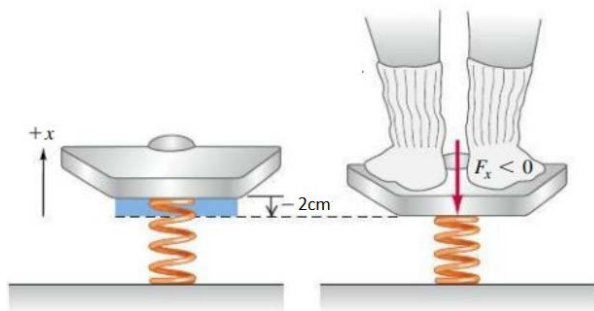
■

Παράδειγμα 2

Ένας άνδρας βάρους 800 N ανεβαίνει σε μία ζυγαριά που περιέχει ένα ελατήριο και του προκαλεί σμήκρυνση κατά 2cm (λόγω του βάρους του). Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται από τη σμήκρυνση του ελατηρίου.

Λύση

(θεωρούμε σαν θετική διεύθυνση της μετατόπισης τη διεύθυνση από κάτω προς τα επάνω, χωρίς αυτό να επηρεάζει το αποτέλεσμα)



Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Hooke, η δύναμη F που απαιτείται για να σμηκρύνει το ελατήριο κατά 2 cm, δίνεται δηλαδή από μία σχέση:

$$F=k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{-800}{-0,02} = 40.000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Το έργο που παράγεται κατά την σμήκρυνση του ελατηρίου είναι ίσο με:

$$W = \int_0^{0,02} k \cdot x \, dx = 40.000 \int_0^{0,02} x \, dx = 40.000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,02} = 40.000 \frac{0,02^2}{2} = 8 \, \text{J}$$

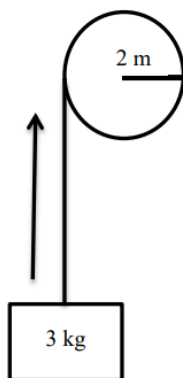
■

(B) Βάρος που κρεμιέται/αιωρείται

Παράδειγμα 1

Ένα αντικείμενο μάζας $3^{\text{ον}}$ κιλών βρίσκεται στην άκρη ενός σκοινιού (όπως φαίνεται στο σχήμα), το δε σκοινί κρέμεται από μια τροχαλία. Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται κατά μία περιστροφή της τροχαλίας. Υποθέστε ότι τόσο η τροχαλία όσο και το σκοινί έχουν αμελητέο βάρος.

Λύση



Όταν περιστρέψουμε την τροχαλία μία φορά, το αντικείμενο μετατοπίζεται κατά μία απόσταση ίση με την περίμετρο του κυκλικού δίσκου της τροχαλίας, δηλαδή κατά απόσταση ίση με:

$$2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

Η δύναμη που δρα στο αντικείμενο, και την οποία θα πρέπει να την εξουδετερώσουμε για να σηκώσουμε, είναι το βάρος του το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$F = m \cdot g = 3 \cdot 9,8 = 29,4 \text{ N}$$

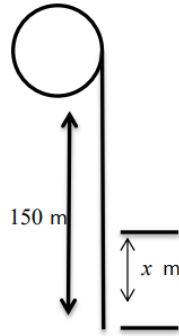
Το έργο που παράγεται κατά μία περιστροφή της τροχαλίας είναι ίσο με:

$$W = \int_0^{4\pi} 29,4 dx = 29,4x \Big|_0^{4\pi} = 29,4 \cdot 4\pi = 117,6\pi \text{ J}$$

■

Παράδειγμα 2

Μας δίνεται ένα πλήρως εκτεταμένο/κρεμασμένο (όπως φαίνεται παρακάτω) καλώδιο 150 m το οποίο ζυγίζει (έχει μάζα $3 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$). Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται όταν τραβήξουμε/μαζέψουμε (σ' ένα σημείο) 50 m του καλωδίου.



Λύση

Η δύναμη που δρα εδώ είναι το βάρος του καλωδίου, και η οποία είναι μεταβαλλόμενη (κάθε φορά έχει σχέση με το μήκος του καλωδίου που απομένει/δεν έχει μαζευτεί) δίνεται δε από τη σχέση:

$$F=F(x)=m \cdot g=3 \cdot (150-x) \cdot 9,8 \text{ N}$$

Πράγματι, στην αρχή θα υπάρχουν 150m κρεμασμένο καλώδιο. Καθώς το καλώδιο τυλίγεται (κατά x m), το καλώδιο γίνεται όλο και πιο κοντό, ζυγίζοντας όλο και λιγότερο. Σταματάμε αφού τυλιχτούν $x = 50$ m, δηλ. όταν έχουν μείνει μόνο 100 m καλωδίου να κρέμονται. Όταν έχουν τυλιχθεί x m καλώδιο, αυτό που απομένει έχει μάζα $(150-x) \cdot 3$ kg.

Το έργο που παράγεται είναι ίσο με:

$$W = \int_0^{50} 3 \cdot (150-x) \cdot 9,8 dx = 29,4 \cdot \left(150x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{50} = 183.750 \text{ J}$$

■

(Γ) Άντληση υγρού.

Η άντληση υγρού από την κορυφή μιας δεξαμενής/δοχείου απαιτεί κάποιο έργο επειδή το υγρό (με την άντληση του) κινείται ενάντια στη βαρύτητα. Για να το υπολογίσουμε, φανταζόμαστε το έργο που απαιτείται για την ανύψωση μικρών (στοιχειωδών) δίσκων υγρού (μαζών υγρού) πάνω και έξω από τη δεξαμενή/δοχείο. Έτσι αντλούμε μια σειρά από μάζες ενάντια στη βαρύτητα (βαρυτική έλξη) και αφήνουμε το υγρό να χυθεί έξω μόλις φτάσει στην κορυφή. Μας ζητείται να υπολογίσουμε το έργο που εκτελείται σε όλη αυτή τη δραστηριότητα, σημειώνοντας ότι g είναι

η βαρυτική σταθερά, $g=9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Αυτό που ποικίλλει (είναι διαφορετικό κάθε φορά) σε αυτά τα συστήματα είναι η απόσταση που χρειάζεται να ανυψωθεί κάθε δίσκος υγρού, η οποία απόσταση μετριέται λαμβάνοντας υπόψη το το συνολικό ύψος του δοχείου, h , και αφαιρώντας από αυτό το ύψος x που βρίσκεται ο συγκεκριμένος δίσκος (όγκος) του υγρού που εξετάζουμε.

Έστω λοιπόν ότι το δοχείο (δείτε π.χ παρακάτω σχήμα) είναι γεμάτο με υγρό πυκνότητας

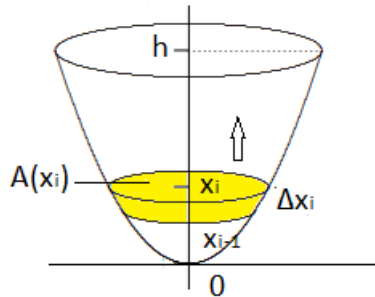
$\sigma \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$, το δε ύψος του δοχείου είναι ίσο με h (σε m). Διαμερίζουμε το διάστημα $[0,h]$ σε

υποδιαστήματα ίσου μήκους $\left(\frac{h}{n} \right)$ με τη βοήθεια των σημείων: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = h$.

Έστω μια οριζόντια διατομή του δοχείου (κίτρινο χρώμα) σε απόσταση x_i από το κάτω μέρος του και έστω ότι αυτή η διατομή έχει εμβαδόν:

$$A(x_i)$$

(θεωρούμε το πλάτος $\frac{h}{n}$ της διαμέρισης μικρό, οπότε στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ το εμβαδόν $A(x_i)$ παραμένει σταθερό).



Ο όγκος του στερεού με βάση αυτή τη διατομή και ύψος $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ είναι ίσος με:

$$A(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Το στερεό αυτό περιέχει υγρό (στοιχειώδης μάζα υγρού) που έχει μάζα ίση με:

$$\sigma \cdot A(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Η δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε στον όγκο/μάζα αυτό για να την μεταφέρουμε στο πάνω μέρος του δοχείου είναι ίση με το βάρος του υγρού, το οποίο ισούται με:

$$g \cdot \sigma \cdot A(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα νερού που περιέχεται στον όγκο αυτό, μέχρι το επάνω μέρος του δοχείου είναι ίση με:

$$h - x_i$$

Το έργο λοιπόν που απαιτείται, για να μεταφέρουμε τη στοιχειώση αυτή μάζα υγρού στο επάνω μέρος του δοχείου, είναι ίσο με:

$$W_i \approx g \cdot \sigma \cdot A(x_i) \cdot (h - x_i) \cdot \Delta x_i$$

Επομένως, το συνολικό **έργο** που απαιτείται για να αντλήσουμε όλο το υγρό, από το επάνω μέρος του δοχείου, είναι ίσο με:

$$W \approx \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n g \cdot \sigma \cdot A(x_i) \cdot (h - x_i) \cdot \Delta x_i$$

Εάν τελικά το πλάτος $\frac{h}{n}$ της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, το παραπάνω άθροισμα Riemann συγκλίνει. Το όριο αυτό είναι το **έργο που απαιτείται για την άντληση του ύγρου από το δοχείο** και ισούται με:

$$W = \int_0^h g \cdot \sigma \cdot A(x) \cdot (h - x) dx$$

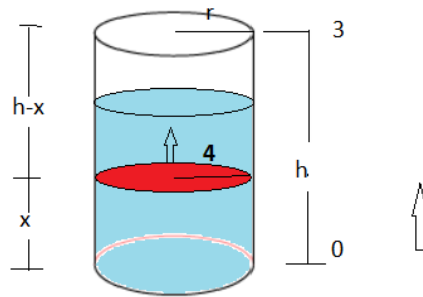
Η διαδικασία υπολογισμού του έργου αυτού θα γίνει πιο κατανοητή σε μία σειρά από παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1

Μια κυλινδρική πισίνα (δείτε παρακάτω σχήμα), που βρίσκεται τοποθετημένη πάνω στο έδαφος, έχει ακτίνα ίση με 4m και βάθος 3m. Η πισίνα είναι γεμάτη με νερό (πυκνότητα νερού $\sigma = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$).

- (α) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε την πισίνα (από το επάνω μέρος της).
- (β) Υποθέτουμε ότι το νερό μέσα στην πισίνα έχει ύψος 2,5m. Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε την πισίνα.
- (γ) Ας υποθέσουμε ότι η πισίνα, του παραπάνω προβλήματος, βρίσκεται μέσα στο έδαφος (επάνω μέρος/χείλος της πισίνας είναι ίσο με το έδαφος) και ας υποθέσουμε ότι είναι γεμάτη νερό. Πως μεταβάλλεται το έργο (του ερωτήματος (α));

Λύση



- (α) Έστω μια οριζόντια διατομή της πισίνας (κόκκινο χρώμα) σε απόσταση x από το κάτω μέρος της. Η διατομή αυτή έχει σχήμα κύκλου ακτίνας 4m, οπότε το εμβαδόν της είναι ίσο με:

$$A(x) = \pi 4^2 = 16\pi$$

Η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα νερού που περιέχεται στον όγκο με βάση τη διατομή αυτή και ύψος dx είναι ίση με:

$$h - x = 3 - x$$

Η δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε στον όγκο αυτό για να τον μεταφέρουμε στο πάνω μέρος της δεξαμενής είναι ίση με (δηλ. το βάρος του νερού που περιέχει ο στοιχειώδης όγκος):

$$g \cdot \sigma \cdot A(x) = 9.8 \cdot 1000 \cdot A(x)$$

Τέλος, το έργο που απαιτείται, για να αδειάσουμε την πισίνα, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_0^3 9.8 \cdot 1000 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^3 9.8 \cdot 1000 \cdot 16\pi \cdot (3-x) dx = 156.800\pi \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= 156.800\pi \left(3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) = 705.600\pi \text{ J}$$

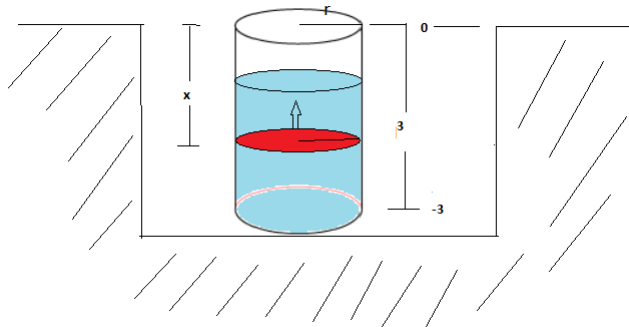
(τα όρια ολοκλήρωσης αναφέρονται στο ύψος του νερού μέσα στην πισίνα).

- (β) Η μόνη διαφορά με το ερώτημα (α) είναι τα όρια ολοκλήρωσης που αναφέρονται στο ύψος του νερού μέσα στην πισίνα (εδώ από 0 μέχρι 2,5). Το έργο λοιπόν που απαιτείται, για να αδειάσουμε την πισίνα, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_0^{2,5} 9.8 \cdot 1000 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^{2,5} 9.8 \cdot 1000 \cdot 16\pi \cdot (3-x) dx = 156.800\pi \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2,5} =$$

$$= 156.800\pi \left(2,5 \cdot 2,5 - \frac{2,5^2}{2} \right) = 490.000\pi \text{ J}$$

- (γ) Ας υποθέσουμε ότι η πισίνα του παραπάνω προβλήματος βρίσκεται μέσα στο έδαφος (δείτε σχήμα), τότε μεταβάλλεται ο τύπος που δίνει το διάστημα που πρέπει να διανύσει μια (στοιχειώδης) μάζα νερού που βρίσκεται σε απόσταση x από το πάνω μέρος της πισίνας.



Η απόσταση αυτή είναι τώρα:

$$0-x$$

Το έργο που απαιτείται, για να αδειάσουμε την πισίνα, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_{-3}^0 9.8 \cdot 1000 \cdot A(x) \cdot (0-x) dx = \int_{-3}^0 9.8 \cdot 1000 \cdot 16\pi \cdot (0-x) dx = 156.800\pi \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 =$$

$$= 156.800\pi \frac{3^2}{2} = 705.600\pi \text{ J}$$

Δηλαδή, όπως αναμενόταν, το έργο παραμένει το ίδιο (δεν εξαρτάται από το που βρίσκεται η πισίνα).

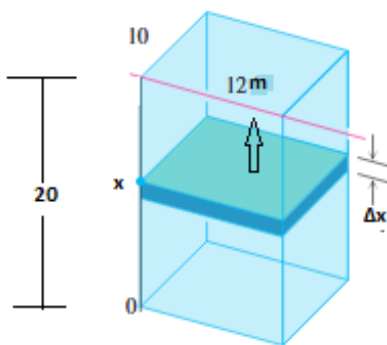
■

Παράδειγμα 2

Το δοχείο του παρακάτω σχήματος (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 10m, 12m, 20m) χρησιμοποιείται για συλλογή νερού της βροχής. Εάν το δοχείο είναι γεμάτο με νερό, να βρεθεί το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε όλο το νερό από το επάνω μέρος του δοχείου.

(πυκνότητα νερού $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

Λύση



Έστω μια οριζόντια διατομή του (μπλε σκούρο χρώμα) σε απόσταση x από το κάτω μέρος του. Η διατομή αυτή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 10m και 12m, οπότε το εμβαδόν της είναι ίσο με:

$$A(x) = 10 \cdot 12 = 120 \text{ m}$$

Η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα νερού που περιέχεται στον όγκο με βάση τη διατομή αυτή και ύψος Δx είναι ίση με:

$$h - x = 20 - x$$

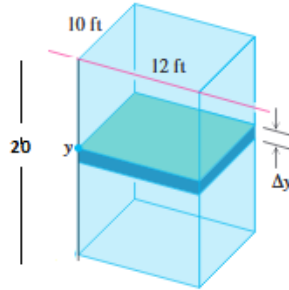
Τέλος, το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε το δοχείο, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} 9.8 \cdot 1000 \cdot A(x) \cdot (h - x) dx = \int_0^{20} 9.8 \cdot 1000 \cdot 120 \cdot (20 - x) dx = 1.176 \cdot 10^3 \left(20x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{20} = \\ &= 2.352 \cdot 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3 (διαφορετικές μονάδες μέτρησης)

Το δοχείο του παρακάτω σχήματος (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 10ft, 12ft, 20ft) χρησιμοποιείται για συλλογή νερού της βροχής. Εάν το δοχείο είναι γεμάτο με νερό, να βρεθεί το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε όλο το νερό από το επάνω μέρος του δοχείου (βάρος νερού $62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$).



Λύση

Παρατήρηση

Εάν οι μονάδες μέτρησης είναι **lb, ft** τότε δίνεται συνήθως το **βάρος** του νερού (ή άλλου υγρού), οπότε **δεν** χρειάζεται (όπως κάναμε στις προηγούμενες προσεγγίσεις) να πολλαπλασιάσουμε με 9,8.

Εργαζόμενοι ανάλογα όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, έχουμε ότι το ζητούμενο έργο θα είναι ίσο με:

$$W = \int_0^{20} 62,4 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^{20} 62,4 \cdot 120 \cdot (20-x) dx = 7.488 \left(20x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{20} = 1.497.600 \text{ J}$$

■

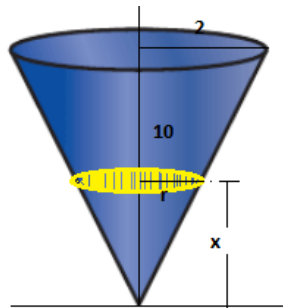
Παράδειγμα 4

Ένα δοχείο έχει σχήμα ανεστραμμένου (ορθού) κυκλικού κώνου (δείτε παρακάτω σχήμα) με ύψος 10m και ακτίνα στην κορυφή 2m.

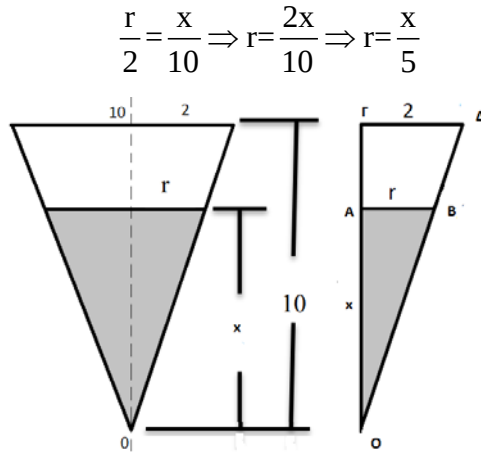
- (α) Εάν το δοχείο είναι γεμάτο με νερό, να βρεθεί το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε όλο το νερό από το επάνω μέρος του δοχείου.
- (β) Πως μεταβάλλεται το έργο, εάν το δοχείο είναι γεμάτο λάδι; (πυκνότητα λαδιού $800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

Λύση

- (α) Έστω μια οριζόντια διατομή του (κίτρινο χρώμα) σε απόσταση x από το κάτω μέρος του.



Η διατομή αυτή έχει σχήμα κύκλου ακτίνας r, το οποίο υπολογίζεται από το παρακάτω σχήμα. Τα τρίγωνα OAB και OΓΔ είναι όμοια, οπότε ισχύει η αναλογία:



οπότε το εμβαδόν της είναι ίσο με:

$$A(x) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{5} \right)^2 = \pi \frac{x^2}{25}$$

Η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα νερού που περιέχεται στον όγκο με βάση τη διατομή αυτή και ύψος dx είναι ίση με:

$$h-x=10-x$$

Τέλος, το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε το δοχείο, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 9.8 \cdot 1000 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^{10} 9.8 \cdot 1000 \cdot \pi \frac{x^2}{25} \cdot (10-x) dx = 392\pi \left(10 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{10} = \\ &= 392\pi \frac{10^4}{12} = 326.666,7\pi \text{ J} \end{aligned}$$

(β) Η μόνη αλλαγή σε σχέση με το ερώτημα (α) είναι η πυκνότητα. Επομένως, το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε το δοχείο από το λάδι, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 9.8 \cdot 800 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^{10} 9.8 \cdot 800 \cdot \pi \frac{x^2}{25} \cdot (10-x) dx = 313,6\pi \left(10 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{10} = \\ &= 313,6\pi \frac{10^4}{12} = 261.333,3\pi \text{ J} \end{aligned}$$

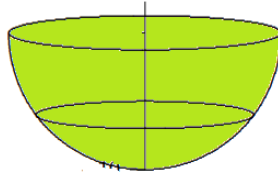
Δηλαδή το έργο που απαιτείται είναι μικρότερο (μικρότερη μάζα, άρα και μικρότερο βάρος/ δύναμη).

■

Παράδειγμα 5

Ένα ημισφαιρικό δοχείο ακτίνας 10ft (δείτε το παρακάτω σχήμα) είναι γεμάτο με λάδι, βάρους

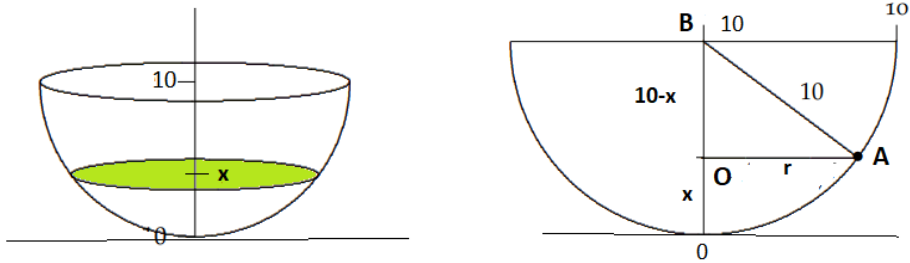
$$50 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}.$$



- (α) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε το λάδι από την επιφάνεια του δοχείου.
- (β) Εάν το δοχείο βρίσκεται μέσα στο έδαφος σε βάθος 6ft, υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε/μεταφέρουμε το λάδι στην επιφάνεια του εδάφους.

Λύση

- (α) Έστω μια οριζόντια διατομή του δοχείου (κόκκινο χρώμα) σε απόσταση x από το κάτω μέρος του. Η διατομή αυτή έχει σχήμα κύκλου ακτίνας r το οποίο και θα πρέπει να υπολογίσουμε.



Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$(10-x)^2 + r^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 10^2 - (10-x)^2$$

οπότε το εμβαδόν της διατομής είναι ίσο με: $A(x) = \pi r^2 = \pi(10^2 - (10-x)^2) = \pi(20x - x^2)$.

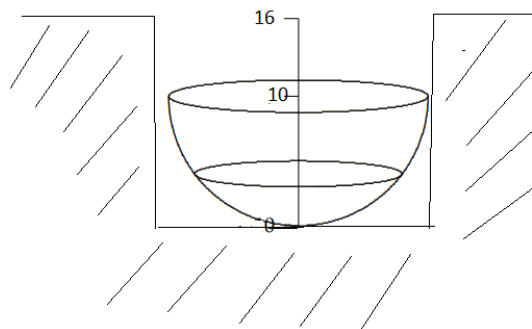
Η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα λαδιού που περιέχεται στον όγκο με βάση τη διατομή αυτή και ύψος dh είναι ίση με:

$$h-x=10-x$$

Τέλος, το έργο που απαιτείται, για να αντλήσουμε το λάδι, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 50 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^{10} 50 \cdot \pi(20x - x^2) \cdot (10-x) dx = \int_0^{10} 50 \cdot \pi(200x - 30x^2 + x^3) dx \\ &= 50\pi \left(200 \frac{x^2}{2} - 30 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{10} = 50\pi \left(200 \frac{10^2}{2} - 30 \frac{10^3}{3} + \frac{10^4}{4} \right) = 125.000\pi \text{ ft-lb} \end{aligned}$$

- (β) Η μόνη αλλαγή σε σχέση με το ερώτημα (α) είναι η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα λαδιού που περιέχεται στον όγκο, με βάση τη διατομή απόσταση x από το κάτω μέρος του και ύψος dh , που εδώ είναι ίση με $(16-x)$.



Το έργο λοιπόν που απαιτείται, για να αντλήσουμε το λάδι, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_0^{10} 50 \cdot A(x) \cdot (h-x) dx = \int_0^{10} 50 \cdot \pi (20x - x^2) \cdot (16-x) dx = \int_0^{10} 50 \cdot \pi (320x - 36x^2 + x^3) dx$$

$$= 50\pi \left(320 \frac{x^2}{2} - 36 \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{10} = 50\pi \left(320 \frac{10^2}{2} - 36 \frac{10^3}{3} + \frac{10^4}{4} \right) = 325.000\pi \text{ ft-lb}$$

■

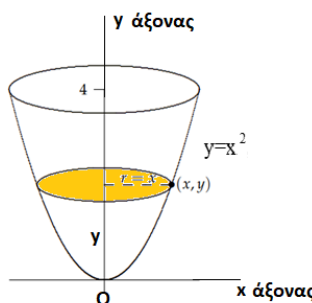
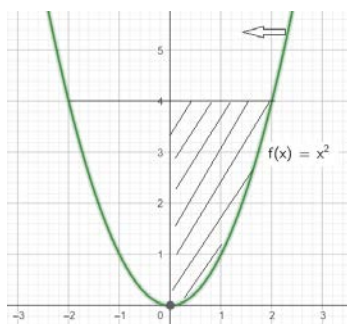
Παράδειγμα 6

Ένα δοχείο σχηματίζεται από την περιστροφή, γύρω από τον y -άξονα, του χωρίου που βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο και περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2$, $y=4$ και τον y -άξονα. Το δοχείο είναι γεμάτο λάδι πυκνότητας $800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

- (α) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε το λάδι από την επιφάνεια του δοχείου.
- (β) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε το λάδι από την επιφάνεια του δοχείου, εάν το δοχείο περιέχει λάδι μέχρι ύψος 2m.
- (γ) Εάν το δοχείο είναι άδειο και αρχίζουμε να το γεμίζουμε λάδι από βάνα που βρίσκεται στο κάτω μέρος του (στον πάτο του), μέχρι ύψους 3m, υπολογίστε το έργο που απαιτείται.

Λύση

- (α) Έστω μια οριζόντια διατομή του δοχείου (πορτοκαλί χρώμα) σε απόσταση y από το κάτω μέρος του. Η διατομή αυτή έχει σχήμα κύκλου ακτίνας r , το οποίο υπολογίζεται από το παρακάτω σχήμα.



Σε απόσταση y από το κάτω μέρος του, ο κύκλος έχει ακτίνα έστω:

$$r=x \quad \& \quad y=x^2 \Rightarrow r=\sqrt{y}$$

οπότε το εμβαδόν της είναι ίσο με:

$$A(x)=\pi r^2=\pi(\sqrt{y})^2 = \pi y$$

Η απόσταση που πρέπει να διανύσει η (στοιχειώδης) μάζα λαδιού που περιέχεται στον όγκο με βάση τη διατομή αυτή και ύψος δx είναι ίση με:

$$h-y=4-y$$

Τέλος, το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε το δοχείο, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W=\int_0^4 9.8 \cdot 800 \cdot A(y) \cdot (4-y) dy = \int_0^4 9.8 \cdot 800 \cdot \pi y \cdot (4-y) dy = 7.840\pi \left(4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 =$$

$$= 83.626,7\pi \text{ J}$$

(β) Η μόνη αλλαγή σε σχέση με το ερώτημα (α) είναι τα όρια ολοκλήρωσης (από 0 έως 2, γιατί το δοχείο περιέχει λάδι μέχρι ύψος 2m). Επομένως, το έργο που απαιτείται για να αδειάσουμε το δοχείο δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$W=\int_0^2 9.8 \cdot 800 \cdot A(y) \cdot (4-y) dy = \int_0^2 9.8 \cdot 800 \cdot \pi y \cdot (4-y) dy = 7.840\pi \left(4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= 41.813,3\pi \text{ J}$$

(ισούται με το μισό του ερωτήματος (α)).

(γ) Εδώ το δοχείο γεμίζει από το κάτω μέρος, οπότε η κάθε (κυκλική) διατομή του σε απόσταση y από το κάτω μέρος του, μεταφέρεται από το 0 σε ύψος y . Επομένως (εργαζόμενοι όπως στο (α)), το έργο που απαιτείται για να γεμίσουμε το δοχείο λάδι μέχρι ύψος 3, δίνεται από το ολοκλήρωμα:

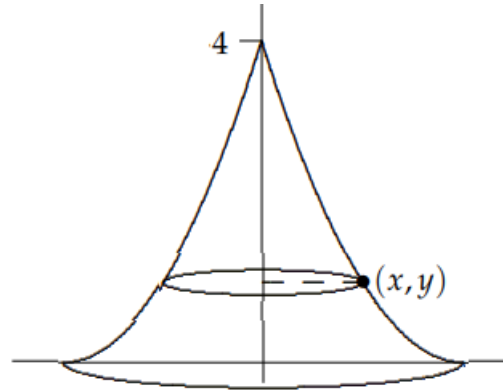
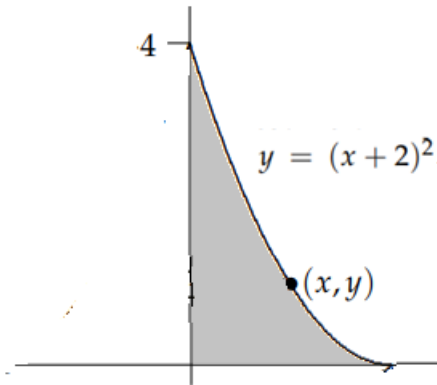
$$W=\int_0^3 9.8 \cdot 800 \cdot A(y) \cdot y dy = \int_0^3 9.8 \cdot 800 \cdot \pi y \cdot y dy = 7.840\pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 =$$

$$= 70.560\pi \text{ J}$$

■

Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε ότι ένα δοχείο είναι σχηματισμένο από την περιστροφή του χωρίου, που βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο και περικλείεται από την καμπύλη $y=(x+2)^2$ και το x -άξονα, γύρω από τον y - άξονα (δείτε το παρακάτω σχήμα). Το δοχείο είναι γεμάτο με λάδι του οποίου η πυκνότητα είναι $50 \frac{\text{lbs}}{\text{ft}^3}$.



- (α) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για την άντληση όλου του λαδιού, από το πάνω μέρος του δοχείου. ($1280\pi/3$ ft-lbs).
- (β) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για την άντληση του λαδιού, από το πάνω μέρος του δοχείου, εάν υπάρχει μόνον 1 ft λάδι μέσα στο δοχείο. (330π ft-lbs).
- (γ) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται για την άντληση του λαδιού, από το πάνω μέρος του δοχείου, σε ύψος 3 ft από την επιφάνεια του δοχείου. ($2480\pi/3$ ft-lbs).